Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste
Vol. XL, 65–91 (2009)

Sur le potentiel de pression-gravitation pour le mouvement d'un gaz à transformation adiabatique

R. Benabidallah, L. Taleb and H. Fujita Yashima

Abstract. *We consider the equation system of motion of a gas with adiabatic transformation, for which we define the functional for the potential energy due to gravitation and pression, and we prove that the distribution of density and temperature of the rest state minimizes this functional. The technical difficulty for this proof resides in the fact that the class of admissible functions for this functional is not convex.*

Keywords: Equilibrium State, Gas, Adiabatic Transformations
MS Classification 2000: 35A15

1. Introduction

Comme il est bien connu, dans la physique de l'atmosphère et la météorologie l'état hydrostatique joue le rôle fondamental pour le problème de stabilité et instabilité de l'atmosphère (voir par exemple [9]). Or, la question de la stabilité de la distribution de la densité et de la température dans la structure de l'équation d'un gaz n'est, nous semble-t-il, pas encore bien élucidée. Dans ce qui suit on va essayer de jeter une lumière sur la question, en examinant pour un gaz à transformation adiabatique la fonctionnelle correspondante à l'énergie potentielle due à la gravitation et à la pression.

Si nous supposons que la pression est déterminée uniquement par la relation $p = h\varrho^\gamma$ (ϱ : densité, γ : exposant de l'adiabatique, h : constante), le mouvement d'un gaz supposé visqueux sera décrit par le système d'équations connu comme équations d'un gaz visqueux barotropique ou équations de Navier-Stokes compressibles (voir par exemple [10, 6, 5]). Pour ce système d'équations dans un domaine Ω la fonctionnelle

$$\Psi_b(\varrho) = \int_\Omega \left[\frac{h}{\gamma - 1} \varrho^\gamma + \varrho \Phi \right] dx$$

(Φ : potentiel gravitationnel) joue le rôle de l'énergie potentielle due à la gravitation et à la pression. En effet, si v est le vecteur vitesse et (v, ϱ) est solution du système d'équations en question, l'énergie totale est donnée par

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \varrho |v|^2 dx + \Psi_b(\varrho)$$

et vérifie l'égalité de l'énergie

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_\Omega \varrho |v|^2 dx + \Psi_b(\varrho) \right] + \int_\Omega \left[\mu \sum_{j,k=1}^{3} \left| \partial_{x_j} v_k \right|^2 + \lambda (\nabla \cdot v)^2 \right] dx = 0,$$

où μ et λ sont les coefficients de viscosité. Il n'est pas difficile de constater que, étant donnée la masse totale du gaz, la distribution de densité au repos

$$\varrho_r(x) = (C - \Phi)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma - 1}{h\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

(C : constante) réalise le minimum de la fonctionnelle $\Psi_b(\varrho)$. La fonctionnelle $\Psi_b(\varrho)$, ou son équivalent commode

$$\int_\Omega \left[h \left(\frac{1}{\gamma - 1} (\varrho^\gamma - \varrho) - \varrho + 1 \right) + \varrho \Phi \right] dx$$

obtenu en lui adjoignant une constante, est un instrument utile pour l'étude de la stabilité de l'état d'équilibre (voir par exemple [11, 7, 8, 1]).

Dans le présent travail, au lieu des équations d'un gaz visqueux barotropique, on considère, pour la vitesse $v = (v_1, v_2, v_3)$, la densité

ϱ et la température T d'un gaz, le système d'équations

$$\begin{aligned} \varrho\frac{\partial}{\partial t}v + \varrho(v\cdot\nabla)v - \mu\Delta v - \lambda\nabla(\nabla\cdot v) &= -R\nabla(\varrho T) - \varrho\nabla\Phi, && (1)\\ \frac{\partial}{\partial t}\varrho + \nabla\cdot(\varrho v) &= 0, && (2)\\ C_V\varrho\left[\frac{\partial}{\partial t}T + v\cdot\nabla T\right] + R\varrho T\,\nabla\cdot v &= 0, && (3)\end{aligned}$$

qui résulte du système complet d'équations du mouvement d'un gaz visqueux (voir par exemple [4]), en négligeant la diffusion de la chaleur et l'augmentation de la température due à la friction interne du gaz. Dans le système d'équations (1)–(3), C_V est la capacité calorifique à volume constant, tandis que R est la constante universelle du gaz, la pression étant supposée donnée par $p = R\varrho T$ comme dans le gaz idéal. Les coefficients de viscosité μ et λ, comme requis par le principe de la thermodynamique, doivent vérifier la relation

$$\mu \geq 0, \qquad \lambda \geq \frac{1}{3}\mu; \tag{4}$$

on n'exclut pas le cas où $\mu = 0$ et $\lambda = 0$. En ce qui concerne l'exposant de l'adiabatique γ, nous rappelons que l'on a

$$\gamma = \frac{C_V + R}{C_V}. \tag{5}$$

Pour la construction de ce système d'équations (1)–(3) et les relations de la transformation adiabatique, on peut consulter [4, 3].

Dans la suite, nous allons examiner en particulier les relations entre le système d'équations (1)–(3) dans un domaine borné Ω, où Φ est bornée, et la fonctionnelle

$$\tilde{\Psi}(\varrho, T) = \int_\Omega [C_V\varrho T + \varrho\Phi]dx. \tag{6}$$

En effet nous allons considérer la fonctionnelle $\tilde{\Psi}(\varrho, T)$ dans une classe

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_{m(\cdot)} = && (7)\\ &\quad= \left\{(\varrho, T) \in (Mes_+(\Omega))^2 \middle| \int_{\{T^{\frac{1}{\gamma}}\varrho^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}\leq\alpha\}} \varrho(x)dx = m(\alpha)\ \forall\alpha \geq 0\right\}, \end{aligned}$$

où $m(\alpha)$ est une fonction non-négative, non-décroissante et bornée, tandis que

$$Mes_+(\Omega) = \{\, f : \Omega \to \mathbf{R},\ \text{mesurable} \,|\, f(x) > 0\ \forall x \in \Omega \,\}. \tag{8}$$

Comme on le verra (voir le lemme 2.4), $\mathcal{D}_{m(\cdot)}$ est invariante par rapport aux équations (2), (3), (13).

On verra que la fonctionnelle $\tilde{\Psi}(\varrho, T)$ joue le rôle de l'énergie potentielle due à la gravitation et à la pression, d'une manière analogue à la fonctionnelle $\Psi_b(\varrho)$ pour le mouvement d'un gaz visqueux barotropique ; la minimisation de $\tilde{\Psi}(\varrho, T)$ par l'état de repos $(\bar{\varrho}_r, \bar{T}_r)$ donnera de bonnes informations pour la stabilité de la solution du système d'équations. Toutefois, à la différence du cas du gaz visqueux barotropique, la classe $\mathcal{D}_{m(\cdot)}$ de couples de fonctions admissibles (ϱ, T) pour $\tilde{\Psi}(\varrho, T)$ n'est pas convexe, ce qui exige un raisonnement assez élaboré pour démontrer que l'état de repos réalise le minimum de la fonctionnelle $\tilde{\Psi}(\varrho, T)$ dans cette classe.

Les auteurs tiennent à remercier le referee de ses nombreuses remarques, qui leur ont permis de bien améliorer le présent texte.

2. Propriétés élémentaires du système d'équations

Dans ce paragraphe nous nous rappelons des propriétés élémentaires du système d'équations (1)–(3). Même si elles sont des faits bien connus ou résultent immédiatement du système d'équations, elles sont importantes pour le raisonnement qui suivra.

Remarquons d'abord que le fait que l'équation (3) représente la transformation adiabatique se traduit par l'invariance du rapport

$$\eta(t, x) = \frac{T(t, x)^{\frac{1}{\gamma}}}{\varrho(t, x)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \tag{9}$$

le long de chaque trajectoire. Plus précisément, on a le lemme suivant.

Lemme 2.1. *Si v, ϱ et T vérifient les équations* (2) *et* (3) *dans un* *domaine* $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ *pour* $t_0 \leq t \leq t_1$ *et si la trajectoire*

$$\{ x \in \mathbf{R}^3 \,|\, x = x(t, x_0),\ t_0 \leq t \leq t_1 \},$$
$$x(t, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t', x(t', x_0))dt',$$

reste dans le domaine Ω*, alors on a*

$$\eta(t, x(t, x_0)) = \eta(t_0, x_0) \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{10}$$

Démonstration. En effet, en écrivant (2) dans la forme

$$\varrho \nabla \cdot v = -\frac{\partial \varrho}{\partial t} - v \cdot \nabla \varrho$$

et en substituant cette expression dans (3), on a

$$C_V \varrho \left[\frac{\partial}{\partial t} T + v \cdot \nabla T \right] - RT \left[\frac{\partial \varrho}{\partial t} + v \cdot \nabla \varrho \right] = 0,$$

ou

$$C_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \log T + v \cdot \nabla \log T \right] - R \left[\frac{\partial}{\partial t} \log \varrho + v \cdot \nabla \log \varrho \right] = 0.$$

Comme $\frac{C_V}{R} = \frac{1}{\gamma - 1}$ (voir (5)), il s'ensuit que

$$\frac{\partial}{\partial t} \log \frac{T^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\varrho} + v \cdot \nabla \log \frac{T^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\varrho} = 0,$$

ou, en désignant par $\frac{d}{dt}$ la dérivée totale,

$$\frac{d}{dt} \log \frac{T^{\frac{1}{\gamma}}}{\varrho^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = 0, \tag{11}$$

d'où résulte (10). □

L'invariance de $\eta(t, x)$ le long de chaque trajectoire, jointe à la conservation de la masse, implique la conservation globale de la quantité $\varrho\eta$. Or, pour s'en assurer, il faut préciser les conditions aux limites pour le vecteur vitesse v.

Nous supposons en effet pour le domaine Ω la condition suivante :

$$\begin{array}{l}\Omega \text{ est un ouvert borné de } \mathbf{R}^3 \text{ muni} \\ \text{de la frontière } \partial\Omega \text{ de classe } C^{0,1}.\end{array} \tag{12}$$

L'appartenance de $\partial\Omega$ à la classe $C^{0,1}$ veut dire qu'elle peut être représentée localement par une fonction lipschitzienne. Dans la suite nous supposons toujours que la condition (12) est vérifiée. Comme condition aux limites, nous supposons en général que

$$v \cdot n = 0 \qquad \text{sur} \;\; \partial\Omega, \tag{13}$$

où n désigne la normale extérieure à la frontière $\partial\Omega$. Mais, si $\mu > 0$, alors pour obtenir l'égalité de l'énergie, qu'on verra dans le paragraphe 3, nous supposons que

$$v = 0 \qquad \text{sur} \;\; \partial\Omega. \tag{14}$$

Comme on pourra le constater facilement, toutes les affirmations que nous allons exposer demeureront valides même si le domaine Ω, au lieu d'être borné, est périodique dans une ou deux ou trois directions de l'espace $\mathbf{R}^3$ et de manière correspondante toutes les fonctions qui interviennent dans les équations sont périodiques et si sur la frontière $\partial\Omega$ la condition (13) (si $\mu = 0$) ou (14) (si $\mu > 0$) est vérifiée. Mais pour la simplicité de l'exposition, dans la suite nous traiterons seulement le cas où le domaine Ω vérifie la condition (12).

Rappelons d'abord la conservation de la masse totale, que nous désignons par M.

Lemme 2.2. *Si v et ϱ vérifient l'équation* (2) *dans Ω et la condition* (13) *sur $\partial\Omega$ pour $t_0 \le t \le t_1$, alors on a*

$$M = \int_\Omega \varrho(t,x)dx = \int_\Omega \varrho(t_0,x)dx \qquad \forall t \in [t_0,t_1]. \tag{15}$$

Démonstration. Il résulte immédiatement de (2) et de (13). □

Lemme 2.3. *On pose*

$$q(t,x) = (\varrho(t,x)T(t,x))^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{16}$$

Si v, ϱ et T vérifient les équations (2) *et* (3) *dans Ω et la condition* (13) *sur $\partial\Omega$ pour $t_0 \leq t \leq t_1$, alors on a*

$$\int_\Omega q(t,x)dx = \int_\Omega q(t_0,x)dx \qquad \forall t \in [t_0,t_1]. \tag{17}$$

Démonstration. Comme $\varrho = \frac{q}{\eta}$ (voir (9) et (16)), de (2) il résulte

$$\eta \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{q}{\eta}\right) + \eta\nabla \cdot \left(\frac{q}{\eta}v\right) = 0.$$

D'autre part, de (11) (et de (9)) on déduit que

$$\frac{q}{\eta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\eta + v \cdot \nabla\eta\right) = 0.$$

En adjoignant ces deux égalités, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}q + \nabla \cdot (qv) = 0.$$

En intégrant cette équation sur Ω et en tenant compte de (13), on obtient (17). □

Citons une autre conséquence immédiate du lemme 2.1.

Lemme 2.4. *On pose*

$$H_\alpha(t) = \{\, x \in \Omega \,|\, \eta(t,x) < \alpha \,\}, \qquad 0 \leq \alpha < \infty. \tag{18}$$

Sous les mêmes hypothèses du lemme 2.3, quelque soit $\alpha \in [0,\infty[$, on a

$$\int_{H_\alpha(t)} \varrho(t,x)dx = \int_{H_\alpha(t_0)} \varrho(t_0,x)dx \qquad \forall t \in [t_0,t_1]. \tag{19}$$

Démonstration. Comme (13) implique que la trajectoire $x = x(t,x_0)$ qui part de $x_0 \in \Omega$ ne sort pas de Ω, le lemme 2.4 résulte immédiatement du lemme 2.1. □

Le lemme 2.4 signifie que la classe $\mathcal{D}_{m(\cdot)}$ introduite dans (7) est invariante par rapport aux équations (2)–(3), (13), en prouvant la relation

$$m(\alpha) = \int_{H_\alpha(t)} \varrho(t,x)dx. \tag{20}$$

3. Egalité de l'énergie

Maintenant nous allons démontrer l'égalité dite de l'énérgie pour le système d'équations (1)–(3). Dans cette égalité on voit clairement le rôle joué par la fonctionnelle $\tilde{\Psi}(\varrho, T)$.

LEMME 3.1. *Si* (v, ϱ, T) *est solution du système d'équations* (1)–(3) *avec la condition* (13), *alors on a*

$$C_V \frac{d}{dt} \int_\Omega \varrho T dx = R \int_\Omega v \cdot \nabla(\varrho T) dx. \tag{21}$$

Démonstration. Grâce à (2) et (5) l'équation (3) peut être écrite dans la forme

$$C_V \frac{\partial}{\partial t}(\varrho T) + (R + C_V)(\varrho T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \nabla \cdot ((\varrho T)^{\frac{1}{\gamma}} v) = 0.$$

On a donc, compte tenu de (13),

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \left[C_V \frac{\partial}{\partial t}(\varrho T) + (R + C_V)(\varrho T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \nabla \cdot ((\varrho T)^{\frac{1}{\gamma}} v) \right] dx \\ &= C_V \frac{d}{dt} \int_\Omega \varrho T dx - (R + C_V) \int_\Omega \frac{\gamma - 1}{\gamma} v \cdot \nabla(\varrho T)\big) dx. \end{aligned}$$

Or, comme on a $\frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{R}{R+C_V}$, on obtient (21). □

PROPOSITION 3.1. *Si* (v, ϱ, T) *est solution du système d'équations* (1)–(3) *avec la condition* (13) *(si* $\mu = 0$*) ou la condition* (14) *(si* $\mu > 0$*), alors on a*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \|\sqrt{\varrho} v\|_{L^2}^2 + \tilde{\Psi}(\varrho, T) \right) + F_{\mu,\lambda}(v) = 0, \tag{22}$$

où $\tilde{\Psi}(\varrho, T)$ *est la fonctionnelle définie dans* (6), *tandis que*

$$F_{\mu,\lambda}(v) = \int_\Omega \left[\mu \sum_{j,k=1}^{3} |\partial_{x_j} v_k|^2 + \lambda (\nabla \cdot v)^2 \right] dx. \tag{23}$$

Démonstration. On rappelle que, si v satisfait à (14) ou bien $\mu = 0$ et v satisfait à (13), alors on a

$$\int_\Omega (-\mu\Delta v - \lambda\nabla(\nabla\cdot v))\cdot v dx = F_{\mu,\lambda}(v). \tag{24}$$

Donc, si on multiplie l'équation (1) par v et on l'intègre sur Ω, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varrho\partial_t v\cdot v dx + \int_\Omega \varrho v\cdot[(v\cdot\nabla)v]dx + F_{\mu,\lambda}(v) + \\ +R\int_\Omega v\cdot\nabla(\varrho T)dx \quad = \quad -\int_\Omega v\cdot\varrho\nabla\Phi.\end{aligned} \tag{25}$$

On a en outre

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega v\cdot\varrho\nabla\Phi dx &= \int_\Omega \Phi\,\nabla\cdot(\varrho v)dx \\
&= -\int_\Omega \Phi\partial_t\varrho dx \\
&= -\frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho\Phi dx, \\
\int_\Omega \varrho\partial_t v\cdot v dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho|v|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t\varrho|v|^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho|v|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |v|^2\nabla\cdot(\varrho v)dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho|v|^2 dx - \int_\Omega \varrho v\cdot[(v\cdot\nabla)v]dx.
\end{aligned}$$

Donc, en rappelant (6), de (25) on déduit l'égalité (22). □

Il est évident qu'en vertu de (4) on a

$$F_{\mu,\lambda}(v) \geq 0. \tag{26}$$

Or, il est utile de rappeler que, comme on le sait bien, dans le cas où $\mu > 0$ et v satisfait à la condition (14), la fonctionnelle $F_{\mu,\lambda}(v)$ définit une norme équivalente à celle de $H_0^1(\Omega)$. C'est-à-dire, il y a une constante positive k telle que

$$\frac{1}{k}\|u\|_{H^1} \leq \sqrt{F_{\mu,\lambda}(u)} \leq k\|u\|_{H^1} \qquad \forall u\in H_0^1(\Omega). \tag{27}$$

4. Minimisant de la fonctionnelle de l'énergie potentielle

Comme on le voit dans (22)–(24), si $\mu > 0$, alors la fonctionnelle $F_{\mu,\lambda}(v)$ représente la perte de l'énergie cinétique due à la viscosité. Donc se posent les questions s'il existe l'extrême inférieur fini a_0 de $\tilde{\Psi}(\varrho, T)$ dans une classe invariante par rapport à la dynamique définie par le système d'équations (1)–(3) avec (13), $\mu = 0$ ou (14), $\mu > 0$, de sorte que pour la solution (v, ϱ, T) on ait toujours

$$\frac{1}{2}\|\sqrt{\varrho}v\|^2_{L^2} + \tilde{\Psi}(\varrho, T) \geq a_0$$

et, dans le cas affirmatif, quelle distribution de densité et de température réalise le minimum de $\tilde{\Psi}(\varrho, T)$ dans la classe $\mathcal{D}_{m(\cdot)}$ de couples de fonctions admissibles (ϱ, T).

Pour examiner ces questions, pour des raisons techniques, il nous convient de récrire la fonctionnelle $\tilde{\Psi}(\varrho, T)$ dans la forme

$$\Psi(q, \eta) = \int_\Omega \left[C_V q^\gamma + \frac{q}{\eta}\Phi \right] dx, \tag{28}$$

où

$$q(x) = (\varrho(x)T(x))^{\frac{1}{\gamma}}, \qquad \eta(x) = \frac{T(x)^{\frac{1}{\gamma}}}{\varrho(x)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}. \tag{29}$$

On constate immédiatement que, si (q, η) et (ϱ, T) sont reliées par les relations (29), alors on a

$$\Psi(q, \eta) = \tilde{\Psi}(\varrho, T). \tag{30}$$

Considérons une distribution de densité $\varrho_0(x) > 0$ et une distribution de température $T_0(x) > 0$ dans Ω, qui, jointes à un champs de vecteur $v_0(x)$ satisfaisant à (13) (si $\mu = 0$) ou (14) (si $\mu > 0$), peuvent être la donnée initiale pour le système d'équations (1)–(3). Conformément à (7), (19), (20), on définit la fonction $m(\cdot)$ par la relation

$$m(\alpha) = \int_{\{\eta_0(x) \leq \alpha\}} \varrho_0(x) dx, \quad \eta_0(x) = \frac{T_0(x)^{\frac{1}{\gamma}}}{\varrho_0(x)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}, \quad 0 \leq \alpha < \infty. \tag{31}$$

On a évidemment

$$m(0) = 0\,, \qquad \lim_{\alpha\to\infty} m(\alpha) = M,$$

où M est la masse totale du gaz dans Ω ($0 < M < \infty$). Or, pour simplifier l'exposition, nous supposons une condition plus restrictive

$$m(\alpha) = 0 \ \text{ si } \ 0 \le \alpha < \alpha_0, \qquad m(\alpha) = M \ \text{ si } \ \alpha \ge \alpha_1, \tag{32}$$
$$0 < \alpha_0 \le \alpha_1 < \infty,$$

ce qui implique que $\alpha_0 \le \eta_0(x) \le \alpha_1$ p. p..

Étant définie la fonction $m(\cdot)$, posons

$$\mathcal{A}_{m(\cdot)} = \left\{ (q,\eta) \in (Mes_+(\Omega))^2 \mid \int_{\{\eta(x)\le\alpha\}} \frac{q(x)}{\eta(x)} dx = m(\alpha) \ \ \forall\alpha \ge 0 \right\}, \tag{33}$$

où $Mes_+(\Omega)$ est la classe introduite dans (8). Il est clair que, étant donnée une fonction non-décroissante $m(\alpha)$ satisfaisant à la condition (32), on peut définir l'ensemble $\mathcal{A}_{m(\cdot)}$ par la relation (33) sans faire nécessairement référence à la donnée initiale (ϱ_0, T_0). La référence à la donnée initiale sera utile pour obtenir des informations sur la solution du système d'équations (1)–(3).

Remarque 4.1. *Si* (v, ϱ, T) *est solution du système d'équations* (1)–(3) *avec la condition aux limites* (13) *(si* $\mu = 0$*) ou* (14) *(si* $\mu > 0$*) et la condition initiale*

$$v\big|_{t=t_0} = v_0, \quad \varrho\big|_{t=t_0} = \varrho_0, \quad T\big|_{t=t_0} = T_0, \tag{34}$$

et si la fonction $m(\cdot)$ *est définie par* (30) *à partir de* ϱ_0 *et* T_0*, alors on a*

$$(q(t,\cdot), \eta(t,\cdot)) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)} \qquad \forall t \ge t_0, \tag{35}$$

où $q(t,x)$ *et* $\eta(t,x)$ *sont les fonctions définies par* (16) *et* (9) *à partir de* $\varrho(t,x)$ *et* $T(t,x)$*, tandis que* $\mathcal{A}_{m(\cdot)}$ *est la classe définie par* (33)*.*

Démonstration. Comme en vertu de (9) et (16) on a $\frac{q(t,x)}{\eta(t,x)} = \varrho(t,x)$, du lemme 2.4 résulte immédiatement (35). $\square$

On remarque en outre que, si $(q,\eta) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)}$, alors on a

$$\int_\Omega q(x)dx = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \alpha\, dm(\alpha), \tag{36}$$

où l'intégrale du second membre est à considérer comme intégrale de Stieljes. En effet, si $(q,\eta) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)}$, alors compte tenu de la définition de $m(\alpha)$ introduite dans (31) et de la condition (32), on a

$$\int_\Omega q(x)dx = \int_\Omega \eta(x)\frac{q(x)}{\eta(x)}dx = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \alpha\, dm(\alpha).$$

Pour déterminer le minimisant de la fonctionnelle $\Psi(q,\eta)$ dans la classe $\mathcal{A}_{m(\cdot)}$, il nous convient d'introduire la variable φ, qui correspond aux niveaux du potentiel gravitationnel Φ. On pose

$$\Phi_0 = \inf_{x\in\Omega} \Phi(x), \qquad \Phi_1 = \sup_{x\in\Omega} \Phi(x), \tag{37}$$

$$\omega(\varphi) = \mathrm{mes}(\{x \in \Omega \mid \Phi(x) \leq \varphi\}). \tag{38}$$

Nous supposons que

$$\omega(\varphi) \in C^2([\Phi_0,\Phi_1]), \qquad \frac{d\omega(\varphi)}{d\varphi} > 0 \quad \forall \varphi \in [\Phi_0,\Phi_1], \tag{39}$$
$$-\infty < \Phi_0 < \Phi_1 < \infty.$$

Pour simplifier la notation, nous posons

$$u(\varphi) = \frac{d\omega(\varphi)}{d\varphi}. \tag{40}$$

On définit

$$h(m') = \inf\{\, \alpha > 0 \mid m' < m(\alpha)\,\} \quad \text{pour } 0 \leq m' < M \tag{41}$$

(voir (31), (32)) ; s'il est nécessaire, on prolonge $h(m')$ à $m' = M$, en posant

$$h(M) = +\infty,$$

comme la défintion (41) et la relation (32) l'entraînent. Il est évident que $h(\cdot)$ sera la fonction inverse de $m(\cdot)$ là où $m(\alpha)$ est continue et strictement croissante. Étant définie la fonction $h(\cdot)$, on considère l'équation intégrale

$$\bar{m}_r(\varphi) = \tag{42}$$
$$= \int_{\Phi_0}^{\varphi} \frac{1}{h(\bar{m}_r(\varphi'))} \left(\left[C - \frac{\gamma-1}{R\gamma} \int_{\Phi_0}^{\varphi'} \frac{1}{h(\bar{m}_r(\varphi''))} d\varphi'' \right]^+ \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} u(\varphi') d\varphi'$$

($[\ldots]^+$ désigne la partie positive de $[\ldots]$) pour la fonction inconnue $\bar{m}_r(\varphi)$ ($\Phi_0 \leq \varphi \leq \Phi_1$) avec la condition

$$\bar{m}_r(\Phi_1) = M. \tag{43}$$

LEMME 4.1. *Il existe une fonction $\bar{m}_r(\varphi)$ et une constante C et seules qui vérifient* (42) *et* (43). *La fonction $\bar{m}_r(\varphi)$ est continue et non-décroissante.*

Démonstration. Considérons un $C > 0$ fixé. Pour démontrer l'existence de solution de (42), désignons par $I(\bar{m}_r(\cdot))(\varphi)$ le deuxième membre de (42). En vertu de la définition (41) de $h(m)$ et des conditions (32) et (39) (voir aussi (40)), l'expression sous le signe d'intégrale $\int_{\Phi_0}^{\varphi} \cdot d\varphi'$ dans $I(\bar{m}_r(\cdot))(\varphi)$ est non-négative et uniformément bornée. Donc, quelque soit la fonction non-décroissante $\bar{m}_r(\cdot)$ telle que $\bar{m}_r(\Phi_0) = 0$, la fonction $\bar{m}_r^{[1]}(\varphi) = I(\bar{m}_r(\cdot))(\varphi)$ est non-décroissante et uniformément lipshitzienne et s'annule au point $\varphi = \Phi_0$. Donc on peut choisir un ensemble convexe et borné B de $C^0([\Phi_0, \Phi_1])$ tel que $I(B) \subset B$ et, en vertu du théorème d'Ascoli-Arzelà, $I(B)$ sera relativement compact. Donc en utilisant le principe de point fixe de Schauder, on obtient une fonction $\bar{m}_r(\cdot)$ telle que $\bar{m}_r(\cdot) = I(\bar{m}_r(\cdot))$, qui est donc solution de (42) et est continue et non-décroissante.

S'il existait une autre solution $\bar{m}_r^*(\varphi)$ différente de $\bar{m}_r(\varphi)$, il existerait $\bar{\varphi}$ et $\bar{\varphi}_1$ tels que $\Phi_0 \leq \bar{\varphi} < \bar{\varphi}_1 \leq \Phi_1$ et

$$\begin{array}{lcll} \bar{m}_r^*(\varphi) & = & \bar{m}_r(\varphi) & \text{pour } \Phi_0 \leq \varphi \leq \bar{\varphi}, \\ \bar{m}_r^*(\varphi) & < & \bar{m}_r(\varphi) & \text{pour } \bar{\varphi} \leq \varphi \leq \bar{\varphi}_1 \end{array}$$

(pour la symétrie entre le rôle de $\bar{m}_r(\varphi)$ et celui de $\bar{m}_r^*(\varphi)$, il nous suffit de considérer le cas $\bar{m}_r^*(\varphi) < \bar{m}_r(\varphi)$ pour $\bar{\varphi} \leq \varphi \leq \bar{\varphi}_1$), alors en vertu de (42) on aurait $h(\bar{m}_r^*(\varphi)) \neq h(\bar{m}_r(\varphi))$ au moins pour $\bar{\varphi} <$

$\varphi < \bar{\varphi}_2 \leq \bar{\varphi}_1$ avec $\bar{\varphi} < \bar{\varphi}_2$. Mais, comme $h(\cdot)$ est non-décroissante, on aurait

$$h(\bar{m}_r^*(\varphi)) < h(\bar{m}_r(\varphi)) \qquad \text{pour} \;\; \bar{\varphi} < \varphi < \bar{\varphi}_2.$$

Alors, pour la propriété élémentaire de l'intégrale il existerait un point $\bar{\varphi}_3$ tel que $\bar{\varphi} < \bar{\varphi}_3 \leq \bar{\varphi}_2$ et

$$\frac{1}{h(\bar{m}_r(\varphi'))}\left(\left[C - \frac{\gamma-1}{R\gamma}\int_{\Phi_0}^{\varphi'} \frac{1}{h(\bar{m}_r(\varphi''))} d\varphi''\right]^+\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} < \\ < \frac{1}{h(\bar{m}_r^*(\varphi'))}\left(\left[C - \frac{\gamma-1}{R\gamma}\int_{\Phi_0}^{\varphi'} \frac{1}{h(\bar{m}_r^*(\varphi''))} d\varphi''\right]^+\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

pour $\bar{\varphi} < \varphi \leq \bar{\varphi}_3$, ce qui, compte tenu des relations (39)–(40), contredit l'hypothèse $\bar{m}_r^*(\varphi) < \bar{m}_r(\varphi)$ pour $\bar{\varphi} \leq \varphi \leq \bar{\varphi}_1$. Par conséquent, la solution $\bar{m}_r(\varphi)$ de (42) avec un $C > 0$ fixé est unique.

Désignons par $\bar{m}_r(C, \varphi)$ cette solution pour $C > 0$ donné. Il est évident que, considérée comme fonction de C, $\bar{m}_r(C, \varphi)$ est continue et strictement croissante en $C > 0$, ce qui nous donne l'unique constante C telle que

$$\bar{m}_r(C, \Phi_1) = M,$$

ce qui achève la démonstration du lemme. $\square$

On remarque que, si M est suffisamment grand, alors on a $h(\bar{m}_r(\varphi)) < \infty$ pour tout $\varphi \in \,]\Phi_0, \Phi_1[$ et $\bar{m}_r(\varphi)$ est strictement croissante en φ. D'autre part, si M n'est pas suffisamment grand, alors il y aura une valeur $\varphi^* \in \,]\Phi_0, \Phi_1[$ telle que la solution $\bar{m}_r(\varphi)$ de (42)–(43) prenne la valeur $\bar{m}_r(\varphi) = M$ pour $\varphi^* \leq \varphi \leq \Phi_1$ et donc $h(\bar{m}_r(\varphi)) = \infty$ pour $\varphi^* \leq \varphi \leq \Phi_1$. Dans ce cas, si on définit $\bar{\eta}_r(\varphi)$ et $\bar{q}_r(\varphi)$ de manière analogue à (44) (en bas), on aurait

$$\bar{\varrho}_r(\varphi) = \frac{\bar{q}_r(\varphi)}{\bar{\eta}_r(\varphi)} = 0 \qquad \text{pour} \;\; \varphi^* \leq \varphi \leq \Phi_1.$$

C'est une conséquence normale du modèle. En effet, si $\frac{\nabla\Phi}{M}$ est suffisamment grand et si, pour simplifier, on considère le cas où η est constante dans Ω, on retrouvera la situation bien connue d'un gaz barotropique avec $p = C\varrho^\gamma$, $\gamma > 1$, dont la densité d'équilibre s'annule dans la région où Φ est assez grand.

Pour la question sur la validité du modèle, le cas où $\frac{\nabla\Phi}{M}$ est assez grand et $\bar{\varrho}_r(\varphi) = 0$ pour $\varphi^* \leq \varphi \leq \Phi_1$ mériterait d'être examiné et approfondi. Mais cet approfondissement requerrait d'autres considérations de natures différentes. Pour cela dans le présent travail nous nous limitons au cas où M est suffisamment grand de sorte que $h(\bar{m}_r(\varphi)) < \infty$ et $C - \frac{\gamma-1}{R\gamma}\int_{\Phi_0}^{\varphi}\frac{1}{h(\bar{m}_r(\varphi'))}d\varphi' > 0$ pour tout $\varphi \in \,]\Phi_0, \Phi_1[$.

Cela étant, on pose

$$\bar{\eta}_r(\varphi) = h(\bar{m}_r(\varphi)), \quad \bar{q}_r(\varphi) = \left[C - \frac{\gamma-1}{R\gamma}\int_{\Phi_0}^{\varphi}\frac{1}{\bar{\eta}_r(\varphi')}d\varphi'\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (44)$$

où $\bar{m}_r(\varphi)$ est la solution du problème (42)–(43) avec un M suffisament grand.

Remarque 4.2. *Soit* $(\bar{\eta}_r, \bar{q}_r)$ *le couple défini dans* (44). *Alors* $(\bar{\eta}_r \circ \Phi, \bar{q}_r \circ \Phi)$ *appartient à* $\mathcal{A}_{m(\cdot)}$.

Démonstration. Comme $h(\cdot)$ est la fonction inverse de $m(\alpha)$, on a

$$h(\bar{m}_r(\varphi)) \leq \alpha \iff \bar{m}_r(\varphi) \leq m(\alpha).$$

Posons

$$\varphi_\alpha = \sup\{\, \varphi \in [\Phi_0, \Phi_1] \,|\, \bar{m}_r(\varphi) \leq m(\alpha)\,\}.$$

Comme $\bar{m}_r(\varphi)$ est croissante et continue, en vertu de (38) et de (40) on a

$$\begin{aligned} m(\alpha) = \bar{m}_r(\varphi_\alpha) &= \int_{\Phi_0}^{\varphi_\alpha}\frac{\bar{q}_r(\varphi)}{\bar{\eta}_r(\varphi)}u(\varphi)d\varphi \\ &= \int_{\{\bar{\eta}_r(\Phi(x))\leq\alpha\}}\frac{\bar{q}_r(\Phi(x))}{\bar{\eta}_r(\Phi(x))}dx, \end{aligned}$$

ce qui démontre que $(\bar{\eta}_r \circ \Phi, \bar{q}_r \circ \Phi)$ appartient à $\mathcal{A}_{m(\cdot)}$. □

Remarque 4.3. *Le couple* $(\bar{\eta}_r, \bar{q}_r)$ *défini dans* (44) *satisfait à l'égalité*

$$R\nabla\bar{q}_r(\Phi(x))^\gamma = -\frac{\bar{q}_r(\Phi(x))}{\bar{\eta}_r(\Phi(x))}\nabla\Phi(x). \quad (45)$$

Démonstration. Il est aisé de voir que

$$R\frac{d}{d\varphi}(\bar{q}_r(\varphi)^\gamma) = -\frac{\bar{q}_r(\varphi)}{\bar{\eta}_r(\varphi)}. \tag{46}$$

En remarquant que

$$\nabla\bar{q}_r(\Phi(x))^\gamma = \nabla\Phi(x)\frac{d}{d\varphi}\bar{q}_r(\varphi)\big|_{\varphi=\Phi(x)},$$

on déduit de (46) l'égalité (45). □

C'est-à-dire, le couple $(\bar{q}_r, \bar{\eta}_r)$ nous donne une solution de l'équation d'équilibre (mécanique)

$$R\nabla(\varrho T) = -\varrho\nabla\Phi.$$

En outre, le couple $(\bar{q}_r, \bar{\eta}_r)$ réalise le minimum de $\Psi(q, \eta)$ dans $\mathcal{A}_{m(\cdot)}$. Plus précisément, on a la proposition suivante.

Proposition 4.1. *Le couple $(\bar{q}_r, \bar{\eta}_r)$ défini dans* (44) *satisfait à*

$$\Psi(\bar{q}_r \circ \Phi, \bar{\eta}_r \circ \Phi) = \inf_{(q,\eta)\in\mathcal{A}_{m(\cdot)}} \Psi(q, \eta). \tag{47}$$

5. Réduction de la classe de possibles minimisants

Comme nous l'avons dit plus haut, la difficulté majeure pour démontrer la proposition 4.1 demeure dans le fait que la classe de couples de fonctions admissibles $\mathcal{A}_{m(\cdot)}$ n'est pas convexe. Pour contourner cette difficulté, nous cherchons d'abord à réduire la classe de possibles minimisants de $\Psi(q, \eta)$.

Lemme 5.1. *Soit $(q, \eta) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)}$. Alors il existe $(q_1, \eta_1) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)}$ tel que*

$$\frac{q_1(x)}{\eta_1(x)} = \varrho_1(\Phi(x))$$

avec une fonction non-croissante $\varrho_1(\cdot) : [\Phi_0, \Phi_1] \to \mathbf{R}_+$ et que

$$\Psi(q, \eta) \geq \Psi(q_1, \eta_1).$$

Démonstration. Il est évident qu'on peut choisir $q_1(x)$ et $\eta_1(x)$ de telle sorte que

$$\mathrm{mes}(\{x \in \Omega | (q_1(x), \eta_1(x)) \in B\}) = \mathrm{mes}(\{x \in \Omega | (q(x), \eta(x)) \in B\}) \tag{48}$$

pour tout ensemble borélien B de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ et qu'il existe une fonction non-croissante $\varrho_1(\varphi)$ vérifiant

$$\varrho_1(\Phi(x)) = \frac{q_1(x)}{\eta_1(x)}.$$

La relation (48) implique que pour tout α on a

$$\int_{\{\eta_1(x) \leq \alpha\}} \frac{q_1(x)}{\eta_1(x)} dx = \int_{\{\eta(x) \leq \alpha\}} \frac{q(x)}{\eta(x)} dx = m(\alpha). \tag{49}$$

On a donc

$$(q_1, \eta_1) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)}.$$

De (48) on déduit en outre que

$$\int_\Omega q_1^\gamma(x) dx = \int_\Omega q^\gamma(x) dx.$$

D'autre part, comme $\varrho_1(\varphi)$ est non-croissante et que $q_1(x)$ et $\eta_1(x)$ vérifient (48), on a évidemment

$$\int_\Omega \Phi(x) \frac{q(x)}{\eta(x)} dx \geq \int_\Omega \Phi(x) \frac{q_1(x)}{\eta_1(x)} dx = \int_{\Phi_0}^{\Phi_1} \varphi \varrho_1(\varphi) u(\varphi) d\varphi.$$

Donc, en rappelant la définition de $\Psi(q, \eta)$, on a

$$\Psi(q, \eta) \geq \Psi(q_1, \eta_1),$$

ce qui achève la démonstration du lemme. □

On pose maintenant

$$\tilde{m}(\varphi) = \int_{\Phi_0}^{\varphi} \frac{\tilde{q}(\varphi')}{\tilde{\eta}(\varphi')} u(\varphi) d\varphi', \qquad \tilde{q},\ \tilde{\eta} \in Mes_+([\Phi_0, \Phi_1]), \tag{50}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_1 = \{\, (\tilde{q}, \tilde{\eta}) \in Mes_+([\Phi_0, \Phi_1])^2 \,|\, \tilde{m}(\Phi_1) = M,\ \tilde{\eta}(\varphi) = h(\tilde{m}(\varphi)) \,\}, \tag{51}$$

où $h(\cdot)$ est la fonction définie dans (41), tandis que $Mes_+([\Phi_0, \Phi_1])$ est la classe définie de manière analogue à (8) en remplaçant Ω par $[\Phi_0, \Phi_1]$.

Lemme 5.2. *Si* $(\tilde{q},\tilde{\eta}) \in \tilde{\mathcal{A}}_1$, *alors on a*

$$(\tilde{q}\circ\Phi, \tilde{\eta}\circ\Phi) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)}.$$

Démonstration. Soit $(\tilde{q},\tilde{\eta}) \in \tilde{\mathcal{A}}_1$. Comme $\tilde{m}(\varphi)$ est une fonction continue, pour tout $\alpha \in h([0,M])$ il existe un $\varphi_\alpha \in [\Phi_0,\Phi_1]$ tel que

$$\alpha = \tilde{\eta}(\varphi_\alpha) = h(\tilde{m}(\varphi_\alpha)).$$

On a donc

$$m(\alpha) = \tilde{m}(\varphi_\alpha) = \int_{\{\tilde{\eta}(\Phi(x))\leq\alpha\}} \frac{\tilde{q}(\Phi(x))}{\tilde{\eta}(\Phi(x))}dx,$$

ce qui prouve que $(\tilde{q}\circ\Phi, \tilde{\eta}\circ\Phi) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)}$. □

Lemme 5.3. *Soit* (q,η) *un élément de* $\mathcal{A}_{m(\cdot)}$. *Alors il existe* $(\tilde{q}_1,\tilde{\eta}_1) \in \tilde{\mathcal{A}}_1$ *tel que*

$$\Psi(q,\eta) \geq \Psi(\tilde{q}_1\circ\Phi, \tilde{\eta}_1\circ\Phi). \tag{52}$$

Démonstration. En vertu du lemme 5.1, il suffit de le démontrer pour $(q,\eta) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)}$ tel qu'il existe une fonction non-croissante $\tilde{\varrho}(\varphi)$ vérifiant la relation

$$\tilde{\varrho}(\Phi(x)) = \frac{q(x)}{\eta(x)}.$$

Comme $\tilde{\varrho}(\varphi)$ peut être considérée donnée, on peut définir

$$\tilde{\eta}_1(\varphi) = h\left(\int_{\Phi_0}^{\varphi} \tilde{\varrho}(\varphi')u(\varphi')d\varphi'\right), \qquad \tilde{q}_1(\varphi) = \tilde{\eta}_1(\varphi)\tilde{\varrho}(\varphi). \tag{53}$$

On a évidemment

$$\frac{\tilde{q}_1(\Phi(x))}{\tilde{\eta}_1(\Phi(x))} = \tilde{\varrho}(\Phi(x)) = \frac{q(x)}{\eta(x)}. \tag{54}$$

Donc on a

$$\tilde{m}(\Phi_1) = \int_\Omega \frac{\tilde{q}_1(\Phi(x))}{\tilde{\eta}_1(\Phi(x))}dx = \int_\Omega \frac{q(x)}{\eta(x)}dx = M.$$

En outre de (53) et de (54) résulte immédiatement que $\tilde{\eta}_1(\varphi) = h(\tilde{m}(\varphi))$. On a donc $(\tilde{q}_1,\tilde{\eta}_1) \in \tilde{\mathcal{A}}_1$.

En vertu du lemme 5.2, on a $(\tilde{q}_1 \circ \Phi, \tilde{\eta}_1 \circ \Phi) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)}$. En outre, on a

$$\int_{\{\eta(x)\leq\alpha\}} \varrho(x)dx = \int_{\{\tilde{\eta}_1(\Phi(x))\leq\alpha\}} \varrho(x)dx, \qquad \forall\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]. \tag{55}$$

De (55) il résulte que, quelque soit la fonction mesurable $f(\cdot)$, on a

$$\int_\Omega f(\eta(x))\varrho(x)dx = \int_\Omega f(\eta_1(x))\varrho(x)dx$$

(pourvu que l'intégrale soit bien définie). En particulier, on a

$$\int_\Omega \eta(x)^\gamma \varrho(x)dx = \int_\Omega \eta_1(x)^\gamma \varrho(x)dx.$$

D'autre part, comme $\tilde{\eta}_1(\varphi)$ est non-décroissante tandis que $\tilde{\varrho}(\varphi)$ est non-croissante, on a

$$\int_{\{\Phi(x)\leq\varphi\}} (\eta(x)^\gamma - \eta_1(x)^\gamma)\varrho(x)dx \geq 0 \qquad \forall\varphi \in [\Phi_0, \Phi_1]. \tag{56}$$

Donc, compte tenu de (53) et (54), on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (q(x)^\gamma - q_1(x)^\gamma)dx = \\
&= \int_\Omega \varrho(x)^{\gamma-1}(\eta(x)^\gamma - \eta_1(x)^\gamma)\varrho(x)dx \\
&= \int_{\Phi_0}^{\Phi_1} \tilde{\varrho}(\varphi)^{\gamma-1}\left(\frac{d}{d\varphi}\int_{\{\Phi(x)\leq\varphi\}}(\eta(x')^\gamma - \eta_1(x')^\gamma)\varrho(x')dx'\right)u(\varphi)d\varphi \\
&= -\int_{\Phi_0}^{\Phi_1}\left[\int_{\{\Phi(x)\leq\varphi\}}(\eta(x')^\gamma - \eta_1(x')^\gamma)\varrho(x')dx'\right]u(\varphi)d\tilde{\varrho}^{\gamma-1}(\varphi),
\end{aligned}$$

où par $d\tilde{\varrho}^{\gamma-1}(\varphi)$ on entend l'intégration de Stieltjes par rapport à la fonction $\tilde{\varrho}^{\gamma-1}(\varphi)$, qui est non-croissante. En rappelant (56), on en déduit que

$$\int_\Omega (q(x)^\gamma - q_1(x)^\gamma)dx \geq 0. \tag{57}$$

De (54) et de (57) résulte (52). □

Lemme 5.4. *Le couple* $(\bar{q}_r, \bar{\eta}_r)$ *défini dans* (44) *appartient à* $\tilde{\mathcal{A}}_1$ *et dans* $\tilde{\mathcal{A}}_1$ *il est l'unique solution de l'équation*

$$R\frac{d}{d\varphi}\big(\tilde{q}(\varphi)^{\gamma}\big) = -\frac{\tilde{q}(\varphi)}{\tilde{\eta}(\varphi)}. \tag{58}$$

Démonstration. L'appartenance de $(\bar{q}_r, \bar{\eta}_r)$ à $\tilde{\mathcal{A}}_1$ est évidente.

Si $(\tilde{q}, \tilde{\eta}) \in \tilde{\mathcal{A}}_1$ vérifie (58), on a

$$\tilde{q}(\varphi)^{\gamma-1} = C - \frac{\gamma-1}{R\gamma}\int_{\Phi_0}^{\varphi}\frac{1}{\tilde{\eta}(\varphi)}d\varphi$$

avec une constante C. Or, comme $\tilde{\eta}(\varphi) = h(\tilde{m}(\varphi))$ (voir (51)), la fonction $\tilde{m}(\varphi)$ définie dans (50) doit satisfaire à l'équation intégrale (42) et à la condition (43). Le lemme résulte du lemme 4.1. □

6. Démonstration de la proposition 4.1

On considère la fonction $\tilde{m}(\varphi)$ définie dans (50) avec un $(\tilde{q}, \tilde{\eta}) \in \tilde{\mathcal{A}}_1$. Comme $\tilde{m}(\varphi)$ est évidemment continue et strictement croissante sur $[\Phi_0, \Phi_1]$, on peut définir son inverse

$$\tilde{\varphi}(\cdot) = \tilde{m}^{-1}(\cdot) \tag{59}$$

et $\tilde{\varphi}(\cdot)$ est elle aussi continue et strictement croissante sur $[0, M]$. On définit

$$G(\tilde{q}, \tilde{\eta})(m) = \frac{1}{\tilde{q}(\tilde{\varphi}(m))u(\tilde{\varphi}(m))}, \tag{60}$$

où $\tilde{\varphi}(m)$ est la fonction définie dans (59).

Lemme 6.1. *L'application* $G(\cdot,\cdot)$ *définie par* (60) *est une bijection de* $\tilde{\mathcal{A}}_1$ *sur*

$$\mathcal{G} = \left\{ g \in Mes_+([0, M]) \mid \int_0^M h(m)g(m)dm = \Phi_1 - \Phi_0 \right\}, \tag{61}$$

où $Mes_+([0, M])$ *est la classe définie de manière analogue à* (8) *en remplaçant* Ω *par* $[0, M]$.

Démonstration. Soit $(\tilde{q},\tilde{\eta}) \in \tilde{\mathcal{A}}_1$. De (50) et (59) on déduit que

$$\frac{d\tilde{\varphi}(m)}{dm} = \frac{1}{\frac{d\tilde{m}(\varphi)}{d\varphi}\Big|_{\varphi=\tilde{\varphi}(m)}} = \frac{\tilde{\eta}(\tilde{\varphi}(m))}{\tilde{q}(\tilde{\varphi}(m))u(\tilde{\varphi}(m))}. \tag{62}$$

D'autre part, comme $\tilde{\eta}(\varphi) = h(\tilde{m}(\varphi))$, on a $\tilde{\eta}(\tilde{\varphi}(m)) = h(m)$. Donc on a

$$\Phi_1 - \Phi_0 = \int_0^M \frac{d\tilde{\varphi}(m)}{dm} dm = \int_0^M \frac{h(m)}{\tilde{q}(\tilde{\varphi}(m))u(\tilde{\varphi}(m))} dm,$$

ou

$$\int_0^M G(\tilde{q},\tilde{\eta})(m)h(m)dm = \Phi_1 - \Phi_0.$$

C'est-à-dire, on a

$$G(\tilde{\mathcal{A}}_1) \subset \mathcal{G}.$$

D'autre part, si $g \in \mathcal{G}$, alors nous définissons

$$\tilde{\varphi}(m) = \int_0^m g(m')h(m')dm', \tag{63}$$

ce qui nous permet de déterminer $\tilde{q}(\varphi)$ et $\tilde{\eta}(\varphi)$ par les relations

$$\tilde{q}(\tilde{\varphi}(m)) = \frac{1}{g(m)u(\tilde{\varphi}(m))}, \qquad \tilde{\eta}(\tilde{\varphi}(m)) = h(m). \tag{64}$$

On a

$$\int_{\Phi_0}^{\Phi_1} \frac{\tilde{q}(\varphi)}{\tilde{\eta}(\varphi)} u(\varphi)d\varphi = \int_0^M \frac{\tilde{q}(\tilde{\varphi}(m))}{\tilde{\eta}(\tilde{\varphi}(m))} u(\tilde{\varphi}(m)) \frac{d\tilde{\varphi}(m)}{dm} dm.$$

Mais (63) et (64) donnent immédiatement

$$\frac{\tilde{q}(\tilde{\varphi}(m))}{\tilde{\eta}(\tilde{\varphi}(m))} u(\tilde{\varphi}(m)) = \frac{1}{g(m)h(m)}, \qquad \frac{d\tilde{\varphi}(m)}{dm} = g(m)h(m).$$

Donc on a

$$\tilde{m}(\Phi_1) = \int_{\Phi_0}^{\Phi_1} \frac{\tilde{q}(\varphi)}{\tilde{\eta}(\varphi)} u(\varphi)d\varphi = M.$$

En outre, comme $\tilde{\eta}(\tilde{\varphi}(m)) = h(m)$, on a $\tilde{\eta}(\varphi) = h(\tilde{m}(\varphi))$, ce qui entraîne que $(\tilde{q},\tilde{\eta})$ ainsi construit appartient à $\tilde{\mathcal{A}}_1$.

La construction de ce $(\tilde{q},\tilde{\eta})$ nous montre que $G(\cdot,\cdot)$ est une bijection. Le lemme est démontré. □

Lemme 6.2. *Soient* $(\tilde{q}, \tilde{\eta}) \in \tilde{\mathcal{A}}_1$ *et* $g = G(\tilde{q}, \tilde{\eta}) \in \mathcal{G}$. *On a alors*

$$\Psi(\tilde{q} \circ \Phi, \tilde{\eta} \circ \Phi) = \Psi_1(g), \tag{65}$$

où

$$\Psi_1(g) = M\Phi_1 + \int_0^M h(m)\Big(\frac{C_V}{(g(m)u(\tilde{\varphi}(m)))^{\gamma-1}} - mg(m)\Big)dm, \tag{66}$$

$\tilde{\varphi}(m)$ *étant la fonction définie dans* (59).

Démonstration. En vertu de (38), (40) et (62), on déduit de (28) que

$$\begin{aligned}\Psi(q,\eta) &= \int_{\Phi_0}^{\Phi_1} \Big[C_V \tilde{q}(\varphi)^\gamma + \frac{\tilde{q}(\varphi)}{\tilde{\eta}(\varphi)}\varphi\Big]u(\varphi)d\varphi \\ &= \int_0^M \Big[C_V \tilde{\eta}(\tilde{\varphi}(m))\tilde{q}(\tilde{\varphi}(m))^{\gamma-1} + \tilde{\varphi}(m)\Big]dm.\end{aligned}$$

Or, encore en vertu de (62) on a

$$\begin{aligned}\int_0^M \tilde{\varphi}(m)dm &= M\Phi_1 - \int_0^M m\frac{d\tilde{\varphi}(m)}{dm}dm \\ &= M\Phi_1 - \int_0^M mh(m)\frac{1}{\tilde{q}(\tilde{\varphi}(m))u(\tilde{\varphi}(m))}dm.\end{aligned}$$

Donc en vertu de (60) et (66) on a (65). □

Démonstration de la proposition 4.1. En vertu des lemmes 5.2, 5.3, 6.1 et 6.2, pour démontrer que $(\bar{q}_r, \bar{\eta}_r)$ défini dans (44) satisfait à (47), il suffit de montrer que $\bar{g} = G(\bar{q}_r, \bar{\eta}_r)$ réalise le minimum de $\Psi_1(g)$ dans la classe $\mathcal{G}$ définie dans (61).

On remarque que $\mathcal{G}$ est un ensemble convexe (pour les généralités de l'Analyse convexe et du Calcul des variations, on renvoie par exemple à [2]). Considérons la dérivée de Gâteaux de $\Psi_1(g)$ dans la direction d'une fonction f telle que

$$\int_0^M h(m)f(m)dm = 0. \tag{67}$$

Comme on a vu dans la démonstration du lemme 6.1, dans l'expression de $\Psi_1(g)$, $\tilde{\varphi}(m)$ peut être considérée comme fonction définie dans (63). Compte tenu que $C_V(\gamma-1)=R$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi_1(g)}{\partial g}(f) &= -\int_0^M h(m)\Big[\frac{R}{(g(m)u(\tilde{\varphi}(m))^{\gamma}}u(\tilde{\varphi}(m))+m\Big]f(m)dm\\ &\quad -\int_0^M \frac{Rh(m)}{(g(m)u(\tilde{\varphi}(m))^{\gamma}}g(m)A(f)(m)dm,\end{aligned}$$

où

$$A(f)(m)=\frac{du(\varphi)}{d\varphi}\Big|_{\varphi=\tilde{\varphi}(m)}\int_0^m h(m')f(m')dm'.$$

Or, comme on a $h(m)g(m)=\frac{d\tilde{\varphi}(m)}{dm}$, compte tenu de (67) on a

$$\begin{aligned}&\int_0^M \frac{h(m)}{(g(m)u(\tilde{\varphi}(m))^{\gamma}}g(m)\frac{du(\varphi)}{d\varphi}\Big|_{\varphi=\tilde{\varphi}(m)}\int_0^m h(m')f(m')dm'\,dm\\ &\qquad= -\int_0^M\int_0^m \frac{1}{(g(m')u(\tilde{\varphi}(m'))^{\gamma}}\frac{du(\tilde{\varphi}(m'))}{dm'}dm'\,h(m)f(m)dm.\end{aligned}$$

Donc pour que $\frac{\partial\Psi_1(g)}{\partial g}(f)=0$, il faut que

$$\begin{aligned}-\int_0^M h(m)\Big[R\Big(&\frac{u(\tilde{\varphi}(m))}{(g(m)u(\tilde{\varphi}(m))^{\gamma}}+\\ &-\int_0^m \frac{1}{(g(m')u(\tilde{\varphi}(m'))^{\gamma}}\frac{du(\tilde{\varphi}(m'))}{dm'}dm'\Big)+m\Big]f(m)dm=0.\end{aligned}\tag{68}$$

Pour que (68) soit vérifiée pour toutes les fonctions mesurables f vérifiant (67), il faut que $g(m)$ vérifie l'égalité

$$R\Big(\frac{u(\tilde{\varphi}(m))}{(g(m)u(\tilde{\varphi}(m)))^{\gamma}}-\int_0^m \frac{1}{(g(m')u(\tilde{\varphi}(m'))^{\gamma}}\frac{du(\tilde{\varphi}(m'))}{dm'}dm'\Big)=-m.\tag{69}$$

Maintenant en dérivant les deux membres de (69) par rapport à φ (voir (59)), on obtient

$$\begin{aligned}Ru(\varphi)\frac{d}{d\varphi}\Big(\frac{1}{(g(\tilde{m}(\varphi))u(\varphi))^{\gamma}}\Big)+\frac{R}{(g(\tilde{m}(\varphi))u(\varphi))^{\gamma}}\frac{du(\varphi)}{d\varphi}+&\\ -\frac{R}{(g(\tilde{m}(\varphi))u(\varphi))^{\gamma}}\frac{du(\varphi)}{d\varphi}&= -\frac{d\tilde{m}(\varphi)}{d\varphi}.\end{aligned}$$

Or, compte tenu des relations

$$\frac{1}{(g(\tilde m(\varphi))u(\varphi))^\gamma} = \tilde q(\varphi)^\gamma, \qquad \frac{d\tilde m(\varphi)}{d\varphi} = \frac{\tilde q(\varphi)}{\tilde\eta(\varphi)}u(\varphi),$$

on obtient

$$R\frac{d}{d\varphi}\big(\tilde q(\varphi)^\gamma\big)u(\varphi) = -\frac{\tilde q(\varphi)}{\tilde\eta(\varphi)}u(\varphi).$$

C'est-à-dire, $(\tilde q, \tilde\eta)$ doit vérifier (58). Par conséquent, en vertu du lemme 5.4, $\bar g = G(\bar q_r, \bar\eta_r)$ est l'unique point stationnaire dans $\mathcal{G}$ de la fonctionnelle $\Psi_1(g)$.

Pour conclure, considérons

$$f(m) = g(m) - \bar g_r(m)$$

où

$$\bar g_r(m) = \frac{1}{\bar q_r(\bar\varphi_r(m))u(\bar\varphi_r(m))}$$

avec la fonction inverse $\bar\varphi_r(m)$ de la fonction $\bar m_r(\varphi)$ définie dans le lemme 4.1. Comme $f(m)$ satisfait à (67), $\bar g_r + f \in \mathcal{G}$ et on voit facilement que, si $\|f\|_{L^1(0,M)}$ croît, alors $\Psi_1(g) = \Psi_1(\bar g_r + f)$ croît, ce qui achève la démonstration. □

7. Conséquences de l'égalité de l'énergie pour l'état de repos

La proposition 4.1 étant établie, on peut en tirer une conséquence de l'égalité de l'énergie, conséquence utile pour l'étude de la stabilité de l'état de repos.

PROPOSITION 7.1. *Soit* Ω *un domaine comme dans* (12). *Soient* ϱ_0, $T_0 \in Mes_+(\Omega)$ *(voir* (8)*). On suppose que la fonction* $m(\cdot)$ *définie par* (31) *à partir de* ϱ_0, T_0 *vérifie la condition* (32). *Soit* $(\bar q_r, \bar\eta_r)$ *le couple défini par* (44) *à partir de* $m(\alpha)$ *(à l'aide de* (41)–(43) *et du lemme 4.1). On pose*

$$\bar\varrho_r = \frac{\bar q_r \circ \Phi}{\bar\eta_r \circ \Phi}, \qquad \bar T_r = (\bar q_r \circ \Phi)^{\gamma-1}(\bar\eta_r \circ \Phi). \tag{70}$$

Si (v, ϱ, T) *est solution du système d'équations* (1)–(3) *pour* $t \geq t_0$ *avec la condition* (13) *(si* $\mu = 0$*) ou* (14) *(si* $\mu > 0$*) et avec la* *condition initiale* (v_0, ϱ_0, T_0) *à l'instant* $t = t_0$ *(*$\sqrt{\varrho_0}v_0 \in L^2(\Omega)$*), alors on a*

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}(\bar{\varrho}_r, \bar{T}_r) &\leq \frac{1}{2}\|\sqrt{\varrho(t,\cdot)}v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \tilde{\Psi}(\varrho(t,\cdot), T(t,\cdot)) \qquad (71)\\
&\leq \frac{1}{2}\|\sqrt{\varrho_0}v_0\|_{L^2}^2 + \tilde{\Psi}(\varrho_0, T_0) \quad \forall t \geq t_0,\\
0 &\leq \int_{t_0}^{t_1} F_{\mu,\lambda}(v(t,\cdot))dt \qquad (72)\\
&\leq \frac{1}{2}\|\sqrt{\varrho_0}v_0\|_{L^2}^2 + \tilde{\Psi}(\varrho_0, T_0) - \tilde{\Psi}(\bar{\varrho}_r, \bar{T}_r) \quad \forall t_1 \geq t_0,
\end{aligned}$$

où $F_{\mu,\lambda}(v)$ *est la fonctionnelle définie dans* (23).

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 3.1 et de la proposition 4.1. □

On remarque que dans le cas où $\mu = \lambda = 0$, (71) et (72) se réduisent à

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\sqrt{\varrho(t,\cdot)}v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \tilde{\Psi}(\varrho(t,\cdot), T(t,\cdot)) =\\
&\qquad\qquad = \frac{1}{2}\|\sqrt{\varrho_0}v_0\|_{L^2}^2 + \tilde{\Psi}(\varrho_0, T_0) \quad \forall t \geq t_0,\\
&\int_{t_0}^{t_1} F_{\mu,\lambda}(v(t,\cdot))dt = 0 \quad \forall t_1 \geq t_0
\end{aligned}$$

(la condition (4) n'exclut pas le cas où $\mu = 0$, $\lambda > 0$).

Il est bon de rappeler que de la remarque 4.3 il résulte que le couple $(\bar{\varrho}_r, \bar{T}_r)$ défini par (70) satisfait à l'équation

$$R\nabla(\varrho T) = -\varrho\nabla\Phi.$$

D'autre part, en vertu de la proposition 4.1, on a

$$\Psi(q,\eta) \geq \Psi(\bar{q}_r \circ \Phi, \bar{\eta}_r \circ \Phi) \qquad \forall (q,\eta) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)},$$

où $m(\cdot)$ et $(\bar{q}_r, \bar{\eta}_r)$ sont comme ci-dessus.

La proposition 7.1, jointe à ces relations, nous donne une caractérisation des distributions de température et de densité atmosphériques que les météorologues communément classifient *stables* ou *instables*, en particulier pour la distribution “la plus stable” $(\bar{\varrho}_r, \bar{T}_r)$. Du point de vue mathématique, il est bon de rappeler que les inégalités (71) et (72) sont obtenues sous l’hypothèse de l’existence de la solution du système d’équations (1)–(3) avec la condition initiale et que l’existence d’une solution n’est pas encore démontrée.

Références

[1] S. Buccellatto and H. Fujita-Yashima, *Stabilité de l’état d’équilibre du système d’équations d’un gaz visqueux barotropique dans le modèle de l’atmosphère*, Ann. Univ. Ferrara **52** (2006), 1–17.

[2] I. Ekland and R.R. Temam, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod, France (1974).

[3] A.K. Kikoïne and I.K. Kikoïne, *Physique moléculaire (En Russe)*, Nauka, Russia (1976), traduction française, Mir (1979).

[4] L.D. Landau and E.M. Lifchitz, *Mécanique des fluides, (Physique théorique, Tome VI) (En Russe)*, Nauka, Russia (1986), traduction française, Mir (1989).

[5] P.-L. Lions, *Mathematical topics in fluid mechanics, Vol.II*, Oxford University Press, U.K. (1998).

[6] M. Padula, *Stedy flows of barotropic viscous fluids*, Quaderno di Mat. II Univ. Napoli, vol. I, Classical problems in mechanics (1997), 253–345.

[7] M. Padula, *On the exponential stability of the rest state of a viscous compressible fluid*, J. Math. Fluid Mech., **1** (1999), 62–77.

[8] M. Padula, *On direct Lyapunov method in continuum theories*, Intern. Math. Series, Nonlin. Probl. in Math. Phys. Rel. Topics, in honor of O. A. Ladyzhenskaya **1** (2002), 271–283 (en Russe), 289–302 (en Anglais).

[9] P.-X. Sheng, *Physique de l’atmosphère (En Chinois)*, Beijing University Press, China (2003).

[10] V.A. Solonnikov, *Sur la résolubilité du problème aux conditions initiales et aux limites pour les équations du movement d’un fluide visqueux compressible, (En Russe)*, Zap. Nauch. Semi. LOMI, Leningr. **56** (1976), 128–142.

[11] V.A. Weigant and A.V. Kazhikhov, *Sur l’existence de solutions globales des équations de Navier-Stokes d’un fluide compressible visqueux (En Russe)*, Sibir. Mat. Zhur. **36** (1995), 1283–1316.

Authors' addresses:

Rachid Benabidallah
Département de Mathématiques, Université de Tizi-Ouzou M. Mammeri, Tizi-Ouzou, Algérie
E-mail: rbenabi@yahoo.it

Lynda Taleb
Département de Mathématiques, Université de Tizi-Ouzou M. Mammeri, Tizi-Ouzou, Algérie
E-mail: lytaleb@yahoo.fr

Hisao Fujita Yashima
Dipartimento di Matematica, Università di Torino, Torino, Italia
E-mail: hisao.fujitayashima@unito.it

Received September 3, 2007
Revised October 28, 2008