Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste
Vol. XXXV, 237–240 (2003)

Les Corps $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-p_o}, \sqrt{d}\right)$ dont les 2-Groupe de Classes sont de Klein, avec $p_0 \equiv 1 \,\mathbf{mod}(4)$, Premier: Correction

Abdelmalek Azizi [(*)]

Résumé. - *Le but de cette note est de corriger l'article [4], que R. Lamjoun à envoyé au journal sans s'assurer que c'est bien la version corrigée du papier. Les résultats de cet article se trouvent aussi dans [7], mais notre méthode est différente de la méthode utilisé dans [7] ou dans [6].*

1. Le Théorème principal

Soit $\mathbf{k} = \mathbb{Q}\left(\sqrt{-p_0}, \sqrt{d}\right)$ un corps biquadratique où d (resp. p_0) est un entier naturel sans facteurs carrés (resp. un nombre premier congrue à 1 modulo 4). L'extension $\mathbf{k}/\mathbb{Q}$ possède trois sous-extensions quadratiques $\mathbf{k}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{-p_0})$, $\mathbf{k}_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et $\mathbf{k}_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{-p_0 d})$, de plus $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2$.

Soient E_1, E_2 et E_3 respectivement les groupes des unités de $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ et $\mathbf{k}_3$. On désigne par Q l'indice $[E : E_1E_2E_3]$, dans le groupe des unités E de $\mathbf{k}$, du groupe engendré par E_1, E_2 et E_3.

Le Théorème suivant donne tous les d pour lesquels la 2-partie C_2 du groupe de classes C du corps $\mathbf{k}$ est de type (2,2).

Théorème 1. *Soient d (resp. p_0) un entier naturel sans facteurs carrés (resp. un nombre premier $\equiv 1$ mod 4),* $\mathbf{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{-p_0}, \sqrt{d})$

(*) Author's address: A. Azizi, Département de mathématiques Faculté des sciences, Université Mohammed 1, Oujda, Maroc.

et C_2 la 2-partie du groupe de classes de $\mathbf{k}$. Le groupe C_2 est de type (2,2), si et seulement si, $p_0 \equiv 5$ mod(8) et l'une des conditions suivantes est vérifiée:

1. *$d = p$, $p \equiv 1$ mod(8), $\left(\frac{p_0}{p}\right) = -1$;*
2. *$d = 2p$, $p \equiv -1$ mod(4) et $-1 \in \left\{\left(\frac{p_0}{p}\right), \left(\frac{2}{p}\right)\right\}$;*
3. *$d = 2p_0p$, $p \equiv 3$ mod(8) et $\left(\frac{p}{p_0}\right) = 1$;*
4. *$d = p_0p$, $p \equiv -1$ mod(4) et $\left(\frac{p}{p_0}\right) = 1$;*
5. *$d = p_0p$, $p \equiv 5$ mod(8) et $\left(\frac{p}{p_o}\right) = -1$.*

2. Justifications

2.1. Corrections des erreurs de calcul de nombres de classes dans [4]

1) Cas où $d = 2$.

Dans ce cas, $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{-p_0}, \sqrt{2})$. Comme l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ est de norme -1, alors $Q = 1$. Par suite la 2-partie du nombre de classes de $\mathbf{K}$ est égale à 2.

2) Cas où $d = p_0p$, avec $p_0 \equiv 5$ mod 8, $p \equiv 1$ mod 4.

Dans ce cas la 2-partie du nombre de classes de $\mathbf{K}$ est égale à 4 si et seulement si on a l'un des deux cas suivants

i. $d = p_0p$, $p \equiv 5$ mod(8), $\left(\frac{p}{p_0}\right) = -1$ et $Q = 1$.

ii. $d = p_0p$, $p \equiv 5$ mod(8), $\left(\frac{p}{p_0}\right) = 1$, $\left(\frac{p}{p_0}\right)_4 \cdot \left(\frac{p_0}{p}\right)_4 = -1$ et $Q = 1$.

Dans le cas (i) l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ est de norme -1 tandis que dans le cas (ii) elle est de norme 1 (voir [5]). De plus, dans le cas (i) $Q = 1$ du fait que l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ est de norme -1; et on vérifie facilement que dans le cas (ii), l'indice des unités Q est égal à 2. En effet, il suffit de voir que si $\epsilon = x + y\sqrt{d}$ est l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ alors $2p_0(x \mp 1)$ est un carré dans $\mathbf{N}$ (pour plus de détail sur le calcul de Q, voir [2], [3] ou [1]). Par suite, la 2-partie du nombre de classes de $\mathbf{K}$ est égale à 4 si et seulement si la condition (i) est vérifiée.

3) Cas où $d = p_0p$, avec $p_0 \equiv 1 \bmod 8$, $p \equiv -1 \bmod 4$.

De la même facon que pour le cas précédent, on vérifie que l'indice des unités Q est égal à 2. Par suite la 2-partie du nombre de classes de $\mathbf{K}$ est égale à 8.

2.2. Corrections d'autres erreurs dans [4]

1) Proposition 4.4 page 21 de [4].

Dans cette proposition, il faut prendre en considération les idéaux à l'infini. Ainsi dans le cas (i) le nombre des idéaux ramifiés dans $\mathbf{k}/\mathbf{k}_2$ est $t = 5$. Par suite $C_2' = C_2$. Comme le nombre de classes de $\mathbf{k}_2$ est impair, alors d'après le lemme 4.3, C_2 est de type $(2, 2)$. Ce qui donne le cas (1) du Théorème. Pour les deux autres cas de cette proposition, le nombre t devient $t = 4$, mais le groupe C_2 reste cyclique.

2) Proposition 4.6 page 22 de [4].

Dans cette proposition, il ne reste que le premier cas; puisque dans le deusième cas la 2-partie du nombre de classes de $\mathbf{k}$ est égale à 8. Dans ce cas aussi, le groupe C_2 est de type $(2, 2)$; en effet: $d = p_0p$, $p \equiv 5 \bmod(8)$ et $\left(\frac{p}{p_o}\right) = -1$. Par suite 2 est ramifié dans $\mathbf{Q}(\sqrt{-p})/\mathbf{Q}$ et se décompose comlètement dans $\mathbf{Q}(\sqrt{d})/\mathbf{Q}$. On pose $\mathbf{k}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{-p})$, $\mathbf{k} = \mathbf{Q}(\sqrt{-p}, \sqrt{d})$ et $A_{\mathbf{k}_0}$(respectivement $A_{\mathbf{k}}$) l'anneau des entiers de $\mathbf{k}_0$(respectivement $\mathbf{k}$). On vérifie facilement que l'idéal I tel que $2A_{\mathbf{k}_0} = I^2$ est d'ordre 2 et il existe deux idéaux P_1 et P_2 de $\mathbf{k}$ tel que $IA_{\mathbf{k}} = P_1P_2$. L'idéal $IA_{\mathbf{k}}$ n'est pas principal, car sinon on trouve que $\sqrt{2}$ ou bien $\sqrt{-2}$ ou bien i appartient à $\mathbf{k}$; ce qui n'est pas le cas.

Soit h_1 la partie impaire du nombre de classes de $\mathbf{k}$; alors la classe de $P_1^{h_1}$ est un élément de C_2 et sa norme est la classe de l'idéal $I^{h_1}A_{\mathbf{k}}$ qui est d'ordre 2. Ainsi, en utilisant le lemme 4.3. (ii), on trouve que C_2 est de type $(2, 2)$. Ce qui donne le cas (5) du Théorème.

Remerciement:

Je remercie vivement mon ami E. Benjamin qui m'a fait remarquer qu'il y a des erreurs dans [4].

References

[1] A. Azizi, *Sur le groupe de classes d'idéaux de* $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$, Rendiconti del circolo matematico di Palermo **48** (1999), 71–92.

[2] A. Azizi, *Unités de certains corps de nombres imaginaires et abéliens sur* $\mathbf{Q}$, Annales des Sciences Mathématiques du Québec **23** (1999), no. 1, 87–93.

[3] A. Azizi, *Sur la capitulation des 2-classes d'idéaux de* $\mathbf{Q}(\sqrt{2pq}, i)$ *où* $p \equiv -q \equiv 1 \bmod 4$, Acta Arithmetica **94** (2000), no. 4.

[4] A. Azizi et R. Lamjoun, *Les corps* $\mathbf{Q}\left(\sqrt{-p_o}, \sqrt{d}\right)$ *dont les 2-groupe de classes sont de Klein, avec* $p_o \equiv 1\, mod(4)$, *Premier*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste **31** (1999), 1–24.

[5] R. Kučera, *On the parity of the class number of a biquadratic field*, J. Number Theory **52** (1995), 43–52.

[6] T. M. McCall, C. J. Parry, and R. R. Ranalli, *Imaginary bicyclic biquadratic fields with cyclic 2-class group*, J. Number Theory **53** (1995), 88–99.

[7] T. M. McCall, C. J. Parry, and R. R. Ranalli, *The 2-rank of the class group of imaginary bicyclic biquadratic fields*, Can. J. Math. **48** (1997), no. 2, 283–300.

Received June 19, 2002.