Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste
Vol. XXXVI, 113–137 (2004)

Il Perenne Ritorno delle Somme di Riemann-Stieltjes nell'Evoluzione del Calcolo Integrale

JEAN MAWHIN [(*)]

1. Introduzione

L'obiettivo di questo lavoro è di mostrare l'importanza avuta dalle somme di Riemann-Stieltjes nell'evoluzione del calcolo integrale, dall'Antica Grecia fino ai nostri giorni. Cercheremo un compromesso tra la storia delle scienze e l'esposizione matematica più tecnica, senza preoccuparci troppo di alcuni anacronismi nelle notazioni o nel linguaggio. Ci limiteremo, inoltre, alle funzioni reali su un intervallo limitato.

Le somme di Riemann-Stieltjes sono state inizialmente utilizzate nel calcolo dell'area di figure curvilinee e del volume di solidi. Pur essendo ancora presenti nei testi di LEIBNIZ sull'introduzione del calcolo integrale, sembrano destinate a scomparire con il trionfo del concetto di calcolo integrale inteso come inverso del calcolo differenziale. Rinascono con CAUCHY per permettere di dimostrare la primitivabilità delle funzioni continue e sembrano raggiungere il loro apice con RIEMANN, nella prima definizione di funzione integrabile, e con STIELTJES nella sua feconda estensione che, per la prima

(*) Testo tratto da una conferenza tenuta nel 1995 all'Università Paul-Sabatier di Tolosa in occasione del centenario della morte di Stieltjes. Già pubblicato in francese, nel Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, vol. 70 (2001), 345-364.

Indirizzo dell'autore: Jean Mawhin, Département de mathématique, Université Catholique de Louvain, chemin du cyclotron, 2 - 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique.

volta, libera l'integrale dal suo ambito geometrico. I contributi di Borel, Lebesgue e dei loro successori sembrano relegare le somme di Riemann-Stieltjes nel dimenticatoio della storia. Eppure, da una quarantina d'anni, i lavori di Kurzweil e Henstock le hanno riabilitate, mostrando come una piccola modifica formale della definizione di Riemann conduca a un integrale più generale di quello di Lebesgue.

2. Le somme di Riemann nel calcolo esatto delle aree e dei volumi

Il calcolo integrale trova la sua origine e la sua motivazione nei problemi geometrici del calcolo delle aree di figure piane curvilinee, dei volumi di corpi solidi e nei problemi di statica, come la determinazione dei centri di gravità di tali figure o di tali corpi. Le prime ricerche risalgono all'Antica Grecia, soprattutto ad opera di Eudosso (IV secolo a.C.) e Archimede (III secolo a.C.), che creano e sviluppano un metodo che il gesuita Grégoire de Saint-Vincent chiamerà, nel XVII secolo, **metodo di esaustione.** Nonostante la concorrenza di procedure più dirette ed efficaci, ma di rigore più discutibile, questo metodo resta a lungo per i matematici il modello da seguire, tanto che nel 1742, sessant'anni dopo la creazione del calcolo differenziale e integrale, MacLaurin ne fa ancora uso nel suo *Treatise of Fluxions* per raggiungere maggior rigore nell'esposizione di questi concetti. Nel XIX secolo, il metodo ispira ancora i matematici impegnati a ricostruire il calcolo differenziale e integrale su basi più solide.

Introduciamo il problema centrale di questo articolo, prima di descrivere le linee principali del metodo di esaustione. Siano $a < b$ due numeri reali, $I = [a, b]$ l'insieme dei numeri reali x tali che $a \leq x \leq b$, e sia f una funzione reale definita e positiva su I. Chiamiamo $E(f)$ l'insieme dei punti del piano definito da

$$E(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x),\ x \in I\}.$$

Se f è abbastanza regolare, la figura corrispondente è il quadrilatero curvilineo compreso tra il grafico di f, l'asse delle ascisse e le parallele all'asse delle ordinate condotte dai punti $(a, 0)$ e $(b, 0)$. Fino al XIX secolo, ci si occupa solamente del caso in cui f sia definita da una formula esplicita o da una serie di potenze, e il problema consiste nel calcolare l'**area** $A(f)$ di $E(f)$, la cui esistenza è considerata come geometricamente evidente, così come le sue proprietà di monotonia e di additività finita.

Il metodo di esaustione non è una tecnica di calcolo di $A(f)$, bensì un processo di verifica per un valore ipotizzato, spesso ottenuto in maniera euristica. (Piú esattamente, si cerca di dimostrare che l'area cercata ha un dato rapporto con un'altra già nota: presso i Greci e per molti anni ancora, non si ha a che fare con numeri reali ma con **grandezze** e loro **rapporti**; per non appesantire l'esposizione, ci atterremo comunque a una descrizione in termini di numeri reali). Il metodo di esaustione fa spesso ricorso a quelle che oggi chiamiamo **somme di Riemann**, che è il momento di definire in modo preciso.

Assumiamo la formula che fornisce l'area di un rettangolo come prodotto delle lunghezze dei suoi lati, e il fatto che l'area di una figura piana formata da un numero finito di rettangoli non sovrapposti sia uguale alla somma delle loro aree. Per ottenere un valore approssimato di $A(f)$, è abbastanza naturale procedere nel seguente modo: si divide I in m intervalli $[a_{j-1}, a_j]$, $(1 \leq j \leq m)$, che possono anche non avere la stessa lunghezza, dove

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = b, \tag{1}$$

e si considerano i rettangoli di base $[a_{j-1}, a_j]$ e altezza $f(x_j)$, con

$$x_j \in [a_{j-1}, a_j], \quad (1 \leq j \leq m). \tag{2}$$

Se f è sufficientemente regolare, ci si può aspettare che la somma delle aree di questi rettangoli

$$\sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j - a_{j-1}) \tag{3}$$

fornisca un'approssimazione di $A(f)$ tanto migliore quanto più le lunghezze $a_j - a_{j-1}$ saranno prese piccole. Per un'applicazione $f : I \to \mathbb{R}$ data, l'espressione (3) è univocamente determinata dalla **partizione puntata** o **P-partizione**

$$\Pi = ((x_j, [a_{j-1}, a_j]))_{1 \leq j \leq m},$$

dove gli a_j e gli x_j verificano (1) e (2). Si può denotare (3) con $S_f(\Pi)$ e chiamarla, seguendo una tradizione che risale alla fine del XIX secolo, **somma di Riemann associata a f e a Π.**

A parte alcune interessanti eccezioni (in particolare da parte di ARCHIMEDE, quando le proprietà geometriche della figura suggeriscono un'approssimazione con dei poligoni e, come vedremo in seguito, di FERMAT per facilitare i calcoli), le somme di Riemann usate nel metodo di esaustione corrispondono a una divisione di I in m parti uguali e alla scelta $x_j = a_{j-1}$ $(1 \leq j \leq m)$ oppure $x_j = a_j$ $(1 \leq j \leq m)$. Si tratta dunque di espressioni del tipo $S_f(\Pi_m)$ e $S_f(\Pi^m)$, dove

$$\Pi_m = \left(\left(a + (j-1)\frac{b-a}{m}, \left[a + (j-1)\frac{b-a}{m}, a + j\frac{b-a}{m}\right]\right)\right)_{1\leq j\leq m},$$

e

$$\Pi^m = \left(\left(a + j\frac{b-a}{m}, \left[a + (j-1)\frac{b-a}{m}, a + j\frac{b-a}{m}\right]\right)\right)_{1\leq j\leq m}.$$

Scomponendo se necessario la figura $E(f)$ in più parti, ci si può sempre ricondurre, per le funzioni considerate all'epoca, al caso in cui f è monotona, diciamo crescente, su I. Se ne deducono pertanto, per ogni intero positivo m, le disuguaglianze

$$S_f(\Pi_m) \leq A(f) \leq S_f(\Pi^m), \tag{4}$$

e, per la differenza tra somme di Riemann, l'uguaglianza

$$S_f(\Pi^m) - S_f(\Pi_m) = \frac{b-a}{m}[f(b) - f(a)]. \tag{5}$$

Supponiamo ora di aver trovato un numero reale J tale che

$$S_f(\Pi_m) \leq J \leq S_f(\Pi^m) \tag{6}$$

per ogni intero positivo m. Allora, necessariamente, $A(f) = J$, perché se, per esempio, $A(f) < J$, l'assioma di Archimede implica l'esistenza di un intero positivo q tale che

$$\frac{b-a}{q}[f(b) - f(a)] < J - A(f),$$

e, per (4), (5) e (6), si ottiene la contraddizione

$$J - A(f) \leq S_f(\Pi^q) - S_f(\Pi_q) = \frac{b-a}{q}[f(b) - f(a)] < J - A(f).$$

Nello stesso modo si esclude la possibilità $A(f) > J$.

Questo è il principio del **metodo di esaustione.** Per applicarlo, bisogna determinare preventivamente il numero reale J che verifichi (6). Nel caso in cui $I = [0, b]$ e $f(x) = x^k$, dove $k \geq 1$ è un intero, si ha

$$S_{x^k}(\Pi_m) = \left(\frac{b}{m}\right)^{k+1} \cdot \sum_{j=1}^{m-1} j^k, \quad S_{x^k}(\Pi^m) = \left(\frac{b}{m}\right)^{k+1} \sum_{j=1}^{m} j^k,$$

e $J = b^{k+1}L$, se L verifica, per ogni intero positivo m, le disuguaglianze

$$\frac{1}{m^{k+1}} \sum_{j=1}^{m-1} j^k \leq L \leq \frac{1}{m^{k+1}} \sum_{j=1}^{m} j^k.$$

Nel caso in cui $k = 1$, si calcolano senza difficoltà le espressioni corrispondenti, ossia

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right) \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m}\right),$$

e pertanto $L = 1/2$, da cui $A(x) = b^2/2$. Si tratta di un modo sofisticato di calcolare l'area di un triangolo rettangolo isoscele! Il problema si complica rapidamente quando k aumenta, siccome non si possiede una formula esplicita semplice per la somma delle potenze $k-$esime di interi. Per $k = 2$, la formula $A(x^2) = b^3/3$ è ottenuta da Archimede e, per $k = 3$ e $k = 4$, dei risultati equivalenti a $A(x^3) = b^4/4$, $A(x^4) = b^5/5$ sono ottenuti da Alhazen intorno all'anno 1000. La formula generale

$$A(x^k) = \frac{b^{k+1}}{k+1}, \tag{7}$$

è congetturata nel 1635 da Cavalieri, che la "dimostra" per $k \leq 4$ con il suo **metodo degli indivisibili.** Con questo approccio, si concepisce $E(f)$ come la giustapposizione dei segmenti paralleli all'asse delle ordinate congiungenti i punti $(x, 0)$ e $(x, f(x))$, e l'area $A(f)$ come la somma delle ordinate $f(x)$ tra a e b. Che una simile idea abbia potuto dare risultati corretti è dovuto al fatto che non si calcolano direttamente delle aree, ma rapporti di aree. Pertanto, per una seconda funzione g definita su I, si ha, per esempio,

$$\frac{S_f(\Pi^m)}{S_g(\Pi^m)} = \frac{\sum_{j=1}^m f\left(a + \frac{j(b-a)}{m}\right)}{\sum_{j=1}^m g\left(a + \frac{j(b-a)}{m}\right)}.$$

Da ciò, in linguaggio moderno, se si fa tendere m all'infinito, si vede che le aree $A(f)$ e $A(g)$ stanno tra loro come il limite del rapporto delle somme delle ordinate nei punti della suddivisione di I. Citiamo a questo proposito Pascal, che, ispirato dalla lettura di Tacquet, tratta nel 1660 il caso in cui $E(f)$ sia una porzione di cerchio ($f(x) = [(b-a)^2 - (x-a)^2]^{1/2}$), ed esprime la sua opinione sui legami tra i metodi di esaustione e degli indivisibili nello stile polemico che per altro lo ha reso celebre:

> Non avrò alcuna difficoltà nell'usare in questa espressione la somma delle ordinate, che sembra non essere geometrica a quelli che non capiscono la dottrina degli indivisibili e che si immaginano che sia peccare contro la geometria l'esprimere un piano con un numero infinito di rette; il che deriva dalla loro scarsa intelligenza poiché con ciò non si intende altro che la somma di un numero indefinito di rettangoli costruiti da ogni ordinata [della funzione] prendendo [come basi] piccole parti uguali del diametro, la cui unione è certamente una porzione di piano, che differisce dallo spazio occupato dal semicerchio di una quantità più piccola di una qualsiasi altra data.

Nel 1636, in un lavoro sfortunatamente non pubblicato, Fermat dimostra la formula (7) per un intero positivo k qualunque, utilizzando il metodo di esaustione e alcune formule ricorsive su k per il calcolo delle somme $\sum_{j=1}^m j^k$. Nel 1657, Fermat dimostra la formula congetturata da Wallis nel 1655, che tratta il caso di un esponente frazionario diverso da -1. A questo scopo, Fermat ha la notevole idea di utilizzare delle P-partizioni in cui i punti della suddivisione a_j non sono più equidistanti, ma scelti in maniera da facilitare il calcolo esplicito delle somme di Riemann correspondenti. Questo approccio semplifica considerevolmente l'ottenimento della formula (7), evitando il ricorso alle stime delle somme di potenze di interi. Siccome la funzione potrebbe ora essere singolare nell'origine, supporremo $a > 0$. L'idea di Fermat consiste essenzialmente nello scegliere gli intervalli della P-partizione in progressione geometrica e non aritmetica. Come scrive lui stesso:

> Archimede ha utilizzato la progressione geometrica soltanto per la quadratura della parabola; nelle sue altre comparazioni di quantità eterogenee, si è limitato alla sola progressione aritmetica. Che sia perché gli era sembrato che la progressione geometrica si prestava meno bene alla quadratura? O che l'artificio particolare di cui si è servito per quadrare con questa progressione la prima parabola si può difficilmente applicare alle altre? Comunque sia, ho trovato questa progressione molto feconda per le quadrature e comunico con gioia ai geometri moderni la mia invenzione che permette di quadrare, con un metodo assolutamente identico, sia parabole che iperboli [...] Affermo che tutte queste iperboli, salvo una sola, quella di Apollonio o la prima, possono essere quadrate per mezzo di una progressione geometrica con lo stesso metodo valido per tutte.

Fermat rimpiazza così la doppia verifica del metodo di esaustione con un progenitore di passaggio al limite:

> Immaginiamo i termini di una progressione geometrica che decresce indefinitamente; sia AG il primo, AH il secondo, AO il terzo, ecc. Supponiamo che questi termini siano abbastanza ravvicinati gli uni agli altri per cui, seguendo il metodo di Archimede, si possa *adeguagliare,* come dice Diofanto, o eguagliare per approssimazione, il parallelogramma rettilineo $GE \times GH$ al quadrilatero mistilineo $GHIE$; supporremo in più che i primi intervalli

> GH, HO, OM, ecc. dei termini progressivi siano sufficientemente vicini tra loro, per cui si possa facilmente usare il metodo di Archimede di riconduzione all'assurdo, per circoscrizioni e inscrizioni. È sufficiente fare questa osservazione una volta sola per non dover ritornarci e insistere costantemente su un artificio ben noto a tutti i geometri.

Nel nostro linguaggio analitico, per $f(x) = x^{p/q}$, con p intero, q intero strettamente positivo e $p/q \neq -1$, l'idea del metodo di Fermat corrisponde alla scelta delle P-partizioni

$$\widetilde{\Pi}_m = \left(\left(a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j-1}{m}}, \left[a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j-1}{m}}, a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j}{m}}\right]\right)\right)_{1\leq j\leq m}.$$

Si trova così, con dei calcoli molto semplici,

$$\begin{aligned} S_{x^{p/q}}(\widetilde{\Pi}_m) &= \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right] a^{\frac{p+q}{q}} \sum_{j=1}^{m} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+q}{qm}}\right]^{j-1} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}}}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+q}{qm}}} \left(b^{\frac{p+q}{q}} - a^{\frac{p+q}{q}}\right). \end{aligned}$$

Per ottenere $\lim_{m\to\infty} S_{x^{p/q}}(\widetilde{\Pi}_m)$, è necessario, in linguaggio moderno, calcolare

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}}}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+q}{qm}}}.$$

Se $p + q \geq 0$, questo limite è chiaramente uguale a

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{mq}} + \ldots + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{q-1}{mq}}}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{mq}} + \ldots + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+q-1}{mq}}} = \frac{q}{p+q},$$

siccome $\lim_{m\to\infty} (b/a)^{1/m} = 1$. Se $p + q < 0$, si ottiene

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}}}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{q+p}{mq}}} = \lim_{m\to\infty} \frac{-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}} \left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}}\right]}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{-p-q}{mq}}}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}} \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{mq}} + \ldots + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{q-1}{mq}}\right]}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{mq}} + \ldots + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{-p-q-1}{mq}}} = \frac{q}{p+q}.$$

Pertanto, in tutti i casi, si trova

$$A(x^{p/q}) = \frac{q}{p+q}\left[b^{\frac{p+q}{q}} - a^{\frac{p+q}{q}}\right] = \frac{1}{\frac{p}{q}+1}\left[b^{\frac{p}{q}+1} - a^{\frac{p}{q}+1}\right].$$

3. Le somme di Riemann nel calcolo infinitesimale di Leibniz

Sappiamo che i Greci fecero pochi progressi in cinematica e che le prime meditazioni sul moto non uniforme risalgono al Medioevo. Tali considerazioni non sono estranee all'idea geniale di NEWTON (1666) di studiare l'area $A(f|_{[a,x]})$, situata sotto il grafico della restrizione di f ad $[a,x]$, come una funzione dell'estremità x dell'intervallo. Essendo NEWTON in possesso del concetto di **derivata,** egli ottiene, in notazioni moderne, la formula fondamentale

$$\frac{d}{dx}A(f|_{[a,x]}) = f(x), \tag{8}$$

ovvero

$$A(f|_{[a,x]}) = F(x) - F(a), \tag{9}$$

dove F è una **primitiva** di f, ossia una funzione la cui derivata è f. Leggendo da destra a sinistra le tavole delle derivate ottenute poco tempo prima e combinandole con gli sviluppi in serie di un gran numero di funzioni da lui calcolate, NEWTON riconduce il difficile calcolo di $A(f|_{[a,x]})$ a una semplice differenza nel caso in cui la primitiva di f sia nota. Il che è vero per tutti gli esempi trattati prima di lui, con il metodo di esaustione o degli indivisibili.

Poco tempo dopo, tra il 1680 e il 1690, LEIBNIZ arriva allo stesso risultato con un approccio che innalza le somme di Riemann al grado di algoritmo. Denotando con $\Pi_{\mathcal{L}}$ la P-partizione $((a_j,[a_{j-1},a_j]))_{1\le j\le m}$ di $[a,x]$ e ponendo

$$F(x) = F(a_m) = S_f(\Pi_{\mathcal{L}}) = \sum_{j=1}^{m} f(a_j)(a_j - a_{j-1}),$$

LEIBNIZ osserva che

$$\Delta F(a_m) := F(a_m) - F(a_{m-1}) = f(a_m)(a_m - a_{m-1}) =: f(a_m)\Delta a_m,$$

e, da questo,

$$\frac{\Delta F(a_m)}{\Delta a_m} = f(a_m).$$

"Estrapolando" da questo risultato per differenze Δa_m "infinitamente piccole" per le quali $F(a_m)$ "si identifica" con $A(f|_{[a,x]})$, LEIBNIZ ottiene anch'egli la formula (8), scrivendola nella forma

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx, \tag{10}$$

introducendo il celebre simbolo $\int$ e l'espressione $\int f(x)\,dx$, che ricorda la costruzione di $A(f|_{[a,x]})$ come somma di prodotti dei valori di $f(x)$ con le differenze infinitesimali delle ascisse. La stessa estrapolazione applicata all'evidente identità

$$\sum_{j=1}^{m} \Delta f(a_j) = f(x) - f(a),$$

lo conduce alla sua espressione della formula (9):

$$\int df = f(x) - f(a). \tag{11}$$

Le formule (10) e (11), che mostrano il legame tra le due operazioni di derivazione e di integrazione, costituiscono oggi le due versioni del **teorema fondamentale del calcolo differenziale e integrale**, la parola **integrale** essendo stata introdotta nel 1690 dai fratelli BERNOULLI. Jean BERNOULLI può scrivere nelle sue *Lectiones mathematicae de methodo integralium* del 1691 che

> gli integrali dei differenziali sono quelle quantità da cui tali differenziali provengono per differenziazione.

Affermando che

> il calcolo integrale è il metodo con il quale, a partire da una relazione tra i differenziali, si trova la relazione tra le quantità stesse,

Eulero ufficializza, nelle sue *Institutiones Calculi Integralis* del 1768, il concetto di integrale come operazione inversa della derivata, che si manterrà fino all'inizio del XX secolo. Sembra dunque che si possano seppellire le somme di Riemann, non appena si conosca una primitiva F di f. Ma i matematici si rendono presto conto che il calcolo effettivo delle primitive è ben più difficile di quello delle derivate e che, contrariamente alla sua derivata, la primitiva di una funzione elementare non è necessariamente una funzione elementare.

Scacciate dal paradiso dell'analisi pura, le somme di Riemann si rifugiano nel **calcolo numerico** e, nell'opera sopra citata, Eulero le utilizza per calcolare approssimativamente l'integrale di funzioni f la cui primitiva non sia esplicitamente nota. Ponendosi il problema di rendere arbitrariamente piccola la differenza tra le somme di Riemann $S_f(\Pi_{\mathcal{L}})$ e l'integrale cercato, prendendo delle P-partizioni più fini, Eulero fa la seguente profetica osservazione, sulla quale torneremo in seguito:

> Abbiamo già osservato che le distanze $a_j - a_{j-1}$, per le quali x è supposto crescere successivamente, devono essere prese molto piccole affinché i corrispondenti valori $f(a_{j-1})$, $f(a_j)$ non differiscano a loro volta di molto l'uno dall'altro; a partire da ciò, bisogna giudicare se gli intervalli $a_1 - a,\ a_2 - a_1, \ldots$ devono essere presi uguali o diversi. Infatti, lì dove il valore di $f(x)$ non cambia molto quando x varia, l'intervallo sul quale x cresce può essere preso grande senza pericolo. D'altra parte, lì dove cambiamenti poco importanti di x conducono a delle variazioni violente di $f(x)$, si dovrà prendere l'intervallo molto piccolo.

D'altro canto, i metodi numerici di calcolo degli integrali conducono spesso a delle somme di Riemann associate a delle P-partizioni non equidistanti. Ad esempio, il **metodo di** Simpson conduce alla P-partizione

$$\left(a, \left[a, a + \frac{(b-a)}{6}\right]\right), \left(\frac{a+b}{2}, \left[a + \frac{(b-a)}{6}, \frac{a+b}{2}\right]\right),$$
$$\left(\frac{a+b}{2}, \left[\frac{a+b}{2}, b - \frac{(b-a)}{6}\right]\right), \left(b, \left[b - \frac{(b-a)}{6}, b\right]\right).$$

4. Le somme di Riemann e la primitivabilità delle funzioni continue ad opera di Cauchy

Motivato da un lato da alcune situazioni in cui il concetto di integrale come inverso della derivata si dimostra insufficiente (lavori di FOURIER sulle funzioni discontinue e di POISSON sulle funzioni complesse) e da considerazioni pedagogiche nate dal suo insegnamento (contrastato) all'Ecole Polytechnique, CAUCHY, invertendo genialmente l'ordine di presentazione classica del calcolo integrale, fa rientrare le somme di Riemann nell'ambito dell'analisi pura. Nel suo *Analyse algébrique* del 1821, CAUCHY mostra l'importanza delle funzioni **continue.** Due anni più tardi, in una memoria del *Journal de l'Ecole Polytechnique,* si impegna a dimostrare che ogni funzione continua possiede una primitiva, che sia o no esplicitamente calcolabile:

> Considero ciascun integrale come se fosse proprio la somma dei valori infinitamente piccoli dell'espressione differenziale situata sotto il segno di integrale, che corrisponde ai diversi valori della variabile contenuta tra gli estremi in questione. Quando si adotta questo modo di guardare l'integrale definito, si dimostra facilmente che tale integrale ha un valore unico e finito quando, essendo i due estremi della variabile finiti, gli integrandi restano finiti e continui tra questi estremi [...] Mi sembra che questo modo di guardare un integrale definito dovrebbe essere adottato di preferenza, come ho fatto io, perché è valido in tutti i casi, anche per quelli in cui non possiamo generalmente passare dalla funzione sotto il segno di integrale alla funzione primitiva.

Il *Résumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal* del 1823 contiene osservazioni analoghe:

> Nel calcolo integrale, mi è sembrato necessario dimostrare in maniera generale l'esistenza degli integrali o delle funzioni primitive prima di far conoscere le loro diverse proprietà. Per arrivarci, è stato in primo luogo necessario stabilire la nozione di integrale preso tra gli estremi

> dati, o integrale definito. Potendo questi integrali essere talvolta infiniti o indeterminati, era essenziale stabilire in quali casi essi conservano un valore unico e finito.

Nella ventunesima lezione del suo *Résumé,* CAUCHY dimostra che se f è (uniformemente) continua su I, esiste un unico numero reale J con la seguente proprietà: *per ogni* $\epsilon > 0$, *esiste un* $\delta > 0$ *tale che* $|S_f(\Pi_{\mathcal{L}}) - J| \leq \epsilon$ *per ogni P-partizione* $\Pi_{\mathcal{L}} = ((a_j, [a_{j-1}, a_j]))_{1 \leq j \leq m}$ *per la quale* $\max_{1 \leq j \leq m} (a_j - a_{j-1}) \leq \delta$. Questo numero reale J viene indicato con $\int_a^b f(x)\, dx$ e chiamato l'**integrale definito di f su** $[a, b]$. Nella lezione seguente, CAUCHY mostra che lo stesso risultato continua a valere se si sostituisce $\Pi_{\mathcal{L}}$ con qualsiasi P-partizione $\Pi = ((x_j, [a_{j-1}, a_j]))_{1 \leq j \leq m}$ tale che $\max_{1 \leq j \leq m} (a_j - a_{j-1}) \leq \delta$.

L'ambito delle funzioni continue in cui si pone CAUCHY fornisce alle formule (10) e (11) una notevole simmetria. Quando f è continua su I, l'**integrale indefinito** $x \mapsto \int_a^x f(s)\, ds$ è derivabile per ogni $x \in I$, e

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(s)\, ds = f(x) \tag{12}$$

(è quindi una primitiva di f). D'altra parte, se f possiede su I una derivata *continua* df/dx, si ha, per ogni $x \in I$,

$$\int_a^x \frac{df}{dx}(s)\, ds = f(x) - f(a). \tag{13}$$

Tuttavia, CAUCHY deve rinunciare alle somme di Riemann per definire l'integrale delle funzioni che tendono all'infinito ad almeno una delle due estremità dell'intervallo o per definire l'integrale delle funzioni continue su un intervallo non limitato. Egli fa allora ricorso ad un ulteriore limite del tipo

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx, \quad \text{oppure} \quad \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\, dx,$$

per introdurre quelli che oggi chiamiamo **integrali impropri**.

5. Le somme di Riemann e la prima teoria dell'integrale

La tesi per l'abilitazione all'insegnamento universitario di RIEMANN, intitolata *Sulla possibilità di rappresentare una funzione con una serie trigonometrica,* [1] è presentata nel 1854 ma pubblicata solamente nel 1867, un anno dopo la morte prematura del suo autore. Il quarto paragrafo inizia modestamente con queste parole:

> L'incertezza che regna ancora su qualche punto fondamentale della teoria degli integrali definiti ci obbliga a inserire qui alcune osservazioni sulla nozione di integrale definito e sulla generalità alla quale essa è estendibile. Per cominciare, cosa si intende per $\int_a^b f(x)\,dx$?

Le "alcune osservazioni", che prenderanno meno di sette pagine, costituiscono la prima **teoria dell'integrazione** della storia della matematica e segnano la nascita dell'analisi reale moderna. RIEMANN prende come punto di partenza la proprietà di approssimazione dell'integrale di una funzione continua introdotta da CAUCHY, quella che utilizza le P-partizioni generali e, come scrive LEBESGUE nel 1904,

> Riemann porta la sua attenzione sulla procedura operativa che permette, nel caso delle funzioni continue, di calcolare l'integrale con l'approssimazione voluta, e si domanda in quali casi tale procedura applicata a delle funzioni discontinue fornisce un numero determinato. Cauchy applicava la sua procedura di definizione dell'integrale solamente a delle funzioni considerate a priori interessanti: le funzioni continue; adesso, al contrario, sarà interessante ogni funzione per la quale si applica la procedura della definizione.

Si tratta di un'attitudine rivoluzionaria per l'epoca, che il progresso dell'analisi funzionale del XX secolo ha reso del tutto familiare

[1]Titolo originale: Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine Trigonometrische Reihe

oggi. Dunque, f è **integrabile nel senso di Riemann** (o **R-integrabile**) **su** I se si può trovare un numero reale J con la seguente proprietà: *per ogni* $\epsilon > 0$, *esiste un* $\delta > 0$ *tale che* $|S_f(\Pi) - J| \leq \epsilon$ *per tutte le P-partizioni* $\Pi = ((x_j, [a_{j-1}, a_j]))_{1 \leq j \leq m}$ *che verificano* $\max_{1 \leq j \leq m}(a_j - a_{j-1}) \leq \delta$. RIEMANN propone quindi di cercare

> la portata e i limiti della definizione precedente

e di rispondere alla domanda:

> Quand'è che una funzione è suscettibile di integrazione?
> Quando non lo è?

Si può immaginare a priori che una definizione plasmata su una procedura adatta per delle funzioni uniformemente continue determinerà delle funzioni "non troppo" discontinue. Eppure, RIEMANN fornisce un esempio di funzione integrabile con un insieme denso di punti di discontinuità, il che fa dire all'ottimista DU BOIS-REYMOND che

> si è spinto il concetto di integrale fino ai suoi limiti estremi.

RIEMANN e i suoi successori cercano di "misurare" l'insieme dei punti di discontinuità di una funzione R-integrabile, ma bisognerà aspettare BOREL e LEBESGUE per la costruzione della teoria della misura che darà la risposta finale a questa domanda, caratterizzando le funzioni R-integrabili come quelle funzioni limitate il cui insieme dei punti di discontinuità ha misura nulla.

Un primo duro attacco portato all'integrale di Riemann mette in luce la sua incapacità di contenere il concetto di integrale fondato sulla nozione di primitiva: non soltanto esistono delle derivate non limitate, ma VOLTERRA trova nel 1881 un esempio di derivata limitata che non è R-integrabile: la formula (13) non si applica a tutte le derivate limitate. D'altra parte, l'integrale indefinito di una funzione R-integrabile f non è necessariamente derivabile nei punti in cui f non è continua: la formula (12) non è vera se f è R-integrabile. La bella simmetria tra derivazione e integrazione indefinita sembra perduta irrimediabilmente. Inoltre, la R-integrabilità sopravvive male nei passaggi al limite: una funzione che sia limite di una successione uniformemente limitata di funzioni R-integrabili non è necessariamente R-integrabile.

6. Le somme di Riemann e l'approssimazione della primitiva

Che siano le somme di Riemann le responsabili dei difetti dell'integrale di Riemann? O bisogna piuttosto biasimare CAUCHY e il suo eccessivo attaccamento alle funzioni uniformemente continue? Se si ritorna alle origini, lo scopo del calcolo differenziale e integrale non è quello di integrare le derivate, ossia le funzioni primitivabili, tanto quanto le funzioni continue? L'approccio riemanniano si scontra in questo caso con una difficoltà fondamentale: mentre ogni funzione continua su un intervallo compatto è ivi uniformemente continua, una funzione derivabile su un tale intervallo non vi è necessariamente uniformemente derivabile. Si può vedere infatti che una tale **derivabilità uniforme** equivale alla continuità della derivata.

Ma, seguendo la strada tracciata da CAUCHY nel caso di una funzione continua, si può cercare, per f primitivabile su $[a,b]$, il tipo di approssimazione che intercorre tra la variazione $F(b)-F(a)$ di una primitiva F di f e le somme di Riemann $S_f(\Pi)$. Se $\epsilon > 0$ è fissato, si può trovare, per ogni $x \in I$, un $\delta(x) > 0$ (che dipende in generale da x perché qui non c'è uniformità!) tale che

$$|F(y)-F(x)-f(x)(y-x)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}|y-x|,$$

quando $y \in I \cap [x-\delta(x), x+\delta(x)]$. Se ne deduce immediatamente che

$$|F(z)-F(y)-f(x)(z-y)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}(z-y),$$

quando y e $z \in I$ sono tali che $x-\delta(x) \leq y \leq x \leq z \leq x+\delta(x)$. Quindi, se $\Pi = ((x_j, [a_{j-1}, a_j]))_{1 \leq j \leq m}$ è una P-partizione che verifica le condizioni

$$x_j - \delta(x_j) \leq a_{j-1} \leq x_j \leq a_j \leq x_j + \delta(x_j), \quad (1 \leq j \leq m), \tag{14}$$

si ha

$$|F(a_j)-F(a_{j-1})-f(x_j)(a_j-a_{j-1})| \leq \frac{\epsilon}{b-a}(a_j-a_{j-1}), \quad (1 \leq j \leq m),$$

e pertanto, sommando queste disuguaglianze,

$$\left| F(b)-F(a)-\sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j-a_{j-1}) \right| \leq \epsilon.$$

Si ottiene così la **proprietà di approssimazione delle primitive** con somme di Riemann: *per ogni* $\epsilon > 0$, *esiste una applicazione* δ *strettamente positiva su* I *tale che*

$$|F(b) - F(a) - S_f(\Pi)| \leq \epsilon,$$

per tutte le P-partizioni Π *che verificano* (14). Una tale P-partizione è chiamata δ-**fine**, e una applicazione strettamente positiva δ su I è chiamata **calibro** su I. Si verifica senza difficoltà che le P-partizioni usate nella definizione dell'integrale di Riemann non sono altro che le P-partizioni δ-fini per un **calibro costante** δ, reliquia dell'uniforme continuità delle funzioni privilegiate da CAUCHY.

Questa proprietà di approssimazione della primitiva pone subito un problema per la sua sopravvivenza: mentre l'esistenza delle P-partizioni δ-fini per un calibro costante δ è assicurata dal fatto che esse si possono effettivamente costruire prendendo gli $a_j - a_{j-1}$ sufficientemente piccoli e gli $x_j \in [a_{j-1}, a_j]$ arbitrariamente, lo stesso non si può fare per un calibro qualunque. L'esistenza di P-partizioni δ-fini in questo caso è fortunatamente garantita da un lemma introdotto da COUSIN nella sua tesi del maggio 1894 sulle funzioni olomorfe di due variabili. Questo **lemma di Cousin** *assicura, per ogni calibro* δ *su* I, *l'esistenza di una P-partizione* δ*-fine.* Esso è equivalente a un risultato più celebre introdotto da BOREL nella sua tesi del giugno 1894 sulle funzioni di una variabile complessa. Questo **lemma di Borel-Lebesgue** è alla base dell'importante nozione di insieme **compatto**. Per la cronaca, le due tesi hanno avuto la stessa commissione (DARBOUX, APPELL, POINCARÉ), ma sembra che nessun collegamento sia stato fatto tra i due risultati prima di FRÉCHET (1924).

7. Le somme di Riemann e una generalizzazione dell'integrale di Lebesgue

Dopo aver imitato CAUCHY per ottenere una proprietà di approssimazione della primitiva di una classe più ampia di funzioni, perché non seguire ora RIEMANN introducendo l'insieme delle funzioni per le quali le somme di Riemann si avvicinano ad un numero reale J nel senso di quella proprietà di approssimazione? Chiamiamo f **P-**

integrabile su I se esiste un numero reale J con la seguente proprietà: *per ogni* $\epsilon > 0$, *esiste un calibro* δ *su* I *tale che* $|S_f(\Pi) - J| \leq \epsilon$, *per tutte le P-partizioni* δ*-fini* Π. Essendo tutti questi ingredienti già noti dal 1894, questa definizione avrebbe potuto essere introdotta da più di un secolo. Eppure essa non è ancora cinquantenne, poiché fu introdotta nel 1957 da KURZWEIL e ritrovata indipendentemente nel 1961 da HENSTOCK.

È evidente che *le funzioni R-integrabili su* I *e le funzioni primitivabili su* I *sono P-integrabili su* I, ed è facile mostrare che questo integrale possiede tutte le proprietà fondamentali che si chiedono a un integrale per bene. Messi in guardia dall'esperienza riemanniana, si potrebbe temere che il nuovo concetto, uscito da una proprietà delle funzioni primitivabili, possa integrare solo funzioni che ne differiscano di "non troppo", come è stato il caso per le funzioni R-integrabili rispetto alle funzioni continue. Siccome sappiamo, da DARBOUX, che le funzioni primitivabili non possono avere discontinuità di tipo "salto", un buon modo per allontanare questi timori è di mettere alla prova la definizione sulla funzione caratteristica dei razionali $\chi_{\mathbb{Q}}$, detta **funzione di Dirichlet,** che possiede discontinuità di tipo "salto" in ogni punto e non è R-integrabile su I. Fin dai lavori di CANTOR (1873), si sa che $\mathbb{Q} \cap I$ è numerabile e può quindi scriversi come $\{r_j : j \in \mathbb{N}\}$. Per chi conosce la serie geometrica, è semplice verificare che $\chi_{\mathbb{Q}}$ è P-integrabile, con integrale nullo, su ogni intervallo compatto, scegliendo, per $\epsilon > 0$, il calibro definito da $\delta(x) = 1$ se x è irrazionale e $\delta(r_j) = \frac{\epsilon}{2^{j+2}}$ $(j \in \mathbb{N})$.

Potrebbe essere un interessante esercizio di "fanta-storia della matematica" immaginare come avrebbe potuto essere l'evoluzione della teoria dell'integrazione nel corso del XX secolo se un matematico visionario avesse introdotto il concetto di P-integrabilità alla fine del XIX secolo. Le cose non sono andate così e il grande avvenimento della "belle époque" è stata l'introduzione della **misura di** BOREL (1896) e della **misura e integrale di** LEBESGUE (1902). Questa generalizzazione dell'integrale di Riemann permette di estendere la formula (13) a tutte le derivate *limitate* df/dx e di mostrare che la formula (12) è vera **quasi ovunque su** I, ossia al di fuori di un insieme di **misura nulla**. Inoltre, la funzione limite di una successione limitata quasi ovunque di funzioni integrabili secondo Lebesgue, o

L-integrabili, è ancora una funzione L-integrabile.

Né LEBESGUE nella sua definizione, né DENJOY (1912) e PERRON (1914), generalizzando la definizione di LEBESGUE per poter integrare *tutte* le derivate, fanno appello alle somme di Riemann. Eppure, la nostalgia di questo venerabile strumento non risparmia i più grandi poiché nel 1909, in un articolo sugli *Annales de Toulouse,* LEBESGUE dimostra che il suo integrale è sempre ottenibile come limite di somme di Riemann associate a *una* successione di P-partizioni (un risultato che HAHN affinerà ancora nel 1914), mentre BOREL, tra il 1910 e il 1920, e DENJOY, tra il 1920 e il 1930, si impegnano a costruire un integrale di tipo Lebesgue con tali somme, ma non ci riescono se non al prezzo di una complicazione notevole delle definizioni.

Quando l'approccio riemanniano resuscita intorno al 1960, bisogna naturalmente confrontare il nuovo integrale con gli integrali introdotti da più di mezzo secolo. KURZWEIL e HENSTOCK mostrano immediatamente che *il nuovo integrale è equivalente all'integrale di Denjoy-Perron* e, pertanto, *f è L-integrabile su I se e solo se f e $|f|$ sono P-integrabili su I.* Per quanto riguarda gli **integrali impropri**, le funzioni trattate, pur non essendo necessariamente L-integrabili, risultano essere P-integrabili e il tradizionale passaggio al limite non è più che un interessante metodo per calcolare un "vero" integrale. Infine, dei teoremi di convergenza più generali di quelli di Lebesgue sono dimostrati per le funzioni P-integrabili.

Si ritrova quindi, nella procedura di Kurzweil-Henstock, l'implementazione teorica del consiglio dato da EULERO nello studio dell'approssimazione numerica di un integrale, e dell'osservazione di FERMAT sul calcolo delle aree associate alle iperboli generalizzate. Si potrà integrare più funzioni o le si integrerà più facilmente qualora le P-partizioni ammissibili siano spinte a essere di **passo variabile.**

L'integrale di Lebesgue, che modifica l'ordine dei valori della funzione nel suo procedimento di somma, può integrare solo le funzioni f per cui anche $|f|$ sia L-integrabile. È un metodo di **integrabilità assoluta.** Il procedimento di somma del nuovo integrale, che al contrario rispetta tale ordine, fornisce una **integrazione non assoluta.** C'è una completa analogia con la teoria delle serie, dove, in assenza di convergenza assoluta, una permutazione o un raggruppamento dei termini può modificare arbitrariamente la somma della serie, o cambiare la convergenza in divergenza.

8. Le somme di Riemann-Stieltjes e gli integrali di Stieltjes

Ritorniamo ancora una volta nel 1894, in cui troviamo un evento di considerevole importanza per quello che sarà lo sviluppo della teoria della misura e dell'integrale nel XX secolo: la pubblicazione negli *Annales de Toulouse* della memoria di STIELTJES sulle frazioni continue. Mentre lo studio delle serie trigonometriche aveva condotto RIEMANN alla sua estensione dell'integrale di Cauchy, quella delle frazioni continue suggerisce a STIELTJES una generalizzazione in tutt'altra direzione dello stesso integrale. Il matematico olandese si ritrova a trattare somme parziali i cui coefficienti sono legati tra loro da delle formule che ricordano quelle dei **momenti** di ordine k di masse situate su una retta. Alcune situazioni conducono STIELTJES a considerare il caso di una distribuzione di masse non necessariamente puntuali e a studiare così, nel sesto capitolo intitolato modestamente *Remarques sur les fonctions croissantes et les intégrales définies,* il limite di somme del tipo

$$\sum_{j=1}^{m} x_j^k [g(a_j) - g(a_{j-1})],$$

o, più generalmente,

$$S_{f,g}(\Pi) = \sum_{j=1}^{m} f(x_j)[g(a_j) - g(a_{j-1})],$$

associate a una P-partizione $\Pi = ((x_j, [a_{j-1}, a_j]))_{1 \leq j \leq m}$ di I, con f continua e g monotona su I. STIELTJES dice che si può dimostrare, come nel caso particolare $g(x) = x$ dell'integrale di Riemann, che esiste un numero reale J con la seguente proprietà: *per ogni* $\epsilon > 0$, *esiste un* $\delta > 0$ *tale che* $|J - S_{f,g}(\Pi)| \leq \epsilon$, *per tutte le P-partizioni* Π *di* I *tali che* $\max_{1 \leq j \leq m}(a_j - a_{j-1}) \leq \delta$. STIELTJES indica tale numero J con $\int_a^b f(x)\, dg(x)$. Quando, date f e g, si può trovare un J che verifichi questa proprietà, esso viene chiamato **integrale di**

Riemann-Stieltjes di f rispetto a g. Si osservi che l'integrale di Riemann-Stieltjes introduce per la prima volta una misura diversa dalla misura geometrica usuale.

Questa estensione dell'integrale non fa molto effetto fino a quando Frigyes Riesz dimostra, nel 1909, che *ogni funzionale lineare e continuo L avente come dominio lo spazio delle funzioni continue su $[a, b]$ si può scrivere come*

$$L(f) = \int_a^b f(x)\, dg(x),$$

per una certa funzione a variazione limitata g. L'attenzione di Lebesgue ne è subito attratta e nel 1910 egli mostra che, per f continua e g a variazione limitata, un cambiamento di variabile riporta l'integrale di Stieltjes a un integrale di Lebesgue del tipo

$$\int_0^{v(b)} f[x(v)]k(v)\, dv, \tag{15}$$

dove $v(x)$ è la **variazione totale** di g su $[a, x]$, $x(v)$ è la funzione inversa di $v(x)$, opportunamente definita sugli intervalli dove v è costante, e $k(v)$ è la derivata, quasi ovunque, di $g(x(v))$. Poiché l'espressione (15) ha ancora senso per delle funzioni f misurabili e limitate, Lebesgue arriva così a una nozione di **integrale di Lebesgue-Stieltjes** o **LS-integrale** di f rispetto a g che, a sua detta, sembra difficile ottenere senza un tale cambiamento di variabile. Ma Lebesgue non sarà un buon profeta poiché, come riconosce lui stesso nel 1922,

> l'affermazione è stata rapidamente smentita dai lavori, molto belli e molto semplici, di W.H. Young, Radon e de la Vallée Poussin. Questi due ultimi Autori, prendendo il punto di vista delle funzioni di dominio e di insieme, hanno mostrato che si definiscono gli integrali di Stieltjes, qualsiasi sia il numero di variabili, sostituendo, nelle definizioni degli integrali delle funzioni continue o delle funzioni sommabili sopra introdotte, la scelta della misura con quella di un'altra funzione di insieme.

Questo è chiaramente il punto di vista divenuto classico al giorno d'oggi. Osserviamo pure che, nel 1917, Van Vleck riconduce ogni integrale di Lebesgue su I di una funzione f tale che $m < f(x) < M$ per $x \in I$, all'integrale di Riemann-Stieltjes $\int_m^M y d\mu(y)$, se $\mu(y)$ è la misura dell'insieme $\{x \in I : m \leq f(x) < y\}$.

Il procedimento di Kurzweil-Henstock permette anch'esso di definire degli **integrali di tipo Stieltjes** molto generali. In effetti, essi hanno introdotto il loro integrale in un contesto ancora più generale. Kurzweil considera nel 1957 delle funzioni U definite su $I \times I$ e associa loro le **somme di Riemann-Stieltjes generalizzate**

$$S(U, \Pi) = \sum_{j=1}^{m} [U(x_j, a_j) - U(x_j, a_{j-1})].$$

La corrispondente integrabilità si definisce introducendo un numero reale J con la seguente proprietà: *per ogni* $\epsilon > 0$, *esiste un calibro* δ *su* I *tale che* $|S(U, \Pi) - J| \leq \epsilon$, *per tutte le P-partizioni* δ*-fini* Π *di* I. Le somme di Riemann-Stieltjes corrispondono alla scelta $U(x, a) = f(x)g(a)$. Dal canto suo, Henstock integra da subito funzioni di punti e di intervalli $h(x, I)$, per le quali la definizione corrispondente si intuisce senza difficoltà partendo dalle somme di Riemann-Stieltjes associate $\sum_{j=1}^m h(x_j, [a_{j-1}, a_j])$.

9. Conclusione

La grande generalità delle somme di Riemann-Stieltjes scelte da Kurzweil e Henstock ha forse costituito un freno involontario alla diffusione del loro originale procedimento di passaggio al limite. Si può aggiungere che, in Kurzweil, il nuovo integrale occupa sette pagine di un difficile articolo sulle equazioni differenziali generalizzate, un concetto che non rientra nel menu abituale degli specialisti nella teoria dell'integrazione.

Tuttavia, oggigiorno l'approccio di Kurzweil-Henstock si sta diffondendo nell'insegnamento di base dell'integrale (si contano una ventina di libri in cui viene utilizzato), e costituisce un'importante fonte di ispirazione nella ricerca contemporanea in analisi reale. La definizione si estende facilmente, non soltanto a funzioni di più variabili, ma pure a delle classi di insiemi astratti. Essa si generalizza in molte direzioni, e questioni come la validità di teoremi di tipo Stokes-Cartan per forme differenziali non differenziabili con continuità, o nuovi teoremi di convergenza, o l'utilizzo di tali integrali nello studio di equazioni differenziali o integrali generalizzate, di integrali di tipo Feynman e nella convergenza non assoluta di serie multiple sono all'ordine del giorno. Così come ogni fascicolo della rivista *Real Analysis Exchange* contiene vari articoli a riguardo.

Sembra dunque che le somme di Riemann-Stieltjes abbiano un promettente avvenire nel calcolo integrale e che potranno ancora riservare, nelle mani di abili analisti, delle interessanti sorprese.

Bibliografia

Qualche opera sulla storia dell'integrale

[1] M.E. Baron, *The Origins of the Infinitesimal Calculus,* Pergamon, Oxford, (1969)

[2] U. Bottazzini, *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass,* Springer, New York, (1986)

[3] C.B. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development,* Dover, New York, (1959)

[4] J. Dieudonné éd., *Abrégé d'histoire des mathématiques,* 2 vol., Hermann, Paris, (1978)

[5] C.W. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus,* Springer, New York, (1979)

[6] J.V. Grabiner, *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus,* MIT Press, Cambridge, (1981)

[7] I. Grattan-Guinness, *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann,* MIT Press, Cambridge, (1970)

[8] I. Grattan-Guinness ed., *From the Calculus to Set Theory 1630-1910,* Duckworths, London, (1980)

[9] E. Hairer and G. Wanner, *Analysis by Its History,* Springer, New York, (1996)

[10] Th. Hawkins, *Lebesgue Theory of Integration. Its Origin and Develoment,* Chelsea, New York, (1975)

[11] H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives,* Gauthier-Villars, Paris, 1^e éd. 1904, 2^e éd. (1928)

[12] H. Lebesgue, *La mesure des grandeurs,* Monographies de l'Enseignement mathématique No. 1, Genève, (1935)

[13] F.A. Medvedev, *Scenes from the History of Real Functions,* Birkhäuser, Basel, (1991)

[14] A. Michel, *Constitution de la théorie moderne de l'intégration,* Vrin, Paris, (1992)

[15] I. Pesin, *Classical and Modern Integration Theories,* Academic Press, New York, (1970)

[16] J.P. Pier, *Histoire de l'intégration,* Masson, Paris, (1996)

[17] W.M. Priestley, *Calculus: An Historical Approach,* Springer, New York, (1979)

[18] S. Schwabik and P. Šarmanová, *Malý Pruvodce Historií Integrálu* (Czech), Prometheus, Praha, (1996)

[19] O. Toeplitz, *The Calculus, a Genetic Approach,* The University of Chicago Press, Chicago, (1963)

[20] D. van Dalen and A. Monna, *Sets and Integration,* Wolters-Noordhoff, Groningen, (1972)

Qualche opera di introduzione all'integrale di Kurzweil-Henstock (in ordine cronologico)

[21] R. Henstock, *Theory of Integration,* Butterworths, London, (1963)

[22] J. Mawhin, *Introduction à l'analyse,* Cabay, Louvain-la-Neuve, (1979)

[23] J. Kurzweil, *Nichtabsolut Konvergente Integrale,* Teubner, Leipzig, (1980)

[24] R.M. McLeod, *The Generalized Riemann Integral,* Math. Ass. America, Washington, (1980)

[25] E.J. McShane, *Unified Integration,* Academic Press, New York, (1983)

[26] R. Henstock, *Lecture on the Theory of Integration,* World Scientific, Singapore, (1988)

[27] J. DePree and C. Swartz, *Introduction to Real Analysis,* Wiley, New York, (1988)

[28] P.Y. Lee, *Lanzhou Lectures on Henstock Integration,* World Scientific, Singapore, (1989)

[29] R. Henstock, *The General Theory of Integration,* Clarendon Press, Oxford, (1991)

[30] J. Mawhin, *Analyse. Fondements, techniques, évolution,* De Boeck Université, Paris-Bruxelles, 1992; 2^e éd. (1997)

[31] S. Schwabik, *Generalized Ordinary Differential Equations,* World Scientific, Singapore, (1992)

[32] W.F. Pfeffer, *The Riemann Approach to Integration: Local Geometric Theory,* Cambridge University Press, Cambridge, (1993)

[33] R.A. Gordon, *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock,* American Math. Soc., Providence, RI, (1994)

[34] E. Schechter, *Handbook of Analysis and its Foundations,* Academic Press, San Diego, (1997)

[35] R.G. Bartle, *A Modern Theory of Integration,* American Math. Soc., Providence, RI, (2000)

[36] R.G. Bartle and D.R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis,* 3^{rd} ed., Wiley & Sons, New York, (2000)

[37] J. Kurzweil, *Henstock-Kurzweil Integration: Its Relation to Topological Vector Spaces,* World Scientific, Singapore, (2000)

[38] P.Y. Lee and R. Vyborny, *The Integral. An Easy Approach after Kurzweil and Henstock,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2000)

[39] P.P. Petkov, *Introduction to the Theory of Integral* (Russian), Studii na BIAP No 3, Sofia, (2000)

[40] S. Leader, *The Kurzweil-Henstock Integral and its Differentials,* Marcel Dekker, New York, (2001)

[41] W.F. Pfeffer, *Derivation and Integration,* Cambridge University Press, Cambridge, (2001)

[42] Ch. Swartz, *Gauge Integrals,* World Scientific, Singapore, (2001)

[43] A. Fonda, *Lezioni sulla teoria dell'integrale,* Edizioni Goliardiche, Roma e Trieste, (2001)

Ricevuto 11 Maggio 2005.