Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste
Vol. XL, 93–116 (2009)

Déterminations des corps $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-1})$ dont les 2-groupes de classes sont de type $(2,4)$ ou $(2,2,2)$

Abdelmalek Azizi and Mohammed Taous

Abstract. *Let d be a square-free positive integer, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d},\sqrt{-1})$ and C_2 the 2-part of class group of K. Our goal is to determine all d such that $C_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ or $C_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Keywords: Quadratic Fields, Class Number, Class Group
MS Classification 2000: 11R29

1. Introduction

Plusieurs travaux réalisés au cours des dernières années (voir par exemple [1], [4], [18], [19]) ont été consacrés à l'étude de la structure du 2-groupe de classes d'un corps biquadratique imaginaire. Dans [1], A. Azizi avait déterminé tous les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-1})$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés, ayant le 2-groupe de classes de type (2, 2). De même dans [4], I. Benhamza avait étudié le même problème pour les corps biquadratiques de la forme $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2})$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés. Dans [18], T. M. McCall, C. J. Parry et R. R. Ranalliat ont déterminé tous les corps biquadratiques imaginaires dont le 2-groupe de classes est cyclique, et dans [19], ils avaient donné une méthode pour déterminer le rang du 2-groupe de classes d'un corps biquadratique imaginaire ; avec cette méthode et d'autres techniques ils avaient déterminé tous les corps biquadratiques imaginaires dont le 2-groupe de classes est de type $(2,2)$.

De notre part, on va structurer le 2-groupe de classes de tous les corps biquadratiques imaginaires de la forme $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-1})$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés, ayant une 2-partie de nombre de classes égal à 8.

Soit K le corps biquadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-1})$, où d est un entier positif sans facteurs carrés et C_2 le 2-groupe de classes de K au sens large.

Dans ce travail, on va déterminer les entiers d pour lesquels C_2 est de type $(2, 4)$ ou $(2, 2, 2)$.

L'étude est faite en deux étapes :

1) Détermination des entiers d tels que C_2 est d'ordre 8, en utilisant les résultats de Kaplan [12] et [13].
2) Etude de la structure de C_2 dans les cas où il est d'ordre 8, afin de préciser les entiers d pour les quels C_2 est de type $(2, 4)$ ou $(2, 2, 2)$.

2. Notations et rappels

Rappelons la définition du symbole biquadratique rationnel : Soit $p \equiv 1 \pmod 4$ et a tel que $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$. Le symbole $\left(\frac{a}{p}\right)_4$ est égal à 1 ou -1, suivant que $a^{\frac{p-1}{4}} \equiv \pm 1 \pmod p$. Si $a \equiv 1 \pmod 8$, le symbole $\left(\frac{a}{2}\right)_4$ est égal à $(-1)^{\frac{a-1}{8}}$. Le symbole dont le dénominateur est composé est définit multiplicativement. Au cours du présent travail, nous adoptons les notations suivantes :

d **:** Un entier naturel sans facteurs carrés.

K **:** Le corps biquadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-1})$.

h, h_2 **:** Le nombre (resp. le 2-nombre) de classes de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-1})$.

$h(m)$, $h_2(m)$ **:** Le nombre (resp. le 2-nombre) de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ pour un entier m de $\mathbb{Z}$ sans facteurs carrés.

ε_m **:** L'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ pour un entier m de $\mathbb{Z}$ sans facteurs carrés.

p, p_i **:** Des entiers premiers positifs congrus à 1 modulo 4.

q, q_i **:** Des entiers premiers positifs congrus à -1 modulo 4.

$C(\geq n)$, $C(n)$ **:** Un 2-groupe d'ordre Supérieur à n (resp. égal à n).

C_2 **:** Le 2-groupe de classes de K.

$C_2(m)$ **:** Le 2-groupe de classes au sens strict de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ où un m est un entier de $\mathbb{Z}$ sans facteurs carrés.

Q **:** L'indice d'unités de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-1})$.

$(-)$ **:** Symbole quadratique.

$(-)_4$ **:** Symbole biquadratique.

Proposition 2.1 (Résultat de Gauss [13]). *$C_2(m)$ est le produit de $r_m - 1$ groupes cycliques où r_m est le nombre des premiers ramifiés dans $\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q}$. En particulier $2^{r_d-2}/h(d)$ et $2^{r_{-d}-1}/h(-d)$.*

Proposition 2.2 ([20]). *Soit $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ un corps quadratique réel, on suppose que $d = d_1d_2$ est le produit de d_1 et d_2 deux nombres premiers non congrus à 3 modulo 4. Soient $h(k)$ le nombre de classes de k, $h^+(k)$ le nombre de classes au sens strict de k et ε l'unité fondamentale de k. Alors*

(1) *On suppose que $(\frac{d_1}{d_2}) = -1$; alors $h(k) \equiv h^+(k) \equiv 2 \pmod 4$ et $N(\varepsilon) = -1$.*

(2) *On suppose que $(\frac{d_1}{d_2}) = +1$; alors on a :*

 (i) *Si $(\frac{d_1}{d_2})_4 = -((\frac{d_2}{d_1})_4$, alors $h^+(k) = 2h(k) \equiv 4 \pmod 8$ et $N(\varepsilon) = 1$;*

 (ii) *Si $(\frac{d_1}{d_2})_4 = (\frac{d_2}{d_1})_4 = -1$, alors $h^+(k) = h(k) \equiv 4 \pmod 8$ et $N(\varepsilon) = -1$;*

 (iii) *Si $(\frac{d_1}{d_2})_4 = (\frac{d_2}{d_1})_4 = +1$, alors $h^+(k) \equiv 0 \pmod 8$.*

3. L'indice d'unités Q

D'après [22] le nombre de classes h de K est donné par :

$$h = \frac{1}{2} Q h(d) h(-d),$$

où Q désigne l'indice du groupe engendré par les groupes des unités de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ et $\mathbb{Q}(i)$ avec $i = \sqrt{-1}$, dans le groupe des unités de K. Si $d \neq 2$, 3, alors Q est l'indice de Hasse de K et il est connu que $Q = 1$ ou 2 (Voir [11] §21, Satz 15). A. Azizi a montré dans [2] que $Q = 2$ si, et seulement si, $2\varepsilon_d = 2(s + t\sqrt{d})$ est un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, ce qui est équivalent aussi à $s+1$ ou $s-1$ est un carré dans $\mathbb{N}$.

Dans cette section, on va donner la valeur de Q dans des cas particuliers, pour cela on va transformer la caractérisation précédente à une autre (qu'on trouve déjà dans le travail de [15, satz 13]).

Proposition 3.1. *L'indice Q est égal à 2 si, et seulement s'il existe deux entiers rationnels x et y tels que $\pm 2 = x^2 - dy^2$.*

Preuve. Soit $\varepsilon_d = s + t\sqrt{d}$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, d'après [2] Q=2 si, et seulement si, $s \pm 1$ est un carré dans $\mathbb{N}$. C'est équivalent à $x^2(x^2 \mp 2) = t^2 d$ avec $s \pm 1 = x^2$, puisque d est sans facteurs carrés alors x divise t, ce qui implique $\pm 2 = x^2 - dy^2$ où $t = xy$.

Inversement, supposons que $\pm 2 = x^2 - dy^2$. Posons $\varepsilon = s_0 + t_0\sqrt{d}$ où $s_0 = x^2 \mp 1$ et $t_0 = xy$, alors la norme de ε est 1 et $\varepsilon > 1$, ainsi $\varepsilon = \varepsilon_d^m$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $m \geq 1$, puisque $2\varepsilon = 2\varepsilon_d^m = (x + \sqrt{d}y)^2$, alors m est impair, car sinon $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$; et ceci n'est pas possible. Alors $2\varepsilon_d = (x + \sqrt{d}y)^2(\varepsilon_d^{-1})^{m-1}$, ce qui implique que $2\varepsilon_d$ est un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, par suite Q=2. □

Corollaire 3.2. *Si l'une des conditions suivantes est vérifiée, alors $Q = 1$.*

(1) *d est congru à 1 modulo 4.*

(2) *Il existe un entier impair d' qui divise d tel que $d' \equiv 5 \pmod 8$.*

Preuve. (1) Supposons que $Q = 2$, alors il existe deux entiers rationnels x et y tels que $\pm 2 = x^2 - dy^2$, ainsi $2 \equiv x^2 - y^2 \pmod 4$, mais puisque un carré est congru à 0 ou 1 modulo 4, alors l'equation précédente n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}$, donc $Q = 1$.

(2) Supposons que Q=2, alors il existe deux entiers rationnels x et y tels que $\pm 2 = x^2 - dy^2$, ce qui implique $(\frac{\pm 2}{d'}) = (\frac{2}{d'}) = (\frac{x^2 - y^2 d}{d'}) = (\frac{x^2}{d'}) = 1$, donc $d' \equiv 1 \pmod 8$; et ceci est impossible.

□

Lemme 3.3 ([3]). *Soit p un nombre premier impair. On suppose que ε_{2p} est de norme 1. Alors l'indice d'unités de $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$ est égal à 2.*

Lemme 3.4. *Soient d un entier naturel sans facteurs carrés et Q l'indice d'unités de $\mathbb{Q}(\sqrt{2d}, \sqrt{-1})$. On suppose que Q est égal à 1 et la norme de l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2d})$ est égale à 1. Alors il existe des entiers naturels sans facteurs carrés d_1 et d_2 tels que $d = d_1d_2$, i, $j \in \{0, 1\}$, $i + j = 1$ et*

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2}{d_2}\right)^i \left(\dfrac{d_1}{d_2}\right) = 1, \\ \left(\dfrac{-1}{d_1}\right) \left(\dfrac{2}{d_1}\right)^j \left(\dfrac{d_2}{d_1}\right) = 1. \end{cases}$$

Preuve. Soit $\varepsilon = x + \sqrt{2d}y$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2d})$ où x et y sont deux entiers naturels. Puisque la norme de ε est égale à 1, alors $(x + 1)(x - 1) = 2dy^2$ avec y est paire, d'après l'unicité de la décomposition de $(x + 1)(x - 1)$ en nombres premiers on trouve que

$$\begin{cases} x + 1 = 2^{i'} d_1 y_1^2, \\ x - 1 = 2^{j'} d_2 y_2^2, \end{cases}$$

où i', $j' \in \{1, 2\}$, d_1, $d_2 \in \mathbb{N}$, $d_1d_2 = d$, $i' + j' = 3$ et $2y_1y_2 = y$.

Puisque $Q = 1$ et la norme de ε est égale à 1, alors d ne peut pas être un nombre premier (voir Lemme 3.3), ainsi $x \pm 1$ et $2(x \pm 1)$ ne sont pas des carrés dans $\mathbb{N}$ (voir [3] et [2]), donc d_1 et d_2 sont des entiers sans facteurs carrés et $1 = 2^i d_1 y_1^2 - 2^j d_2 y_2^2$ où $i' - 1 = i$ et $j' - 1 = j$. On conclut que

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2}{d_2}\right)^i \left(\dfrac{d_1}{d_2}\right) = \left(\dfrac{2^i d_1 y_1^2 - 2^j d_2 y_2^2}{d_2}\right) = \left(\dfrac{1}{d_2}\right) = 1, \\ \left(\dfrac{-1}{d_1}\right) \left(\dfrac{2}{d_1}\right)^j \left(\dfrac{d_2}{d_1}\right) = \left(\dfrac{2^i d_1 y_1^2 - 2^j d_2 y_2^2}{d_1}\right) = \left(\dfrac{1}{d_1}\right) = 1, \end{cases}$$

et on trouve le résultat du lemme. □

Corollaire 3.5. *Si l'une des conditions suivantes est vérifiée, alors $Q = 2$.*

(1) $d = 2pq$ *où* $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$ *et* $(\frac{2}{p}) = -(\frac{p}{q}) = 1$.

(2) $d = 2q_1q_2$ *où* $q_1 \equiv q_2 \equiv 3 \pmod 8$.

Preuve. (1) Supposons que $Q = 1$, alors le Lemme précédent entraîne que

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2}{d_2}\right) = -1, \\ \left(\dfrac{-1}{d_1}\right) = -1, \end{cases}$$

où $pq = d_1 d_2$, ceci n'est pas vrai, car $(\frac{2}{p}) = -(\frac{p}{q}) = 1$.

(2) De la même façon on démontre que si $Q = 1$, alors

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2}{d_2}\right)^i \left(\dfrac{d_1}{d_2}\right) = 1, \\ \left(\dfrac{2}{d_1}\right)^j \left(\dfrac{d_2}{d_1}\right) = -1, \end{cases}$$

où $q_1 q_2 = d_1 d_2$, par conséquent $(\frac{d_1}{d_2}) = -(\frac{d_1}{d_2})$ et $(\frac{2}{d_2})^i (\frac{2}{d_1})^j = 1$, ainsi $(\frac{2}{d_2})^i = (\frac{2}{d_1})^j = 1$ (car $i, j \in \{0, 1\}$ et $i + j = 1$). Ceci implique $(\frac{2}{q_1}) = 1$ ou $(\frac{2}{q_2}) = 1$. Ce qui donne une contradiction, car $q_1 \equiv q_2 \equiv 3 \pmod 8$. Cela achève la preuve du Lemme. □

Corollaire 3.6. *Si $d = 2p_1 p_2$ où $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod 4$ et au moins deux éléments de $\{(\frac{2}{p_1}), (\frac{2}{p_2}), (\frac{p_1}{p_2})\}$ valent -1, alors la norme de l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2p_1p_2})$ est égale à -1.*

Preuve. On suppose que la norme de ε_d est égale à 1, on a $Q = 1$ car $(\frac{2}{p_1}) = -1$ ou $(\frac{2}{p_2}) = -1$ (Corollaire 3.2). De la même façon que précédemment, on trouve que au moins deux éléments de $\{(\frac{2}{p_1}), (\frac{2}{p_2}), (\frac{p_1}{p_2})\}$ valent 1 et ceci n'est pas le cas. Alors la norme de l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2p_1p_2})$ est égale à -1. □

4. Déterminations des corps K dont le 2-groupe de classes est d'ordre 8

On note K^* le corps de genres (au sens large) et $K_2^{(1)}$ le 2-corps de Hilbert de K. On suppose que le 2-nombre de classes de K est égal à 8. On va donner pour chaque forme de l'entier d rencontrée dans l'étude des corps K, des conditions nécessaires et suffisantes sur

d. Soit p un diviseur premier du discriminant D_K de K, on désigne par $e(p)$ l'indice de ramification de p dans $K/\mathbb{Q}$. On sait, d'après [14] que

$$\prod_{p/D_K} e(p) = [K^* : \mathbb{Q}] = [K^* : K] \cdot [K : \mathbb{Q}] = 4 \cdot [K^* : K].$$

Or on a $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K)$ est isomorphe à C_2, alors $[K_2^{(1)} : K] = 8$. Comme $K \subseteq K^* \subseteq K_2^{(1)}$, donc nous serons amenés à distinguer les quatre cas suivants :

(i) $K^* = K_2^{(1)}$.

(ii) $[K^* : K] = 2$.

(iii) $[K^* : K] = 4$.

(iv) $K^* = K$.

4.1. Cas $K^* = K_2^{(1)}$

Dans ce cas $\prod_{p/D_K} e(p) = 2^5$, alors si 2 est totalement ramifié dans K, 2 figure dans la décomposition de d, par suite d est le produit de 3 nombres premiers impairs et 2. Si 2 est n'est pas totalement ramifié, alors 2 ne divise pas d et il est produit de quatre nombres premiers impairs, en tout cas $d = \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4$ avec les π_i sont des nombres premiers, d'après le résultat de Gauss $2^2/h(d)$ et $2^3/h(-d)$ et on sait que $h = \frac{1}{2}Qh(d)h(-d)$, alors $16/h$ ce qui est impossible

Conclusion 1. *Si la 2-partie du nombre de classes de K est égale à 8, alors $K^* \neq K_2^{(1)}$.*

4.2. Cas $[K^* : K] = 2$

Dans ce cas $\prod_{p/D_K} e(p) = 2^3$, alors les formes possibles pour d sont :

1) $d = p_1p_2$ où $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod 4$;

2) $d = 2p$ où $p \equiv 1 \pmod 4$;

3) $d = pq$ où $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$;

4) $d = 2q$ où $q \equiv -1 \pmod 4$;

5) $d = q_1q_2$ où $q_1 \equiv q_2 \equiv -1 \pmod 4$.

On va essayer de donner d'autres conditions sur d pour que la 2-partie du nombre de classes de h soit égale à 8 et éliminer certaines formes de d.

(1) $d = p_1p_2$ où $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod 4$.

a) On suppose que $(\frac{p_1}{p_2}) = 1$.
D'après [13, paragraphe 11, cas 1] $C_2(-d) = C(\geq 2) \cdot C(\geq 4)$, alors $8/h(-d)$. De plus $C_2(-d) = C(2) \cdot C(4)$ si, et seulement si, $p_1 \equiv 1$, $p_2 \equiv 5 \pmod 8$ et $(\frac{p_2}{p_1})_4 = -1$ ou bien $p_1 \equiv p_2 \equiv 5 \pmod 8$ et $(\frac{p_2}{p_1})_4 = (\frac{p_1}{p_2})_4$. D'autre part, on sait que le 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est cyclique, alors la Proposition 2.2 indique que $C_2(d) = C_2(\geq 2)$ et que $C_2(d) = C_2(\geq 4)$ si, et seulement si, $(\frac{p_1}{p_2})_4 = (\frac{p_2}{p_1})_4$; et $C_2(d) = C(2)$ dans le cas contraire. Comme $d \equiv 1 \pmod 4$, alors $Q = 1$, ce qui nous permet de voir que $h_2 = 8$ si, et seulement si, $h_2(d) = 2$ et $h_2(-d) = 8$, ceci est équivalent à $p_1 \equiv 1$, $p_2 \equiv 5 \pmod 8$ et $(\frac{p_1}{p_2})_4 = -(\frac{p_2}{p_1})_4 = 1$.

b) On suppose $(\frac{p_1}{p_2}) = -1$.
La proposition 2.2 implique que $h(d) \equiv 2 \pmod 4$ et la norme de l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1p_2})$ est égal à -1 ; alors $Q = 1$ et $h = \dfrac{h(d)}{2}h(-d)$. Il vient que la 2-partie de h est égale à 8 si, et seulement si, la 2-partie de $h(-d)$ est égale à 8 ; et d'après [13, paragraphe 11, cas 1] c'est possible si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est vérifiée $p_1 \equiv p_2 \equiv 5 \pmod 8$ et $(\frac{p_1p_2}{2})_4(\frac{2p_1}{p_2})_4(\frac{2p_2}{p_1})_4 = -1$ ou $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod 8$ et $(\frac{2}{a+b}) = -1$ où $p_1p_2 = a^2 + b^2$.

Conclusion 2. *La 2-partie de h est égale à 8 si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

i) $p_1 \equiv 1$, $p_2 \equiv 5 \pmod 8$, $(\frac{p_1}{p_2}) = 1$ *et* $(\frac{p_1}{p_2})_4 = -(\frac{p_2}{p_1})_4 = 1$.

ii) $p_1 \equiv p_2 \equiv 5 \pmod 8$, $(\frac{p_1}{p_2}) = -1$ *et* $(\frac{p_1p_2}{2})_4(\frac{2p_1}{p_2})_4(\frac{2p_2}{p_1})_4 = -1$.

iii) $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod 8$, $(\frac{p_1}{p_2}) = -1$ *et* $(\frac{2}{a+b}) = -1$ *où* $p_1p_2 = a^2+b^2$.

(2) $d = 2p$ où $p \equiv 1 \pmod 4$.

a) $p \equiv 5 \pmod 8$.
Dans ce cas $h(d) \equiv h(-d) \equiv 2 \pmod 4$ ([12]) et la norme de l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$ est égale à -1 (Proposition 2.2), alors la 2-partie de h est égale à 2, par conséquent ce cas est à rejeter.

b) $p \equiv 1 \pmod 8$.
D'après [5], $p = a^2 + 16b^2$ et selon [12], $4/h(d)$ et $4/h(-d)$ ou $2/h(d)$ et $4/h(-d)$, alors $h_2 = 8$ si, et seulement si, $h_2(d) = h_2(-d) = 4$ et $Q = 1$ ou $h_2(-d) = 2h_2(d) = 4$ et $Q = 2$, dans ce cas on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4.1. *On suppose que* $p \equiv 1 \pmod 8$, *alors*

i) $h_2(2p) = 4$ *si, et seulement si,* $(\frac{2}{p})_4 = (\frac{p}{2})_4 = -1$ *et la norme de l'unité fondamentale de* $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$ *est égale à* -1.

ii) $h_2(2p) = 2$ *si, et seulement si,* $(\frac{2}{p})_4 = -(\frac{p}{2})_4$ *et la norme de l'unité fondamentale de* $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$ *est égale à* 1.

iii) $h_2(-2p) = 4$ *si, et seulement si,* $(\frac{2}{p})_4 = -1$.

Preuve. i) et ii) Conséquent de la Proposition 2.2.
iii) D'après [12] $h_2(-2p) = 4$ si, et seulement si, 2 ne divise pas b, la loi de réciprocité biquadratique ([13, Théorème 1]) implique que $(\frac{2}{p})_4 = (-1)^b$, il vient que $h_2(-2p) = 4$ si, et seulement si, $(\frac{2}{p})_4 = -1$. □

Conclusion 3. *La* 2*-partie de* h *est égale à* 8 *si, et seulement si,* $d = 2p$ *vérifie l'une des conditions suivantes :*

– $(\frac{2}{p})_4 = (\frac{p}{2})_4 = -1$ *et* $p \equiv 1 \pmod 8$.
– $(\frac{2}{p})_4 = -(\frac{p}{2})_4 = -1$ *et* $p \equiv 1 \pmod 8$.

(3) $d = pq$ où $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$. D'après [13] et [12] $C_2(d) = C(2) \cdot C(2)$ si, et seulement si, $(\frac{p}{q}) = -1$ où $p \equiv 5 \pmod 8$; et $4/h(-d)$ si, et seulement si, $(\frac{p}{q}) = 1$, alors si $(\frac{p}{q}) = -1$, $h_2(d) = h_2(-d) = 2$, on a 8 ne divise pas h.

a) $p \equiv 5 \pmod 8$ et $(\frac{p}{q}) = 1$.

Dans ce cas $C_2(d) = C(2) \cdot C(2)$ et Q=1 (Corollaire 3.2), alors $h_2(d) = 2$. Par suite $h_2 = 8$ si, et seulement si, $h_2(-d) = 8$. D'autre part, on sait d'après [12] que $h_2(-d) = 8$ si, et seulement si, $(\frac{-q}{p})_4 = 1$ et 16 ne divise pas $h(-d)$. P. A. Leonard et K. S. Williams ont donné dans [17, Théorème 2, p. 222] une condition nécessaire et suffisante pour que $h(-pq)$ soit divisible par 16. Ils ont montré que si $p \equiv 1 \pmod 4$, $q \equiv 3 \pmod 4$, $(\frac{p}{q}) = 1$ et $(\frac{-q}{p})_4 = 1$, alors il existe X, Y et Z des entiers naturels tels que :

$$pX^2 - qY^2 - Z^2 = 1, \tag{1}$$

$$(X, Y) = (Y, Z) = (Z, X) = 1,\ p \nmid YZ,\ q \nmid XZ, \tag{2}$$

$$X \text{ impair, } Y \text{ pair, } Z \equiv 1 \pmod 4. \tag{3}$$

De plus 16 divise $h(-pq)$ si, et seulement si, $(\frac{Z}{p})_4 = (\frac{2X}{Z})$.

Dans les cas suivants b) et c), $h_2 = 8$ si, et seulement si, $h_2(d) = h_2(-d) = 4$ et $Q = 1$.

b) $p \equiv 1 \pmod 8$, $q \equiv 3 \pmod 8$ et $(\frac{p}{q}) = 1$.

D'après [13, paragraphe 5] $p = u^2 + 2v^2$ et $q = w^2 + 2z^2$ et $h_2(d) = 4$ si, et seulement si, l'un au moins des $\{(\frac{uz+vw}{p}), (\frac{q}{p})_4\}$ est égal à -1.

c) $p \equiv 1 \pmod 8$, $q \equiv 7 \pmod 8$ et $(\frac{p}{q}) = 1$.

D'après [13, paragraphe 5] on a $p = 2e^2 - d^2$, $q = 2r^2 - s^2$ et $h_2(d) = 4$ si, et seulement si, l'un au moins des $\{(\frac{es+dr}{p}), (\frac{q}{p})_4\}$ est égal à -1.

Dans les deux cas b) et c) on a $h_2(-d) = 4$ si, et seulement si, $(\frac{-q}{p})_4 = -1$. Puisque $p \equiv 1 \pmod 8$, donc $(\frac{-q}{p})_4 = (\frac{q}{p})_4$, alors on a la conclusion suivante :

Conclusion 4. *$h_2 = 8$ si, et seulement si, d vérifie l'une des conditions suivantes :*

- $p \equiv 5 \pmod 8$, $(\frac{p}{q}) = -(\frac{q}{p})_4 = 1$ *et* $(\frac{Z}{p})_4 = -(\frac{2X}{Z})$, *où X, Y et Z sont des entiers naturels vérifient* (1), (2) *et* (3).
- $p \equiv 1 \pmod 8$, $(\frac{p}{q}) = -(\frac{q}{p})_4 = 1$ *et* $Q = 1$.

(4) $d = 2q$ où $q \equiv -1 \pmod 4$. D'après [12], $h(d)$ est impair ; et $8/h_2(-d)$ si et seulement si $q \equiv -1 \pmod{16}$. Le Lemme 3.3 entraîne que $Q = 2$, alors $h_2 = 8$ si, et seulement si, $q \equiv -1 \pmod{16}$ et 16 ne divise pas $h(-d)$. Or P. A. Leonard et K. S. Williams ont donné dans [16, Théorème 3, p. 205] une condition nécessaire et suffisante pour que $h(-q)$ soit divisible par 16. Ils ont montré que si $d = 2q$ où $q = u^2 - 2v^2 \equiv -1 \pmod{16}$, $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ et $u \equiv 1 \pmod{16}$, alors

$$h(-2q) \equiv 0 \pmod{16} \Leftrightarrow \left(\frac{u}{v}\right) = 1.$$

Conclusion 5. *La 2-partie de h est égale à 8 si, et seulement si $q = u^2 - 2v^2 \equiv -1 \pmod{16}$, $(u, v) \in \mathbb{N}^2$, $u \equiv 1 \pmod{16}$ et $(\frac{u}{v}) = -1$.*

(5) $d = q_1q_2$ où $q_1 \equiv q_2 \equiv -1 \pmod 4$ et $(\frac{q_1}{q_2}) = -(\frac{q_2}{q_1}) = 1$. Dans ce cas, on a $h(d)$ est impair ([21, lemme 5] et $Q = 1$ (Corollaire 3.2), alors $h_2 = 8$ si, et seulement si, $h_2(-d) = 16$. Nous trouvons dans [13, p. 354] que $8/h(-d)$ si, et seulement si, $q_2 \equiv -1 \pmod 8$. En conséquence, nous pouvons distinguer deux sous-cas :

a) $d = q_1q_2$ où $q_1 \equiv q_2 \equiv -1 \pmod 8$ et $(\frac{q_1}{q_2}) = -(\frac{q_2}{q_1}) = 1$.
Dans ce sous-cas, P. Kaplan a montré dans [13, Proposition B'_{12}, p. 354] que $16/h(-d)$ si, et seulement si, $(\frac{e}{q_2}) = 1$ où $q_1q_2 = 2e^2 - d^2$. Par consequent $h_2 = 8$ si, et seulement si, $(\frac{e}{q_2}) = 1$ et $32 \nmid h(-d)$.

b) $d = q_1q_2$ où $q_1 \equiv 3 \pmod 8$, $q_2 \equiv -1 \pmod 8$ et $(\frac{q_1}{q_2}) = -(\frac{q_2}{q_1}) = 1$.
Dans ce sous-cas, P. Kaplan n'a pas caractérisé la divisibilité de $h(-d)$ par 16, mais K. Hardy et K. S. Williams ont prouvé dans [10, Théorème 8, p. 194] que

$$h(-pq) \equiv \begin{cases} 0 \pmod{16}, & \text{si } (\frac{k^2X+lY}{q_2}) = 1\,; \\ 8 \pmod{16}, & \text{si } (\frac{k^2X+lY}{q_2}) = -1. \end{cases}$$

Où

$$2q_2 = k^2X^2 + 2lXY + 2mY^2 \text{ et } q_1 = l^2 - 2k^2m. \qquad (4)$$

En résumé nous avons.

Théorème 4.2. *Soient d un entier naturel sans facteurs carrés, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-1})$, h le nombre de classes de K et K^* le corps de genres de K. Alors la 2-partie de h est égale à 8 et $[K^* : K] = 2$ si et seulement si d vérifie l'une des conditions suivantes :*

a) $d = p_1p_2$ *où* $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod 4$ *et l'une des conditions suivantes est vérifiée :*
   i) $p_1 \equiv 1$, $p_2 \equiv 5 \pmod 8$, $(\frac{p_1}{p_2}) = 1$ *et* $(\frac{p_1}{p_2})_4 = -(\frac{p_2}{p_1})_4 = 1$.
   ii) $p_1 \equiv p_2 \equiv 5 \pmod 8$, $(\frac{p_1}{p_2}) = -1$ *et* $(\frac{p_1p_2}{2})_4(\frac{2p_1}{p_2})_4(\frac{2p_2}{p_1})_4 = -1$.
   iii) $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod 8$, $(\frac{p_1}{p_2}) = -1$ *et* $(\frac{2}{a+b}) = -1$ *où* $p_1p_2 = a^2 + b^2$.

b) $d = 2p$ *où* $p \equiv 1 \pmod 8$ *et p vérifie l'une des conditions suivantes :*
   i) $(\frac{2}{p})_4 = (\frac{p}{2})_4 = -1$.
   ii) $(\frac{2}{p})_4 = -(\frac{p}{2})_4 = -1$.

c) $d = pq$ *où* $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$ *et l'une des conditions suivantes est vérifiée :*
   i) $p \equiv 5 \pmod 8$, $(\frac{p}{q}) = -(\frac{q}{p})_4 = 1$ *et* $(\frac{Z}{p})_4 = -(\frac{2X}{Z})$, *où* X, Y *et* Z *sont des entiers naturels vérifient* (1), (2) *et* (3).
   ii) $p \equiv 1 \pmod 8$, $(\frac{p}{q}) = -(\frac{q}{p})_4 = 1$ *et* $Q = 1$.

d) $d = 2q$ *où* $q = u^2 - 2v^2 \equiv -1 \pmod{16}$, $(u, v) \in \mathbb{N}^2$, $u \equiv 1 \pmod{16}$ *et* $(\frac{u}{v}) = -1$.

e) $d = q_1q_2$ *où* $q_1 \equiv -1 \pmod 4$, $q_2 \equiv -1 \pmod 8$, $(\frac{q_1}{q_2}) = -(\frac{q_2}{q_1}) = 1$ *et l'une des conditions suivantes est vérifiée :*
   i) $q_1 \equiv -1 \pmod 8$, $(\frac{e}{q_2}) = 1$ *où* $q_1q_2 = 2e^2 - d^2$ *et* $32 \nmid h(-d)$.
   ii) $q_1 \equiv 3 \pmod 8$, $(\frac{k^2X+lY}{q_2}) = 1$ *où* $2q_2 = k^2X^2 + 2lXY + 2mY^2$, $q_1 = l^2 - 2k^2m$ *et* $32 \nmid h(-d)$.

4.3. Cas $[K^* : K] = 4$

Dans ce cas $\prod_{p/D_K} e(p) = 2^4$, alors les formes possibles pour d sont :

1) $d = p_1p_2p_3$ où $p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv 1 \pmod 4$;

2) $d = 2p_1p_2$ où $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod 4$;
3) $d = 2pq$ où $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$;
4) $d = 2q_1q_2$ où $q_1 \equiv q_2 \equiv -1 \pmod 4$;
5) $d = pq_1q_2$ où $p \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod 4$;
6) $d = q_1q_2q_3$ où $q_1 \equiv q_2 \equiv q_3 \equiv -1 \pmod 4$;
7) $d = p_1p_2q$ où $p_1 \equiv p_2 \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$.

De la même façon que précédemment, on va étudier chaque cas.

(1) $\boldsymbol{d = p_1p_2p_3}$ où $\boldsymbol{p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv 1 \pmod 4}$. $d = p_1p_2p_3$ implique que $4/h(d)$ et $8/h(-d)$, alors $16/h$ donc ce cas est à rejeter.

(2) $\boldsymbol{d = 2p_1p_2}$ où $\boldsymbol{p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod 4}$. D'après [13], $C_2(d)$ et $C_2(-d)$ sont de type $(2, 2)$ si et seulement si au moins deux éléments de $\{(\frac{2}{p_1}), (\frac{2}{p_2}), (\frac{p_1}{p_2})\}$ valent -1. Dans ce cas le Corollaire 3.6 montre que $Q = 1$(la norme de l'unité fondamentale est égale à -1). On conclut alors que la 2-partie de h est égale à 8 si, et seulement si, au moins deux éléments de $\{(\frac{2}{p_1}), (\frac{2}{p_2}), (\frac{p_1}{p_2})\}$ valent -1.

(3) $\boldsymbol{d = 2pq}$ où $\boldsymbol{p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4}$. Dans ce cas on a $2/h(d)$ et $4/h(-d)$, alors $h_2 = 8$ si, et seulement si

$$\begin{cases} \quad\ \ h_2(-d) = 4h_2(d) = 8 & \text{et } Q = 1, \\ \text{ou} \ \ h_2(-d) = h_2(d) = 4 & \text{et } Q = 1, \\ \text{ou} \ \ h_2(-d) = 2h_2(d) = 4 & \text{et } Q = 2. \end{cases}$$

D'après [13, paragraphe 6 cas $D = 2pq$] et [13, paragraphe 11 cas 4] on a $h_2(d) = 2$ si, et seulement si, $p \equiv 5 \pmod 8$ ou $(\frac{p}{q}) = -1$, $4/h_2(d)$ si, et seulement si, $p \equiv 1 \pmod 8$ et $(\frac{p}{q}) = 1$ et $h_2(-d) = 4$ si, et seulement si, deux ou trois des $\{(\frac{2}{p}), (\frac{2}{q}), (\frac{p}{q})\}$ valent -1, alors le cas $h_2(-d) = h_2(d) = 4$ ne peut pas se produire ; et $h_2(-d) = 2h_2(d) = 4$ si, et seulement si, deux ou trois des $\{(\frac{2}{p}), (\frac{2}{q}), (\frac{p}{q})\}$ valent -1. Les résultats de [13, paragraphe 11 cas 4] montrent que $h_2(-d) = 8$ si, et seulement si, $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 8$, $(\frac{p}{q}) = -1$ et 16 ne divise pas $p + q$ ou $p \equiv 5 \pmod 8$, $q \equiv -1 \pmod 8$ et $(\frac{p}{q}) = -(\frac{-q}{2p})_4 = 1$. Mais d'après Corollaire 3.5 si $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 8$ et $(\frac{p}{q}) = -1$, alors $Q = 2$. Enfin, on remarque que si $Q = 2$, alors il existe x et y tel que $\pm 2 = x^2 - 2pqy^2$, donc $(\frac{2}{p}) = (\frac{\pm 2}{p}) = (\frac{x^2 - 2pqy^2}{p}) = (\frac{x^2}{p}) = 1$.

Conclusion 6. *La 2-partie de h est égale à 8 si, et seulement si, on se trouve dans l'une des situations suivantes :*

– $p \equiv 1 \pmod 8$, $q \equiv 3 \pmod 8$ *et* $(\frac{p}{q}) = -1$.

– $p \equiv 5 \pmod 8$, $q \equiv -1 \pmod 8$ *et* $(\frac{p}{q}) = -(\frac{-q}{2p})_4 = 1$.

(4) $d = 2q_1q_2$ où $q_1 \equiv q_2 \equiv -1 \pmod 4$ et $(\frac{q_1}{q_2}) = -(\frac{q_2}{q_1}) = 1$. Dans ce cas on a $2/h(d)$ et $4/h(-d)$, alors $h_2 = 8$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} \quad\; h_2(-d) = 4h_2(d) = 8 & \text{et } Q = 1, \\ \text{ou} \quad h_2(-d) = h_2(d) = 4 & \text{et } Q = 1, \\ \text{ou} \quad h_2(-d) = 2h_2(d) = 4 & \text{et } Q = 2. \end{cases}$$

D'après [13, paragraphe 10, cas $D = 2qq'$] et [13, paragraphe 11, cas 7] on a $h_2(d) = 2$ si, et seulement si, $(\frac{2}{q_1}) = -1$ ou $(\frac{2}{q_2}) = -1$; $4/h_2(d)$ si, et seulement si, $q_1 \equiv q_2 \equiv -1 \pmod 8$ et $h_2(-d) = 4$ si, et seulement si, $q_1 \equiv -1 \pmod 8$ et $q_2 \equiv 3 \pmod 8$, alors le cas $h_2(-d) = h_2(d) = 4$ ne peut pas se produire ; et $h_2(-d) = 2h_2(d) = 4$ si, et seulement si, $q_1 \equiv -1 \pmod 8$ et $q_2 \equiv 3 \pmod 8$. Mais cette dernière condition ne peut pas se produire avec $Q = 2$, en effet supposons que $Q = 2$, alors il existe deux entiers rationnels x et y tels que $\pm 2 = x^2 - dy^2$, ce qui entraîne $(\frac{\pm 2}{q_1}) = (\frac{\pm 2}{q_2}) = 1$, donc $(\frac{2}{q_1}) = (\frac{2}{q_2}) = \pm 1$; et ce qui n'est pas le cas. Les résultats de [13, paragraphe 11 cas 7] montrent que $h_2(-d) = 8$ si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est vérifiée :

– $q_1 \equiv q_2 \equiv 3 \pmod 8$ et $(\frac{2}{|X+lY|}) = -1$.

– $q_1 \equiv 3 \pmod 8$, $q_2 \equiv -1 \pmod 8$ et $(\frac{|k^2X+Y^2|}{q_2}) = -1$.

Où X, Y, k et l des entiers vérifient l'equation (4). Mais la première condition ne peut pas se produire avec $Q = 1$ (Corollaire 3.5) ; or, puisque $q_1q_2 \equiv 5 \pmod 8$, alors dans la deuxième condition on a $Q = 1$ (Corollaire 3.2).

Conclusion 7. *La 2-partie de h est égale à 8 si, et seulement si,* $q_1 \equiv 3 \pmod 8$, $q_2 \equiv -1 \pmod 8$ *et* $(\frac{|k^2X+Y^2|}{q_2}) = -1$ *où* $2q_2 = k^2X^2 + 2lXY + 2mY^2$ *et* $q_1 = l^2 - 2k^2m$.

(5) $d = pq_1q_2$ où $p \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod 4$ et $(\frac{q_1}{q_2}) = -(\frac{q_2}{q_1}) = 1$. On sait, d'après le résultat de Gauss que $2/h(d)$ et

$8/h(-d)$, alors $h_2 = 8$ si, et seulement si, $h_2(d) = 2$, $h_2(-d) = 8$ et $Q = 2$. En utilisant les mêmes techniques qui se trouve dans [13], on trouve la proposition suivante :

PROPOSITION 4.3. *Soient p, q_1 et q_2 trois nombres premiers tels que $p \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod 4$ et $(\frac{q_1}{q_2}) = -(\frac{q_2}{q_1}) = 1$, alors $C_2(-pq_1q_2)$ est de type $(2,2,2)$ si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

* $\left(\dfrac{p}{q_1}\right) . \left(\dfrac{p}{q_2}\right) = -1, \left(\dfrac{2}{p}\right) = 1, \left(\dfrac{2}{q_1}\right) = \left(\dfrac{2}{q_2}\right) = -1.$
* $\left(\dfrac{p}{q_1}\right) = \left(\dfrac{p}{q_2}\right) = -1, \left(\dfrac{2}{p}\right) = 1, \left(\dfrac{2}{q_1}\right) . \left(\dfrac{2}{q_2}\right) = -1.$
* $\left(\dfrac{p}{q_1}\right) . \left(\dfrac{p}{q_2}\right) = -1, \left(\dfrac{2}{p}\right) = 1, \left(\dfrac{2}{q_1}\right) = 1, \left(\dfrac{2}{q_2}\right) = -1.$
* $\left(\dfrac{p}{q_1}\right) = 1, \left(\dfrac{p}{q_2}\right) = -1, \left(\dfrac{2}{p}\right) = -1, \left(\dfrac{2}{q_1}\right) = \left(\dfrac{2}{q_2}\right) = 1.$
* $\left(\dfrac{p}{q_1}\right) = -1, \left(\dfrac{p}{q_2}\right) = 1, \left(\dfrac{2}{p}\right) = -1, \left(\dfrac{2}{q_1}\right) = \left(\dfrac{2}{q_2}\right) = -1.$
* $\left(\dfrac{p}{q_1}\right) = \left(\dfrac{p}{q_2}\right) = \left(\dfrac{2}{p}\right) = -1, \left(\dfrac{2}{q_1}\right) . \left(\dfrac{2}{q_2}\right) = -1.$
* $\left(\dfrac{p}{q_1}\right) = 1, \left(\dfrac{2}{q_2}\right) = -1, \left(\dfrac{2}{p}\right) = -1, \left(\dfrac{2}{q_1}\right) = -1, \left(\dfrac{2}{q_2}\right) = 1.$
* $\left(\dfrac{p}{q_1}\right) = -1, \left(\dfrac{p}{q_2}\right) = 1, \left(\dfrac{2}{p}\right) = -1, \left(\dfrac{2}{q_1}\right) = 1, \left(\dfrac{2}{q_2}\right) = -1.$

Preuve. Les caractères génériques sont $(\frac{m}{p})$, $(\frac{m}{q_1})$, $(\frac{m}{q_2})$ et $(\frac{-1}{m})$.

Posons $\varepsilon_1 = (\frac{p}{q_1}) = (\frac{q_1}{p})$, $\varepsilon_2 = (\frac{p}{q_2}) = (\frac{q_2}{p})$, $\varepsilon_3 = (\frac{2}{p})$, $\varepsilon_4 = (\frac{2}{q_1})$, $\varepsilon_5 = (\frac{2}{q_2})$. Les formes ambiguës simples sont équivalentes à :

$$f = [1, 0, pq_1q_2], g_1 = [p, 0, q_1q_2], g_2 = [q_1, 0, pq_2], g_3 = [q_2, 0, pq_1].$$

$$h = \left[2, 1, \frac{1 + pq_1q_2}{2}\right], k_1 = \left[2p, p, \frac{p + q_1q_2}{2}\right],$$
$$k_2 = \left[2q_1, q_1, \frac{q_1 + pq_2}{2}\right], k_3 = \left[2q_2, q_2, \frac{q_2 + pq_1}{2}\right].$$

Le tableau des caractères de ces formes est :

	f	g_1	g_2	g_3	k_1	k_2	k_3	h
$\left(\dfrac{m}{p}\right)$	1	$\varepsilon_1\varepsilon_2$	ε_1	ε_2	$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$	$\varepsilon_1\varepsilon_3$	$\varepsilon_3\varepsilon_2$	ε_3
$\left(\dfrac{m}{q_1}\right)$	1	ε_1	$-\varepsilon_1$	-1	$\varepsilon_4\varepsilon_1$	$-\varepsilon_4\varepsilon_1$	$-\varepsilon_4$	ε_4
$\left(\dfrac{m}{q_2}\right)$	1	ε_2	1	ε_2	$\varepsilon_2\varepsilon_5$	ε_5	$\varepsilon_2\varepsilon_5$	ε_5
$\left(\dfrac{-1}{m}\right)$	1	1	-1	-1	$\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5$	$-\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5$	$-\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5$	$\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5$

On sait, d'après le résultat de Gauss que $C_2(-d)$ est le produit de 3 groupes cycliques, alors $C_2(-d)$ est de type $(2,2,2)$ si, et seulement s'il n'y a pas de forme ambiguë simple autre que f dans le genre principal, c'est équivalent de dire que les formes autre que f prennent la valeur -1 au moins pour un caractère, alors $C_2(-pq_1q_2)$ est de type $(2,2,2)$ si, et seulement si, l'une des conditions de la proposition est vérifiée. $\square$

Si $d = pq_1q_2$ où $p \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod 4$ et $(\frac{q_1}{q_2}) = -(\frac{q_2}{q_1}) = 1$, on dit que d est de *type 1*, si p, q_1 et q_2 vérifient l'une des trois premières conditions de la Proposition 4.3 et de *type 2*, dans le cas où d vérifie l'une des cinq dernières conditions de la proposition 4.3.

D'après [13, paragraphe 9, cas $D = pqq'$] on a : $h_2(d) = 2$ si, et seulement si, $\varepsilon_1 = (\frac{p}{q_1}) = -1$ ou $\varepsilon_2 = (\frac{p}{q_2}) = -1$ et puisque $d \equiv 1 \pmod 4$, alors $Q = 1$ (Corollaire 3.2). On conclut facilement que $h_2 = 8$ si, et seulement si, p, q_1 et q_2 vérifient l'une des conditions de la Proposition 4.3.

(6) $d = q_1q_2q_3$ où $q_1 \equiv q_2 \equiv q_3 \equiv -1 \pmod 4$. On sait, d'après le résultat de Gauss que $4/h(d)$ et $4/h(-d)$, alors $h_2 = 8$ si, et seulement si, $h_2(d) = h_2(-d) = 4$ et $Q = 1$. La proposition suivante donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que $h_2(-d) = 4$.

Proposition 4.4 ([8, Théorème 1, p. 5 et 6]). *Soient q_1, q_2 et q_3 trois nombres premiers congrus à* 3 *modulo* 4, *alors $C_2(-q_1q_2q_3) = C(\geq 4) \cdot C(2)$ si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

* $\left(\dfrac{q_3}{q_1}\right) = \left(\dfrac{q_2}{q_1}\right) = -1.$
* $\left(\dfrac{q_2}{q_3}\right) = \left(\dfrac{q_2}{q_1}\right) = 1.$
* $\left(\dfrac{q_3}{q_1}\right) = -\left(\dfrac{q_2}{q_3}\right) = 1.$

De plus $C_2(-q_1q_2q_3)$ *est de type* $(2,2)$ *si, et seulement si* $\left(\dfrac{q_2}{q_3}\right) = \left(\dfrac{q_3}{q_1}\right) = \left(\dfrac{q_1}{q_2}\right)$.

Soit $r_4(m)$ le 4-rang du 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ où m est un entier naturel sans facteurs carrés. P. Damey and J. Payan ont montré dans [9] que

$$r_4(m) \leq r_4(-m) \leq r_4(m) + 1. \tag{5}$$

Si, $C_2(-q_1q_2q_3)$ est de type $(2,2)$, alors $r_4(-q_1q_2q_3) = 0$, par suite $r_4(q_1q_2q_3) = 0$; et comme le 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2q_3})$ est le produit de deux groupes cycliques, on peut voir qu'il est aussi de type $(2,2)$.

Finalement, si $d = q_1q_2q_3$ où $q_1 \equiv q_2 \equiv q_3 \equiv -1 \pmod 4$, alors $h_2 = 8$ si, et seulement si, $(\frac{q_2}{q_3}) = (\frac{q_3}{q_1}) = (\frac{q_1}{q_2})$ et $Q = 1$. La deuxième condition est nécessaire, car il existe des nombres premiers q_i vérifiant la première condition et $h_2 \geq 16$. Par exemple $d = 627 = 3 \cdot 11 \cdot 19$, on a $(\frac{11}{19}) = (\frac{19}{3}) = (\frac{3}{11}) = 1$ et $h_2 = 16$.

(7) $d = p_1p_2q$ où $p_1 \equiv p_2 \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$. On sait, d'après le résultat de Gauss que le 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et de $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ est le produit de deux groupes cycliques, ainsi $4/h(d)$ et $4/h(-d)$, alors $h_2 = 8$ si, et seulement si, $h_2(d) = h_2(-d) = 4$ et $Q = 1$. Or d'après [13, Cas 3, p. 351] nous avons que $C(-d) \simeq (2,2)$ si, et seulement si, deux ou trois des valeurs $\{(\frac{p_1}{p_2}), (\frac{p_1}{q}), (\frac{p_2}{q})\}$ valent -1. Dans cette situation on peut montrer que

$$Q = 1 \Leftrightarrow p_1 \text{ ou } p_2 \equiv 5 \pmod 8.$$

En effet, Soit $\varepsilon_d = x + y\sqrt{p_1p_2q}$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1p_2q})$. Rappelons que si d est un entier sans facteurs carrés et $\varepsilon = a + b\sqrt{d}$

l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ où a et b sont des entiers ou bien demi-entiers, alors si ε est de norme 1, $2(a\pm1)$ et $2d(a\pm1)$ ne sont pas des carrés dans $\mathbb{Q}$. (pour la preuve de cette remarque voir [3, lemme 5, p. 386]). Alors dans notre situation, nous prenons $d = p_1p_2q$ et $\varepsilon = \varepsilon_d$. Comme $q \equiv -1 \pmod 4$, alors $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ et $x^2 - p_1p_2qy^2 = 1$. D'où $(x+1)(x-1) = p_1p_2qy^2$. Du fait que $(x+1)-(x-1) = 2$, le plus grand commun diviseur de $x+1$ et $x-1$ est un diviseur de 2. Par suite il existe $(y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\begin{cases} x+1 = p_1^{i_1}p_2^{i_3}q^{j_1}2^iy_1^2, \\ x-1 = p_1^{i_2}p_2^{i_4}q^{j_2}2^iy_1^2, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} i \in \{0,1\}, i_1+i_2 = i_3+i_4 = j_1+j_2 = 1\,; \\ 2^iy_1y_2 = y, (i_1+i_3+j_1, i_2+i_4+j_2) \in \{1,2\}^2, \quad \text{si } i = 1. \end{cases}$$

Supposons que $Q = 1$, alors $x+1$ et $x-1$ ne sont pas des carrés dans $\mathbb{N}$ (voir [2]), ceci est équivalent à

$$i_1 + i_3 + j_1 + i \neq 0 \text{ et } i_2 + i_4 + j_2 + i \neq 0.$$

Dans notre situation, on a $i = 0$, car si nous prenons, par exemple le cas où

$$\begin{cases} x+1 = 2p_1y_1^2, \\ x-1 = 2p_2qy_1^2, \end{cases}$$

nous trouvons facilement que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{p_1}\right) &= \left(\frac{(x-1)/2-(x+1)/2}{p_1}\right) = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)\left(\frac{q}{p_1}\right) = 1; \\ \left(\frac{1}{p_2}\right) &= \left(\frac{(x-1)/2-(x+1)/2}{p_2}\right) = \left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 1. \end{aligned}$$

Ceci est évidemment contradictoire avec le fait que deux ou trois des valeurs $\{(\frac{p_1}{p_2}), (\frac{p_1}{q}), (\frac{p_2}{q})\}$ valent -1. Les autres cas nous donnent la même contradiction, c'est-à-dire que nous avons toujours $i = 0$. Prenons, par exemple, le cas où

$$\begin{cases} x+1 = p_1p_2y_1^2, \\ x-1 = qy_1^2, \end{cases}$$

Nous trouvons de la même façon que précédemment que

$$\left(\frac{2}{p_1}\right)=\left(\frac{(x-1)-(x+1)}{p_1}\right)=\left(\frac{q}{p_1}\right);$$
$$\left(\frac{2}{p_2}\right)=\left(\frac{(x-1)-(x+1)}{p_2}\right)=\left(\frac{q}{p_2}\right).$$

Comme deux ou trois des valeurs $\{(\frac{p_1}{p_2}),\ (\frac{p_1}{q}),\ (\frac{p_2}{q})\}$ valent -1, alors p_1 ou $p_2 \equiv 5 \pmod 8$. Les autres cas nous donnent le même résultat.

Inversement, si p_1 ou $p_2 \equiv 5 \pmod 8$, alors le Corollaire 3.2 entraîne que $Q=1$.

Si, $C_2(-p_1p_2q)$ est de type $(2,2)$, alors $r_4(-p_1p_2q)=0$, par suite l'inégalité (5) prouve que $r_4(p_1p_2q)=0$; et comme le 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1p_2q})$ est le produit de deux groupes cycliques, on peut voir qu'il est aussi de type $(2,2)$.

Finalement, si $d=p_1p_2q$ où $p_1\equiv p_2\equiv -q_3\equiv 1 \pmod 4$, alors $h_2=8$ si, et seulement si, p_1 ou $p_2\equiv 5 \pmod 8$ et si deux ou trois des valeurs $\{(\frac{p_1}{p_2}),\ (\frac{p_1}{q}),\ (\frac{p_2}{q})\}$ valent -1.

Théorème 4.5. *Soient d un entier naturel sans facteurs carrés, $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d},\ \sqrt{-1})$, h le nombre de classes de K et K^* le corps de genres de K. Alors la 2-partie de h est égale à 8 et $[K^*:K]=4$ si, et seulement si, d vérifie l'une des conditions suivantes :*

a) *$d=2p_1p_2$ où $p_1\equiv p_2\equiv 1 \pmod 4$ et au moins deux éléments de $\{(\frac{2}{p_1}),(\frac{2}{p_2}),(\frac{p_1}{p_2})\}$ valent -1.*

b) *$d=2pq$ où $p\equiv -q\equiv 1 \pmod 4$ et l'une des conditions suivante est vérifie :*
   - *$p\equiv 1 \pmod 8$, $q\equiv 3 \pmod 8$ et $(\frac{p}{q})=-1$.*
   - *$p\equiv 5 \pmod 8$, $q\equiv -1 \pmod 8$ et $(\frac{p}{q})=-(\frac{-q}{2p})_4=1$.*

c) *$d=2q_1q_2$ où $q_1\equiv 3 \pmod 8$, $q_2\equiv -1 \pmod 8$, $(\frac{q_1}{q_2})=-(\frac{q_2}{q_1})=1$, $(\frac{|k^2X+Y^2|}{q_2})=-1$, $2q_2=k^2X^2+2lXY+2mY^2$ et $q_1=l^2-2k^2m$.*

d) *$d=pq_1q_2$ où $(\frac{q_1}{q_2})=-(\frac{q_2}{q_1})=1$, $p\equiv -q_1\equiv -q_2\equiv 1 \pmod 4$, et p, q_1 et q_2 vérifient l'une des conditions de la Proposition 3.1.*

e) *$d=q_1q_2q_3$ où $q_1\equiv q_2\equiv q_3\equiv -1 \pmod 4$, $\left(\frac{q_2}{q_3}\right)=\left(\frac{q_3}{q_1}\right)=\left(\frac{q_1}{q_2}\right)$ et $Q=1$.*

f) *$d = p_1p_2q$ où p_1 ou $p_2 \equiv 5 \pmod 8$, $q \equiv 3 \pmod 4$ et deux ou trois des valeurs $\{(\frac{p_1}{p_2}), (\frac{p_1}{q}), (\frac{p_2}{q})\}$ valent -1.*

4.4. Cas $K^* = K$

Dans ce cas $h_2 = 8$ si, et seulement si, $d = p$ où p un nombre premier congru à 1 modulo 8 de la forme $p = x^2 + 32y^2$ et $h_2(-p) = 16$. Pour plus de détails on peut voir [1, p. 84].

5. Structure du 2-groupe de classes de K dont le nombres de classes est 8

Lemme 5.1 ([18]). *Le rang du 2-groupe de classes de K est :*

$$\begin{cases} s + s_0 & \text{Si } d \text{ est pair et } p \equiv 1 \pmod 8 \text{ pour tout } p \in S_0. \\ s + s_0 - 1 & \text{Si } d \text{ est pair et il existe } p \in S_0 \text{ tel que } p \equiv 5 \pmod 8 \\ & \text{ou } d \text{ est impair et } p \equiv 1 \pmod 8 \text{ pour tout } p \in S_0. \\ s + s_0 - 2 & \text{Si } d \text{ est impair et il existe } p \in S_0 \text{ tel que } p \equiv 5 \bmod 8. \end{cases}$$

1. *$s = |S|$ et S est l'ensemble des premiers impairs ramifiés dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$;*
2. *$s_0 = |S_0|$ où S_0 est le sous-ensemble de S contenant tous les premiers congrues à 1 modulo 4.*

Théorème 5.2. *Soit d un entier naturel sans facteurs carrés, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-1})$. Alors C_2 est de type $(2, 4)$ si, et seulement si, d vérifie l'une des conditions suivantes :*

(a) *$d = p_1p_2$ où $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod 4$ et l'une des conditions suivantes est vérifiée :*
   (i) *$p_1 \equiv 1$, $p_2 \equiv 5 \pmod 8$, $(\frac{p_1}{p_2}) = 1$ et $(\frac{p_1}{p_2})_4 = -(\frac{p_2}{p_1})_4 = 1$.*
   (ii) *$p_1 \equiv p_2 \equiv 5 \pmod 8$, $(\frac{p_1}{p_2}) = -1$ et $(\frac{p_1p_2}{2})_4(\frac{2p_1}{p_2})_4(\frac{2p_2}{p_1})_4 = -1$.*

(b) *$d = 2p$ où $p \equiv 1 \pmod 8$ et p vérifie l'une des conditions suivantes :*

i) $(\frac{2}{p})_4 = (\frac{p}{2})_4 = -1$.

ii) $(\frac{2}{p})_4 = -(\frac{p}{2})_4 = -1$.

(c) *$d = pq$ où $p \equiv 1 \pmod 8$, $(\frac{p}{q}) = -(\frac{q}{p})_4 = 1$ et $Q = 1$.*

(d) *$d = 2pq$ où $p \equiv 5 \pmod 8$, $q \equiv -1 \pmod 8$ et $(\frac{p}{q}) = -(\frac{-q}{2p})_4 = 1$.*

(e) *$d = pq_1q_2$ où $(\frac{q_1}{q_2}) = -(\frac{q_2}{q_1}) = 1$, $p \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod 4$ et d est de type 2.*

(f) *$d = q_1q_2q_3$ où $q_1 \equiv q_2 \equiv q_3 \equiv -1 \pmod 4$, $(\frac{q_2}{q_3}) = (\frac{q_3}{q_1}) = (\frac{q_1}{q_2})$ et $Q = 1$.*

(g) *$d = 2q_1q_2$ où $q_1 \equiv 3 \pmod 8$, $q_2 \equiv -1 \pmod 8$, $(\frac{q_1}{q_2}) = -(\frac{q_2}{q_1}) = 1$, $(\frac{|k^2X+Y^2|}{q_2}) = -1$, $2q_2 = k^2X^2 + 2lXY + 2mY^2$ et $q_1 = l^2 - 2k^2m$.*

Preuve. Puisque C_2 est de type $(2, 4)$, alors $h_2 = 8$, donc d peut prendre les formes du Théorème 4.2 ou 4.5 avec des conditions sur chaque forme. Si on a les formes $2q$, q_1q_2 alors C_2 est cyclique, par exemple pour $d = 2q$ et d'après le lemme précédent le rang de C_2 est égal à $s + s_0$ où $s = 1$ et $s_0 = 0$, il reste les autres formes :

a) $d = p_1p_2$ où $p_1 \equiv p_2 \equiv 5 \pmod 8$ ou $p_1 \equiv p_2 \equiv 5 \pmod 8$, alors $s = s_0 = 2$ et le rang de C_2 est égal à $s + s_0 - 2 = 2$, donc C_2 est de type $(2, 4)$.

b) $d = 2p$ où $p \equiv 1 \pmod 8$, alors $s = s_0 = 1$ et le rang de C_2 est égal à $s + s_0 = 2$, donc C_2 est de type $(2, 4)$.

c) $d = pq$ où $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$, alors $s = 2$, $s_0 = 1$ et $s + s_0 = 3$, donc C_2 est de type $(2, 4)$ si, et seulement si, $p \equiv 1 \pmod 8$.

d) Puisque $p \equiv 5 \pmod 8$, alors $s = 2$, $s_0 = 1$ et le rang de C_2 est $s + s_0 - 1 = 2$, donc C_2 est de type $(2, 4)$.

e) $d = pq_1q_2$ où $(\frac{q_1}{q_2}) = -(\frac{q_2}{q_1}) = 1$ et $p \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod 4$, et d est de type 2, alors $s = 3$, $s_0 = 1$ et le rang de C_2 est égal à $s + s_0 - 2 = 2$, donc C_2 est de type $(2, 4)$.

f) et g) Puisque $q_1 \equiv q_2 \equiv q_3 \equiv -1 \pmod 4$, alors $s = 3$, $s_0 = 0$ et le rang de C_2 est égal à $s + s_0 - 1 = 2$, donc C_2 est de type $(2, 4)$.

□

De la même façon on a le théorème suivant.

THÉORÈME 5.3. *Soit d un entier naturel sans facteurs carrés, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-1})$. Alors C_2 est de type $(2,2,2)$ si, et seulement si, d vérifie l'une des conditions suivantes :*

a) *$d = p_1p_2$ où $(\frac{p_1}{p_2}) = -1$, $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod 8$ et $(\frac{2}{a+b}) = -1$ avec $p_1p_2 = a^2 + b^2$.*

b) *$d = 2p_1p_2$ où $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod 4$ et au moins deux éléments de $\{(\frac{2}{p_1}), (\frac{2}{p_2}), (\frac{p_1}{p_2})\}$ valent -1.*

c) *$d = 2pq$ où $p \equiv 1 \pmod 8$, $q \equiv 3 \pmod 8$ et $(\frac{p}{q}) = -1$.*

d) *$d = pq_1q_2$ où $(\frac{q_1}{q_2}) = -(\frac{q_2}{q_1}) = 1$, $p \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod 4$ et d est de type 1.*

e) *$d = p_1p_2q$ où p_1 ou $p_2 \equiv 5 \pmod 8$, $q \equiv 3 \pmod 4$ et deux ou trois des valeurs $\{(\frac{p_1}{p_2}), (\frac{p_1}{q}), (\frac{p_2}{q})\}$ valent -1.*

6. Exemples numériques

À l'aide du programme *GP/PARI* ([6]), on va donner des entiers sans facteurs carrés tels que le 2-groupe de classes de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-1})$ est de type $(2,4)$ ou $(2,2,2)$.

d	Forme	Conditions	$[K^* : K]$	C_2
$3005 = 5 \cdot 601$	p_1p_2	théorème 5.2 ai	2	$(2,4)$
$2977 = 13 \cdot 229$	p_1p_2	théorème 5.2 aii	2	$(2,4)$
$2258 = 2 \cdot 1129$	$2p$	théorème 5.2 bi	2	$(2,4)$
$2594 = 2 \cdot 1297$	$2p$	théorème 5.2 bii	2	$(2,4)$
$2359 = 337 \cdot 7$	pq	théorème 5.2 c	2	$(2,4)$
$2758 = 2 \cdot 197 \cdot 7$	$2pq$	théorème 5.2 d	4	$(2,4)$
$2905 = 5 \cdot 7 \cdot 783$	pq_1q_2	théorème 5.2 e	4	$(2,4)$
$9051 = 3 \cdot 7 \cdot 431$	$q_1q_2q_3$	théorème 5.2 f	4	$(2,4)$
$2874 = 2 \cdot 3 \cdot 479$	$2q_1q_2$	théorème 5.2 g	4	$(2,4)$
$1921 = 17 \cdot 113$	p_1p_2	théorème 5.3 a	2	$(2,2,2)$
$1570 = 2 \cdot 5 \cdot 157$	$2p_1p_2$	théorème 5.3 b	4	$(2,2,2)$
$1398 = 2 \cdot 233 \cdot 3$	$2pq$	théorème 5.3 c	4	$(2,2,2)$
$2937 = 89 \cdot 3 \cdot 11$	pq_1q_2	théorème 5.3 d	4	$(2,2,2)$
$13215 = 5 \cdot 881 \cdot 3$	p_1p_2q	théorème 5.3 e	4	$(2,2,2)$

Remerciements. Nous remercions vivement le rapporteur de notre article pour ses précieuses remarques.

Références

[1] A. Azizi, *Sur le 2-groupe de classes d'idéaux de $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$*, Rend. Circ. Mat. Palermo **48 (2)** (1999), 71–92.

[2] A. Azizi, *Unités de certains corps de nombres imaginaires et abéliens sur $\mathbb{Q}$*, Ann. Sci. Math. Québec **23** (1999), 87–93.

[3] A. Azizi, *Sur la capitulation des 2-classes d'idéaux de $\Bbbk = \mathbb{Q}(\sqrt{2pq}, i)$*, Acta Arith. **94** (2000), 383–399.

[4] A. Azizi and I. Benhamza, *Sur la capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2})$*, Ann. Sci. Math. Québec **29** (2005), no. 1, 1–20.

[5] P. Barruccand and H. Cohn, *Note on primes of type $x^2 + 32y^2$, class number, and residuacity*, J. Reine Angew. Math. **238** (1969), 67–70.

[6] C. Batut, K. Belabas, D. Bernadi, H. Cohen, and M. Olivier, *GP/PARI calculator*, version. **2.2.6** (2003).

[7] E. Benjamin, *Lower bounds on the 2-class number of the 2-Hilbert class of imaginary quadratic number fields with elementary 2-class group of rank 3*, Houston J. of Math. **22 (1)** (1996), 11–37.

[8] Ezra A. Brown and C. J. Parry, *Class numbers of imaginary quadratic fields having exactly three discriminantal divisors*, J. Reine Angew. Math. **260** (1973), 31–34.

[9] P. Damey and J. Payan, *Existence et construction des extensions galoisiennes et non-abéliennes de degré 8 d'un corps de caractéristique différente de 2*, J. Reine Angew. Math. **244** (1970), 37–54.

[10] K. Hardy and K. S. Williams, *Congruences modulo 16 for the class numbers of complex quadratic fields*, J. Number Theory **27** (1987), 178–195.

[11] H. Hasse, *Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper*, Akademie-Verlag, Germany (1952).

[12] P. Kaplan, *Divisibilité par 8 du nombre de classes des corps quadratiques dont le 2-groupe des classes est cyclique et réciprocité biquadratiques*, J. Math. Soc. Japan. **25** (1973), no. 4, 506–608.

[13] P. Kaplan, *Sur le 2-groupe des classes d'idéaux des corps quadratiques*, J. reine angew. Math. **283/284** (1976), 313–363.

[14] T. Kubota, *Über die Beziehung der Klassenzahlen der Unterkorper des Bizyklischen Zahlkörpers*, Nagoya Math. J. **6** (1953), 119–127.

[15] S. Kuroda, *Über den Dirichletschen Zalhkörper*, Sci. Imp. Univ. Tokyo. **V** (1943), 383–406.

[16] P.A. Leonard and K.S. Williams, *On the divisibility of the class numbers of* $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ *and* $\mathbb{Q}(\sqrt{-2p})$ *by* 16, Can. Math. Bull. **25** (1982), 200–206.

[17] P.A. Leonard and K.S. Williams, *On the divisibility of the class number of* $\mathbb{Q}(\sqrt{-pq})$ *by* 16, Proc. Edinburgh Math. Soc. **26** (1983), 221–231.

[18] T.M. McCall, C.J. Parry, and R.R. Ranalli, *On imaginary bicyclic biquadratic fields with cyclic* 2*-class group*, J. Number Theory **53** (1995), 88–99.

[19] T.M. McCall, C.J. Parry, and R.R. Ranalli, *The* 2*-rank of the class group of imaginary bicyclic biquadratic fields*, Can. J. Math. **49** **(2)** (1997), 283–300.

[20] A. Scholz, *Über die Löbarkeit der Gleichung* $t^2 - du^2 = -4$, Math. Z. **39** (1934), 95–111.

[21] H. Taya and N. Terai, *Determination of certain real quadratic fields with class number two*, Proc. Japan. Acad. **67** (1991), 139–144.

[22] H. Wada, *On the class number and the unit group of certain algebraic number fields*, J. Fac. Univ. Tokyo. **13** (1966), 201–209.

Authors' addresses:

Abdelmalek Azizi
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Mohammed 1, Oujda, Maroc
E-mail: abdelmalekazizi@yahoo.fr

Mohammed Taous
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Mohammed 1, Oujda, Maroc
E-mail: taousm@hotmail.com

Received October 19, 2007
Revised November 26, 2008