Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste
Vol. XXXIII, 127–199 (2001)

Insiemi ed Operatori "Piccoli" in Analisi Funzionale

Jürgen Appell (*)

Summary. - *We provide of comparison of different concepts of "smallness" of sets and operators which frequently occur in real analysis, measure theory, functional analysis, and operator theory. Typical examples are nullsets, sets of first category, sets of small Hausdorff dimension, and sets which are "small" from some metric or topological viewpoint. The presentation is elementary and selfcontained, with a particular emphasis on examples and counterexamples, rather than abstract theorems in great generality.*

Contents

(*) Author's address: Jürgen Appell, Mathematisches Institut, Universität Würzburg Am Hubland D-97074 Würzburg (Germany), e-mail: appell@mathematik.uni-wuerzburg.de
Subject Classification: 26A15, 26A16, 26A30, 26B40, 28A20, 28A78, 47H09, 47H10, 54E52
Keywords: nullset, Baire category, Lebesgue measure, microscopic set, Cantor set, F_σ-set, measurable function, homeomorphism, Cantor function, Carathéodory function, Scorza-Dragoni function, Hausdorff measure, Hausdorff dimension, covering dimension, fractal, contractive operator, measure of noncompactness, condensing operator, metric fixed point theory

Introduzione

Lo scopo di questo survey è di fornire una certa varietà di metodi per studiare la "grandezza" e la "piccolezza" di insiemi e di operatori da diversi punti di vista. Metodi importanti per caratterizzare la grandezza di un insieme sono legati ai concetti di:

- *cardinalità* (numero di elementi, insiemi numerabili e non);
- *misura* (misura nulla, proprietà "quasi ovunque");
- *categoria* (insiemi mai densi, 1^a e 2^a categoria);
- *dimensione* (dimensione di Hausdorff, insiemi "frattali");
- *capacità* (potenziale di Newton, capacità di Choquet);
- *metrica* (diametro di un insieme, operatori contrattivi);
- *compattezza* (misure di non compattezza, operatori condensanti).

Alcuni di questi concetti sono legati tra loro tramite implicazioni banali (p. es., ogni insieme numerabile è di misura (di Lebesgue) nulla e di 1^a categoria), mentre altri sono indipendenti, o possono addirittura essere "complementari". Ad esempio, si può decomporre l'asse reale nella forma $\mathbb{R} = M \cup N$ con M di 1^a categoria e N di misura nulla. Ovviamente, non c'è nulla di paradossale nel fatto che un insieme è "piccolo" da un certo punto di vista, ma "grande" da un altro.

Dimostrare la piccolezza di un insieme può essere un metodo semplice ed efficace per ottenere dei teoremi di esistenza, sia pure non costruttivi. Esempio molto banale: il fatto che $\mathbb{Q}$ sia numerabile, ma $\mathbb{R}$ non lo è, implica l'esistenza di numeri irrazionali; inoltre, la "maggior parte" di $\mathbb{R}$ è costituita da numeri irrazionali. Esempio meno banale: il fatto che $C^1([0,1])$ sia di 1^a categoria in $C([0,1])$ implica l'esistenza di funzioni continue non differenziabili; inoltre, si può dimostrare che la "maggior parte" di $C([0,1])$ è costituita da funzioni che non ammettono né derivata destra né sinistra in alcun punto.

Cosa intendiamo più precisamente con "insiemi piccoli"? In primo luogo esaminiamo la risposta nel caso di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. L'idea generale sta nel distinguere certe famiglie[1] $\mathfrak{P}$ di insiemi $M \subset \mathbb{R}$ t.c. siano soddisfatte le seguenti cinque proprietà assiomatiche:

(a) se $M \in \mathfrak{P}$ e $N \subseteq M$, allora $N \in \mathfrak{P}$;

(b) se $M_1, M_2, M_3, \ldots \in \mathfrak{P}$, allora $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots \in \mathfrak{P}$;

(c) se $M \in \mathfrak{P}$ e $x \in \mathbb{R}$, allora $M + x \in \mathfrak{P}$;

(d) se $M \in \mathfrak{P}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lambda M \in \mathfrak{P}$;

(e) $\mathbb{R} \notin \mathfrak{P}$.

Le condizioni (a) - (e) garantiscono infatti che, se una certa proprietà $P(x)$ è vera per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus M$, dove M appartiene a qualche famiglia $\mathfrak{P}$, allora per provare l'esistenza di un x con $P(x)$ possiamo ignorare un numero finito o numerabile di insiemi in $\mathfrak{P}$. Alcuni esempi importanti di famiglie $\mathfrak{P}$ sono quelle degli insiemi numerabili, degli insiemi di misura nulla e degli insiemi di 1^a categoria che considereremo più avanti.

Questo survey consiste di 9 paragrafi. Nel §1 studiamo *insiemi di misura nulla* sulla retta reale e diamo, tra l'altro, una caratterizzazione delle funzioni f per cui l'insieme $D(f)$ dei *punti di discontinuità* di f ha misura nulla. Nel §2 ci interessiamo di funzioni f, anche di due variabili, che sono continue "a prescindere da un sottoinsieme di misura piccola"; questo ci porta alle *condizioni di Carathéodory e di Scorza-Dragoni*. Il §3 è dedicato allo studio di *insiemi di 1^a categoria*, da una parte, e di *insiemi di tipo F_σ*, dall'altra. Un confronto tra insiemi numerabili, di misura nulla, di 1^a categoria e di tipo F_σ

[1] Una famiglia di sottoinsiemi con le proprietà (a) e (b) viene spesso chiamata un *σ-ideale*.

verrà esposto nel §4. In particolare, caratterizzeremo le funzioni f per le quali l'insieme $D(f)$ appartiene ad una di queste classi.

Dopo l'introduzione di varie classi di insiemi "piccoli", ci interessiamo nel § 5 del problema della *conservazione* di queste proprietà di piccolezza per mappe "regolari" di opportune classi (p. es. omeomorfismi).

Un concetto di piccolezza un po' diverso, che recentemente è diventato particolarmente importante nella teoria dei "frattali", è quello della *misura di Hausdorff*. La misura e la dimensione di Hausdorff sono presentate nel §6 in alcuni casi elementari. Nel §7 consideriamo *operatori contrattivi* in spazi metrici, mentre nel §8 introduciamo la nozione (topologica) della *misura di non compattezza* di un insieme, nonché la classe degli *operatori condensanti.* In questo caso occorre considerare anche spazi normati di dimensione infinita per evitare situazioni banali. Infine, nel §9 facciamo un confronto tra varie classi di operatori (fortemente o debolmente) condensanti per studiare la piccolezza di queste classi. In particolare, questo confronto fornisce informazioni sulla "probabilità" affinché un operatore non compatto abbia un punto fisso in un insieme limitato chiuso convesso invariante.

Sottolineamo che, sia per la scelta dei risultati che per la loro presentazione, questo survey è *molto elementare* e quindi non richiede conoscenze specialistiche. Di conseguenza, questo testo si rivolge in primo luogo ad un pubblico non specializzato che dispone di una conoscenza di base in analisi matematica, teoria della misura e analisi funzionale con applicazioni agli operatori lineari e non lineari. E' stata l'esperienza dell'autore, secondo la quale argomenti di questo tipo raramente vengono presentati in un corso di analisi matematica (per mancanza di tempo), o di teoria della misura (per mancanza di voglia), o di analisi funzionale (per mancanza di opportunità), che ha spinto lo stesso a scrivere questo survey. Per la presentazione la Scuola Estiva a Gorizia è stata un'occasione stimolante e, perché no?, anche divertente.

Quasi tutti i risultati (e controesempi!) presentati nel seguito si riferiscono al *caso scalare*, cioè ad $\mathbb{R}$. E' quasi evidente che tutti questi risultati possono essere generalizzati nel quadro di una teoria molto più astratta. In alcune situazioni (p. es., nella teoria delle misure di non compattezza e degli operatori condensanti, vedi il §8) è necessario considerare il caso di *dimensione infinita* per non cadere in situazioni banali. Altrimenti ci si limiterà, ove è possibile, al caso scalare, poiché già in questo caso si riescono ad apprezzare sia la "bellezza" dei risultati che il carattere particolare, talvolta anche "patologico", dei controesempi. Insomma, cerchiamo di seguire il noto motto didattico

Only wimps do the general case – real teachers tackle examples.

Sia la terminologia che le notazioni di questo survey saranno più o meno standard. Indichiamo dappertutto con $\lambda(M)$ la misura di Lebesgue di un insieme misurabile (secondo Lebesgue) $M \subset \mathbb{R}$. In particolare, $\lambda([a,b]) = \lambda([a,b)) = \lambda((a,b]) = \lambda((a,b)) = b-a$. In uno spazio metrico X scriviamo $\overline{M}$ per la chiusura, M^0 per l'interno e ∂M per il bordo di $M \subseteq X$. Inoltre, con $B_r(x) = \{y : y \in X,\ d(y,x) < r\}$ denotiamo la palla (aperta) di raggio $r > 0$ e centro $x \in X$. Se X è uno spazio vettoriale normato, denotiamo con $co\, M$ l'involucro convesso e con $\overline{co}\, M$ l'involucro convesso chiuso di $M \subseteq X$.

1. Insiemi di misura nulla

Ricordiamo che un insieme $N \subset \mathbb{R}$ ha *misura nulla* ($\lambda(N) = 0$) se per ogni $\varepsilon > 0$ si può trovare una successione $(I_n)_n$ di intervalli t.c.

$$N \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \leq \varepsilon.$$

Ad esempio, ogni insieme numerabile $N = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ ha ovviamente misura nulla: infatti, dato $\varepsilon > 0$, scegliendo $I_n = [x_n - \varepsilon 2^{-(n+1)}, x_n + \varepsilon 2^{-(n+1)}]$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \varepsilon.$$

E' ben noto, però, che esistono anche insiemi di misura nulla non numerabili. L'esempio classico è il cosidetto "discontinuo di Cantor" (chiamato anche "polvere di Cantor"):

ESEMPIO 1.1. *Sia* $C_0 = [0,1]$,

$$C_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1],$$

$$C_2 = [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1],$$

$$C_3 = [0, \tfrac{1}{27}] \cup [\tfrac{2}{27}, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{7}{27}] \cup [\tfrac{8}{27}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{19}{27}] \cup [\tfrac{20}{27}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, \tfrac{25}{27}] \cup [\tfrac{26}{27}, 1],$$

e così via. Poniamo

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n. \tag{1.1}$$

L'insieme (1.1) viene chiamato discontinuo di Cantor*. Essendo intersezione di sottoinsiemi chiusi di* $[0,1]$*,* C *è compatto. Inoltre,* C *è perfetto.*[2] *Ora, la lunghezza totale degli intervalli "cancellati" è*

$$\frac{1}{3} + 2\frac{1}{9} + 4\frac{1}{27} + \ldots = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1,$$

e quindi $\lambda(C) = 0$*, cioè* C *ha misura nulla.*

D'altro canto, C *non è numerabile. Infatti, possiamo scrivere ogni numero reale* $x \in [0,1]$ *in forma "ternaria"*

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 3^{-n} \qquad (x_n \in \{0,1,2\}), \tag{1.2}$$

e si ha $x \in C$ *se e solo se* $x_n \neq 1$ *per ogni* n *nella (1.2). Ma l'insieme dei numeri (1.2) con* $x_n \in \{0,2\}$ *non è numerabile.*

Dall'uguaglianza $\lambda(C) = 0$ *segue, tra l'altro, che* C *non ha punti interni, cioè* $C^0 = \emptyset$.

[2] Un insieme si chiama *perfetto*, se consiste solo di punti di accumulazione, cioè se non ha punti isolati. E' un fatto di notevole importanza che un insieme chiuso perfetto in uno spazio metrico completo separabile è sempre non numerabile.

Osserviamo che si possono definire anche insiemi di Cantor di misura positiva. Dato $\alpha \in (0,1)$, poniamo $C_0^\alpha = [0,1]$,

$$C_1^\alpha = [0, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\alpha] \cup [\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\alpha, 1],$$

$$C_2^\alpha = [0, \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{16}\alpha] \cup [\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{16}\alpha, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\alpha] \cup [\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\alpha, \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{16}\alpha] \cup [\tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{16}\alpha, 1],$$

$$\begin{aligned} C_3^\alpha = {} & [0, \tfrac{1}{8} - \tfrac{7}{64}\alpha] \cup [\tfrac{1}{8} - \tfrac{5}{64}\alpha, \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{16}\alpha] \\ & \cup [\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{16}\alpha, \tfrac{3}{8} - \tfrac{11}{64}\alpha] \cup [\tfrac{3}{8} - \tfrac{9}{64}\alpha, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\alpha] \\ & \cup [\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\alpha, \tfrac{5}{8} + \tfrac{13}{64}\alpha] \cup [\tfrac{5}{8} + \tfrac{15}{64}\alpha, \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{16}\alpha] \\ & \cup [\tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{16}\alpha, \tfrac{7}{8} + \tfrac{5}{64}\alpha] \cup [\tfrac{7}{8} + \tfrac{7}{64}\alpha, 1], \end{aligned}$$

e così via. Definiamo come prima

$$C^\alpha = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n^\alpha. \tag{1.3}$$

Abbiamo così tolto da $[0,1]$ intervalli di lunghezza totale

$$\frac{1}{2}\alpha + 2\frac{1}{8}\alpha + 4\frac{1}{32}\alpha + \ldots = \frac{\alpha}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\alpha}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \alpha,$$

e quindi $\lambda(C^\alpha) = 1 - \alpha$.

Osserviamo ancora che gli insiemi C e C^α sono *totalmente sconnessi*, cioè le loro componenti connesse contengono un punto solo.[3]

Ci sono altri metodi per costruire un "discontinuo" di misura positiva. Per esempio, sia $G \subset (0,1)$ un aperto con $\lambda(G) = \alpha < 1$ che contiene tutti i punti razionali di $(0,1)$. Allora l'insieme $M = [0,1]\backslash G$ ha misura $\lambda(M) = 1-\alpha$ ed è compatto, perfetto e totalmente sconnesso.

[3]Da questo fatto deriva il nome "discontinuo di Cantor" per gli insiemi (1.1) e (1.3). Ricordiamo che gli unici sottoinsiemi connessi della retta reale sono gli intervalli.

Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Denotiamo con $D(f)$ l'insieme dei punti $x \in [0,1]$ in cui f è *discontinua*. Il seguente Teorema 1.2 caratterizza *l'integrabilità* di f (secondo Riemann) in termini della grandezza di $D(f)$; una precisazione importante di questo teorema sarà data più tardi (Teorema 5.5).

Conviene preliminarmente introdurre alcune notazioni. Per ogni $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ed ogni intervallo $I \subseteq [0,1]$ denotiamo con

$$\omega(f; I) = \sup\{f(x) : x \in I\} - \inf\{f(x) : x \in I\} \tag{1.4}$$

l'oscillazione di f su I. Inoltre, per $x \in [0,1]$ scriviamo

$$\omega(f; x) = \lim_{\delta \to 0+} \omega(f; (x - \delta, x + \delta)) \tag{1.5}$$

per *l'oscillazione di f in x.* Ovviamente, $\omega(f; x) = 0$ se e solo se f è continua in x.

Teorema 1.2. (Vitali-Lebesgue). Una funzione limitata $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è R-integrabile se e solo se $D(f)$ ha misura nulla.

Dimostrazione. Poniamo

$$\nu(f; I) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{m} \omega(f; I_j)\lambda(I_j) : \{I_1, \ldots, I_m\} \text{ partizione di } I\right\},$$

dove l'estremo inferiore si calcola su tutte le partizioni finite di $I \subseteq [0,1]$ e $\omega(f; I)$ è l'oscillazione (1.4). Dalla definizione di integrale di Riemann si ottiene che $\nu(f; I) = 0$ se e solo se f è R-integrabile su I.

Facciamo prima vedere che $\omega(f; x) < \varepsilon$ per ogni $x \in I$ implica che

$$\nu(f; I) < \varepsilon\lambda(I). \tag{1.6}$$

Infatti, supponiamo per assurdo che $\nu(f; I) \geq \varepsilon\lambda(I)$. Se spezziamo I in due intervalli chiusi della stessa lunghezza, allora per uno di questi intervalli, diciamo I_1, si ha $\nu(f; I_1) \geq \frac{\varepsilon}{2}\lambda(I)$. Se poi si divide I_1 di nuovo in due intervalli chiusi della stessa lunghezza, allora per uno di questi intervalli, diciamo I_2, risulta $\nu(f; I_2) \geq \frac{\varepsilon}{4}\lambda(I)$. In questa maniera si ottiene una successione $(I_n)_n$ di intervalli t.c.

$$\overline{I_n} = I_n, \qquad \lambda(I_n) = \frac{1}{2^n}\lambda(I), \qquad \nu(f; I_n) \geq \frac{\varepsilon}{2^n}\lambda(I).$$

L'intersezione di tutti questi intervalli contiene esattamente un punto x_*, e per questo punto si ha $\omega(f; x_*) < \varepsilon$, quindi anche $\omega(f; J) < \varepsilon$ per qualche intervallo aperto J con $x_* \in J$. Scelto $n \in \mathbb{N}$ con $I_n \subseteq J$ si ha

$$\nu(f; I_n) \leq \omega(f; I_n)\lambda(I_n) = \frac{1}{2^n}\omega(f; I_n)\lambda(I) < \frac{\varepsilon}{2^n}\lambda(I) \leq \nu(f; I_n).$$

Ma ciò è assurdo; pertanto la (1.6) è vera.

Passiamo ora alla dimostrazione del Teorema 1.2. Supponiamo prima che f sia R-integrabile su $[0, 1]$ e scriviamo

$$D_k = \{x : 0 \leq x \leq 1, \, \omega(f; x) \geq \tfrac{1}{k}\} \qquad (k \in \mathbb{N}). \tag{1.7}$$

Ovviamente,

$$D(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k. \tag{1.8}$$

Fissato $k \in \mathbb{N}$ si scelga una partizione $\{I_1, \ldots, I_m\}$ di $[0, 1]$ t.c.

$$\sum_{j=1}^{m} \omega(f; I_j)\lambda(I_j) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Poniamo $\{1, \ldots, m\} = J \cup J'$, dove $j \in J$ se e solo se esiste $x \in I_j^0$ con $\omega(f; x) \geq \frac{1}{k}$, e $j \in J'$ se e solo se $\omega(f; x) < \frac{1}{k}$ per ogni $x \in I_j^0$. Allora si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^2} &\geq \sum_{j \in J} \omega(f; I_j)\lambda(I_j) + \sum_{j \in J'} \omega(f; I_j)\lambda(I_j) \\ &\geq \sum_{j \in J} \omega(f; I_j)\lambda(I_j) \geq \frac{1}{k}\sum_{j \in J} \lambda(I_j),\end{aligned}$$

quindi

$$\sum_{j \in J} \lambda(I_j) < \frac{1}{k}.$$

Di conseguenza,

$$\lambda(D_k) \leq \lambda\left(\bigcup_{j\in J} I_j\right) \leq \sum_{j\in J} \lambda(I_j) < \frac{1}{k}.$$

Poiché $\lambda(D_k) \to 0$ per $k \to \infty$, si può dedurre che $\lambda(D(f)) = 0$.

Supponiamo ora che $D(f)$ abbia misura nulla. In virtù della limitatezza di f si possono trovare $M, m \in \mathbb{R}$ con $m \leq f(x) \leq M$ per $0 \leq x \leq 1$. Dato $\varepsilon > 0$, scegliamo $k \in \mathbb{N}$ con $k\varepsilon > M - m + 1$. Il fatto che gli insiemi D_k nella (1.7) siano compatti e di misura nulla per ogni $k \in \mathbb{N}$ implica che si può ricoprire ogni D_k con un numero finito di intervalli disgiunti di lunghezza totale $\leq \frac{1}{k}$. I punti estremi di questi intervalli costituiscono una partizione di $[0,1]$ con intervalli I_i e J_j t.c.

$$\sum_i \lambda(I_i) \leq \frac{1}{k}, \qquad \sup\{\omega(f;x) : x \in J_j\} \leq \frac{1}{k}.$$

La (1.6) implica quindi che

$$\begin{aligned}\nu(f;[0,1]) &= \sum_i \nu(f;I_i) + \sum_j \nu(f;J_j) \\ &\leq (M-m)\sum_i \lambda(I_i) + \frac{1}{k}\sum_j \lambda(J_j) \leq \frac{1}{k}(M-m) + \frac{1}{k} \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue che $\nu(f;[0,1]) = 0$ e quindi f è R-integrabile su $[0,1]$. $\square$

Illustriamo il Teorema 1.2 con una serie di esempi.

Esempio 1.3. *Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è monotona (crescente o decrescente), allora $D(f)$ è al più numerabile e quindi di misura nulla. Di conseguenza, ogni funzione monotona è R-integrabile.*

Si osservi che, viceversa, per ogni insieme numerabile

$$D = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \subset [0,1]$$

si può costruire una funzione monotona (crescente) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *t.c.* $D(f) = D$. *Più precisamente, basta porre*

$$f(x) = \sum_{x > x_n} 2^{-n}.$$

Infatti, f *è continua su* $[0,1] \setminus D$, *ma* $f(x_n+) - f(x_n-) = 2^{-n}$.

ESEMPIO 1.4. *(Dirichlet). Sia* $f = \chi_{\mathbb{Q}} : [0,1] \to \mathbb{R}$ *la funzione caratteristica di* $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. *Allora* $D(f) = [0,1]$ *e quindi* f *non è R-integrabile.*

ESEMPIO 1.5. *(Dirichlet "light"). Sia* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definita da*[4]

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \textit{se} \quad x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \textit{se} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Allora $D(f) = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ *e quindi* f *è R-integrabile (con integrale nullo).*

ESEMPIO 1.6. *Sia* $f = \chi_C : [0,1] \to \mathbb{R}$ *la funzione caratteristica del discontinuo di Cantor (1.1). Allora* $D(f) = C$ *ha misura nulla e quindi* f *è R-integrabile.*

ESEMPIO 1.7. *Sia* $f = \chi_{C^\alpha} : [0,1] \to \mathbb{R}$ *la funzione caratteristica del discontinuo di Cantor (1.3). Allora* $D(f) = C^\alpha$ *non ha misura nulla e quindi* f *non è R-integrabile.*

Gli esempi 1.4 e 1.6 dimostrano che *la funzione caratteristica* χ_M *di un insieme numerabile* $M \subset [0,1]$ *può essere discontinua su un insieme di misura 1, mentre la funzione caratteristica* χ_M *di un insieme non numerabile* $M \subset [0,1]$ *può essere discontinua su un insieme di misura 0.* In generale, sembra interessante studiare il seguente

PROBLEMA 1.8. *Si possono caratterizzare gli insiemi* $D \subseteq [0,1]$ *t.c.* $D = D(f)$ *per qualche funzione* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$*?*

---

[4] Qui supponiamo che p e q siano primi fra loro e poniamo $0 = \frac{0}{1}$, cioè $f(0) = 1$.

La risposta è contenuta nel seguente Teorema 1.9 Ricordiamo che un insieme M si dice *di tipo* F_σ se M è rappresentabile come unione numerabile di sottoinsiemi *chiusi* $M_1, M_2, M_3, \ldots \subseteq M$, cioè

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \qquad \overline{M_n} = M_n.$$

TEOREMA 1.9. *Per ogni funzione* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$*, l'insieme* $D(f)$ *è di tipo* F_σ*. Viceversa, per ogni insieme* $D \subseteq [0,1]$ *di tipo* F_σ *esiste una funzione* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *con* $D(f) = D$*.*

Dimostrazione. Si consideri nuovamente l'oscillazione (1.5). Se

$$\omega(f; x_0) < \varepsilon \quad \text{per qualche} \quad x_0 \in [0,1],$$

allora anche $\omega(f; x) < \varepsilon$ per x sufficientemente vicino ad x_0; ciò significa che gli insiemi $\{x : 0 \leq x \leq 1, \omega(f; x) < \varepsilon\}$ sono aperti per ogni $\varepsilon > 0$. In altre parole, nella rappresentazione (1.8) tutti gli insiemi D_k sono chiusi e quindi $D(f)$ è di tipo F_σ.
Viceversa, sia $D \subseteq [0,1]$ un insieme F_σ, cioè

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n, \qquad \overline{D_n} = D_n.$$

Senza ledere la generalità possiamo supporre che $D_n \subseteq D_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $f_n = \chi_{D_n \setminus (\mathbb{Q} \cap D_n^0)}$ la funzione caratteristica di $D_n \setminus (\mathbb{Q} \cap D_n^0)$, quindi $f_n(x) = 1$ se $x \in \partial D_n$ oppure $x \in D_n$ è irrazionale, e $f_n(x) = 0$ altrimenti. Allora $\omega(f_n; x) = 1$ per $x \in D_n$ e $\omega(f_n; x) = 0$ per $x \in [0,1] \setminus D_n$.

La funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f_n(x)$$

è limitata su $[0,1]$ e continua in ogni punto $x \in [0,1] \setminus D$ (poiché tutte le funzioni f_n sono continue in questi punti). D'altro canto, si ha

$$\omega(f; x) \geq \frac{1}{n!} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \geq \frac{1}{n^2} > 0 \qquad (x \in D_n \setminus D_{n-1}),$$

e quindi f è discontinua in ogni punto $x \in D$. $\square$

Ogni insieme numerabile (p.es. $\mathbb{Q}$) è certamente di tipo F_σ. Un esempio classico di un insieme che *non* è F_σ è l'insieme dei numeri irrazionali.[5] Di conseguenza, *non esiste una funzione* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *che sia continua in ogni punto razionale e discontinua in ogni punto irrazionale* di $[0,1]$, cioè non possiamo costruire un esempio “duale” all'Esempio 1.5.

I Teoremi 1.2 e 1.9 forniscono una caratterizzazione delle funzioni f per le quali $D(f)$ è un insieme di misura nulla o di tipo F_σ. Un'altra caratterizzazione di funzioni f con $D(f)$ “piccolo” si trova nel Teorema 3.5 più avanti.

Diamo ancora un teorema, assai sorprendente, sulla piccolezza dell'insieme dei massimi e minimi (locali) di una funzione f. Diciamo che $y \in \mathbb{R}$ è un *massimo locale* [risp. *minimo locale*] di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se esistono $x \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ t.c. $f(x) = y$ e $f(z) \leq y$ [risp. $f(z) \geq y$] per $|x - z| \leq \delta$.

TEOREMA 1.10. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione qualsiasi. Allora l'insieme*

$$E(f) = \{y : y \text{ è un estremo locale di } f\} \tag{1.9}$$

è numerabile.

Dimostrazione. Supponiamo, senza ledere la generalità, che $E(f)$ consista solo di massimi locali di f. Fissato $y \in E(f)$ si scelga un intervallo $I(y) = [a(y), b(y)]$ con $a(y), b(y) \in \mathbb{Q}$, t.c. $y = \max\{f(x) : x \in I(y)\}$. Per ogni $y_1, y_2 \in E(f)$ con $y_1 \neq y_2$ si ha $I(y_1) \neq I(y_2)$. Ciò significa che l'insieme $\{I(y) : y \in E(f)\}$ è numerabile, essendo $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ numerabile. Di conseguenza, anche $E(f)$ è numerabile, poiché la mappa $y \mapsto I(y)$ è iniettiva. $\square$

E' interessante calcolare $E(f)$ per le funzioni date negli Esempi 1.4 - 1.7. Ad esempio, la funzione di Dirichlet (Esempio 1.4) soddisfa

[5] Ciò sarà dimostrato più avanti (vedi l'osservazione dopo il Teorema 3.2).

$f(x) \in E(f)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, benché f non sia costante su alcun intervallo.

Il ragionamento del Teorema 1.10 si può anche invertire nel senso che, per ogni insieme numerabile $E \subset \mathbb{R}$, esiste una funzione (continua) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $E(f) = E$. Infatti, se scriviamo E nella forma $E = \{y_k : k \in \mathbb{Z}\}$, basta porre $f(k) = y_k$ per $k \in \mathbb{Z}$ ed estendere f linearmente su tutto $\mathbb{R}$.

Data una funzione differenziabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poniamo

$$T(f) = \{f(x) : f'(x) = 0\}. \tag{1.10}$$

Un risultato elementare di Analisi I assicura che sempre $E(f) \subseteq T(f)$ per ogni f differenziabile. Allora si pone il seguente

PROBLEMA 1.11. *Quanto più grande può essere l'insieme $T(f)$ rispetto all'insieme $E(f)$?*

Un risultato di teoria della misura più sofisticato[6] implica che *l'insieme $T(f)$ (e quindi anche $E(f)$) ha sempre misura nulla.* Ciononostante, $T(f)$ può certamente essere non numerabile, anche se $E(f)$ è molto piccolo.

ESEMPIO 1.12. *Sia C il discontinuo di Cantor (1.1) e sia $g(x) = \min\{|x - c| : c \in C\}$. Allora g è continua (poiché $|g(x) - g(y)| \leq |x - y|$) con $g(x) = 0$ su C e $g(x) > 0$ su $\mathbb{R} \setminus C$. Di conseguenza, la primitiva*

$$f(x) = \int_0^x g(t)\, dt \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{1.11}$$

di g è C^1 e strettamente crescente, quindi $E(f) = \emptyset$. D'altro canto, $f'(x) = 0$ se e solo se $x \in C$. Poiché f è iniettiva, l'insieme $T(f) = f(C)$ non è numerabile.

La costruzione dell'Esempio 1.12 può essere utilizzata per dimostrare il seguente risultato più generale: Dato un qualunque insieme chiuso $T \subseteq \mathbb{R}$, esiste una funzione crescente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1

[6]Questo risultato è noto come *Lemma di Sard* oppure *Lemma di Luzin.*

t.c. $T(f) = f(T)$, con $T(f)$ come nella (1.10). Infatti, se poniamo $g(x) = \min\{|x - t| : t \in T\}$, allora g è continua con $g(x) = 0$ su T e $g(x) > 0$ su $\mathbb{R}\setminus T$. Di conseguenza, la funzione (1.11) ha le proprietà richieste. Osserviamo che f è *strettamente* crescente se l'insieme T non contiene intervalli (come nell'Esempio 1.12).

2. Funzioni misurabili e super-misurabili

Ricordiamo che una funzione $f : M \to \mathbb{R}$ si dice *misurabile* (secondo Lebesgue) se l'insieme $f^{-1}((c, \infty)) = \{x : x \in M, f(x) > c\}$ è misurabile (secondo Lebesgue) per ogni $c \in \mathbb{R}$. L'insieme $f^{-1}((c, \infty))$ si può anche sostituire con $f^{-1}([c, \infty))$, $f^{-1}((-\infty, c))$, $f^{-1}((-\infty, c])$, oppure con $f^{-1}(G)$, $G \subseteq \mathbb{R}$ insieme di Borel,[7] ottenendo definizioni equivalenti.

Il seguente teorema classico della teoria della misura dimostra che una funzione f è misurabile se e solo se f è continua "a meno di insiemi arbitrariamente piccoli":

Teorema 2.1. (Luzin-Lebesgue). *Una funzione $f : M \to \mathbb{R}$ è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M_\varepsilon \subset M$ t.c. $\lambda(M \setminus M_\varepsilon) \le \varepsilon$ e la restrizione $f|_{M_\varepsilon} : M_\varepsilon \to \mathbb{R}$ sia continua.*

Dimostrazione. Sia $\{O_1, O_2, O_3, \ldots\}$ una base numerabile della topologia naturale[8] in $\mathbb{R}$ e sia $\varepsilon > 0$. Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è misurabile, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono $F_n \subseteq \mathbb{R}$ chiuso e $G_n \subseteq \mathbb{R}$ aperto t.c.

$$\lambda(G_n \setminus F_n) \le \frac{\varepsilon}{2^n}, \qquad F_n \cap [0,1] \subseteq f^{-1}(O_n) \subseteq G_n \cap [0,1].$$

Poniamo

$$M_\varepsilon = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus F_n).$$

---

[7]Un insieme G in uno spazio metrico X è detto *insieme di Borel*, se G appartiene alla σ-algebra generata dai sottoinsiemi aperti di X. Esempi sono tutti gli insieme aperti o chiusi, nonché unioni e intersezioni numerabili di insiemi aperti o chiusi.

[8]Ad esempio, si possono scegliere tutti gli intervalli (a, b) con a, b razionale.

Allora

$$\lambda([0,1] \setminus M_\varepsilon) \le \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n \setminus F_n)\right) \le \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon.$$

Inoltre,

$$f|_{M_\varepsilon}^{-1}(O_n) = f^{-1}(O_n) \cap M_\varepsilon = F_n \cap M_\varepsilon = G_n \cap M_\varepsilon.$$

L'insieme $f|_{M_\varepsilon}^{-1}(O_n)$ risulta perciò chiuso e aperto in M_ε; ciò implica la continuità della restrizione $f|_{M_\varepsilon}$.

Viceversa, se f soddisfa la condizione del teorema, si può trovare una successione $(M_n)_n$ di insiemi $M_n \subseteq [0,1]$ t.c. $\lambda([0,1]\setminus M_n) \le \frac{1}{n}$ e la restrizione $f|_{M_n} : M_n \to \mathbb{R}$ sia continua. Per ogni insieme aperto $O \subseteq \mathbb{R}$ esiste dunque un insieme aperto $G_n \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $f|_{M_n}^{-1}(O) = G_n \cap M_n$. L'unione $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots$ soddisfa

$$\lambda([0,1] \setminus M) = \lambda\left([0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [0,1] \setminus M_n\right) = 0$$

e

$$f^{-1}(O) \cap M = \bigcup_{n=1}^{\infty}(f^{-1}(O) \cap M_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f|_{M_n}^{-1}(O) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n \cap M_n),$$

quindi

$$f^{-1}(O) = [f^{-1}(O) \cap ([0,1] \setminus M)] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n \cap M_n).$$

Tutti gli insiemi in questa uguglianza sono misurabili e quindi f è misurabile. □

Sia ora $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili, $f = f(x,u)$. Si dice che f è una *funzione di Carathéodory*, se $f(\cdot,u) : [0,1] \to \mathbb{R}$ è misurabile per ogni $u \in \mathbb{R}$ e $f(x,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua per quasi ogni $x \in [0,1]$. Tali funzioni sono molto importanti nella teoria delle equazioni differenziali. Il seguente Teorema 2.2 può considerarsi l'analogo del Teorema 2.1 per funzioni di due variabili. La dimostrazione, però, è assai diversa.

TEOREMA 2.2. *Una funzione* $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è di Carathéodory se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $M_\varepsilon \subset [0,1]$ *t.c.* $\lambda([0,1] \setminus M_\varepsilon) \leq \varepsilon$ *e la restrizione* $f|_{M_\varepsilon \times \mathbb{R}} : M_\varepsilon \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è continua.*

Dimostrazione. Sia $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory. Fissiamo $N \in \mathbb{N}$. Dividiamo l'intervallo $[-N, N]$ in due intervalli $I_1^{(1)} = [-N, 0]$ e $I_2^{(1)} = [0, N]$ della stessa lunghezza N. Successivamente dividiamo l'intervallo $[-N, N]$ in quattro intervalli $I_1^{(2)} = [-N, -\frac{1}{2}N]$, $I_2^{(2)} = [-\frac{1}{2}N, 0]$, $I_3^{(2)} = [0, \frac{1}{2}N]$ e $I_4^{(2)} = [\frac{1}{2}N, N]$ della stessa lunghezza $\frac{1}{2}N$. Proseguendo in questo modo, otteniamo per ogni $p \in \mathbb{N}$ una sequenza di 2^p intervalli $I_1^{(p)}, I_2^{(p)}, \ldots I_{2^p}^{(p)}$ di lunghezza $2^{-(p-1)}N$.

Poniamo

$$\sigma_{p,q}(x) = \sup \{|f(x,u) - f(x,v)| : u, v \in I_q^{(p)}\} \quad (q = 1, 2, \ldots, 2^p)$$

e

$$\sigma_p(x) = \max \{\sigma_{p,1}(x), \ldots, \sigma_{p,2^p}(x)\} \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

La continuità di $f(x, \cdot)$ assicura che $\sigma_p(x) \to 0$ q.o. su $[0,1]$ per $p \to \infty$.

Denotiamo con $z_q^{(p)}$ il centro dell'intervallo $I_q^{(p)}$ $(p = 1, 2, \ldots;$ $q = 1, 2, \ldots, 2^p)$. Sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi esiste $\tilde{M}_1 \subset [0,1]$ t.c. $\lambda([0,1] \setminus \tilde{M}_1) \leq \varepsilon 2^{-(N+2)}$ e la restrizione $f(\cdot, z_q^{(1)})|_{\tilde{M}_1}$ è continua su $\tilde{M}_1$ per $q = 1, 2$. Dopo di che scegliamo $\tilde{M}_2 \subset \tilde{M}_1$ t.c. $\lambda([0,1] \setminus \tilde{M}_2) \leq \varepsilon [2^{-(N+2)} + 2^{-(N+3)}]$ e la restrizione $f(\cdot, z_q^{(2)})|_{\tilde{M}_2}$ è continua su $\tilde{M}_2$ per $q = 1, 2, 3, 4$. In tale modo troviamo una successione $(\tilde{M}_n)_n$ t.c. $\lambda([0,1] \setminus \tilde{M}_n) \leq \varepsilon [2^{-(N+2)} + \ldots + 2^{-(N+n+1)}]$ e la restrizione $f(\cdot, z_q^{(p)})|_{\tilde{M}_n}$ è continua su $\tilde{M}_n$ per $p = 1, 2, \ldots, n$ e $q = 1, 2, \ldots, 2^p$. Di conseguenza, l'intersezione $\tilde{M}_\infty = \tilde{M}_1 \cap \tilde{M}_2 \cap \ldots$ soddisfa

$$\lambda([0,1] \setminus \tilde{M}_\infty) \leq \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(N+1+n)} = \varepsilon 2^{-(N+1)}.$$

Inoltre, la restrizione $f(\cdot, z_q^{(p)})|_{\tilde{M}_\infty}$ è continua su $\tilde{M}_\infty$ per ogni $p \in \mathbb{N}$ e $q = 1, 2, \ldots, 2^p$.

Per quanto osservato sopra, si ha $\sigma_p(x) \to 0$ q.o. su $\tilde{M}_\infty$ per $p \to \infty$. Per il Teorema di Severini-Egorov esiste un sottoinsieme $M_N \subseteq \tilde{M}_\infty$ t.c. $\lambda(\tilde{M}_\infty \setminus M_N) \leq \varepsilon 2^{-(N+1)}$ e $\sigma_p(x) \to 0$ uniformemente su M_N.

Fissiamo ora $(x_0, u_0) \in M_N \times [-N, N]$ con $N \in \mathbb{N}$. Dato $\eta > 0$, sia $p_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\sigma_{p_0}(x) \leq \eta$ per ogni $x \in M_N$. Denotiamo con $C(u_0)$ l'unione di tutti gli intervalli $I_q^{(p_0)}$ $(q = 1, 2, \ldots, 2^{p_0})$ con $I_q^{(p_0)} \cap [u_0 - N2^{-(p_0+1)}, u_0 + N2^{-(p_0+1)}] \neq \emptyset$ e con $D(u_0)$ l'insieme dei centri $z_q^{(p_0)}$ di questi intervalli. Per $x \in M_N$ e $u_1, u_2 \in C(u_0)$ si ha

$$|f(x, u_1) - f(x, u_2)| \leq 2\sigma_{p_0}(x) \leq 2\eta,$$

quindi anche

$$|f(x, u) - f(x, u_0)| \leq 2\eta \qquad (x \in M_N,\, u \in C(u_0)).$$

Poiché la funzione $f(\cdot, z_q^{(p)})$ è continua su M_N, esiste $\delta > 0$ t.c. $|x - x_0| \leq \delta$ implica

$$|f(x, v) - f(x_0, v)| \leq \eta \qquad (v \in D(u_0)).$$

Combinando le ultime due disuguglianze si ottiene

$$|f(x, u) - f(x_0, u_0)| \leq |f(x, u) - f(x, v)| +$$

$$|f(x, v) - f(x_0, v)| + |f(x_0, v) - f(x_0, u_0)| \leq 5\eta$$

per $v \in D(u_0)$. Ciò dimostra che la restrizione di f su $M_N \times [-N, N]$ è continua. Adesso basta porre

$$M_\varepsilon = \bigcap_{N=1}^{\infty} M_N$$

e osservare che

$$\lambda([0,1] \setminus M_\varepsilon) = \lambda\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} ([0,1] \setminus M_N)\right)$$

$$\leq \sum_{N=1}^{\infty} \left[\lambda([0,1] \setminus \tilde{M}_\infty) + \lambda(\tilde{M}_\infty \setminus M_N)\right] \leq \varepsilon \sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N} = \varepsilon.$$

La dimostrazione dell'implicazione inversa è più immediata. Infatti, se sono soddisfatte le ipotesi del Teorema 2.2, il Teorema 2.1 implica che la funzione f è di Carathéodory. $\square$

Una funzione soddisfacente la condizione del Teorema 2.2 è spesso chiamata *funzione di Scorza-Dragoni.* Il Teorema 2.2 afferma dunque che le condizioni di Carathéodory e di Scorza-Dragoni sono equivalenti.

Sia $M \subseteq \mathbb{R}$ un insieme misurabile. Sullo spazio vettoriale $S = S(M)$ di tutte le funzioni misurabili $\phi : M \to \mathbb{R}$ definiamo la metrica[9]

$$d(\phi, \psi) = \inf_{h>0} \{h + \lambda(\{x : x \in M, |\phi(x) - \psi(x)| > h\})\}. \tag{2.1}$$

Con la metrica (2.1), l'insieme $S(M)$ diventa uno spazio metrico lineare completo, e la convergenza in questa metrica non è nient'altro che la convergenza in misura.

Data una funzione $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiamo un operatore F mediante la formula

$$F(\phi)(x) = f(x, \phi(x)), \tag{2.2}$$

cioè $F(\phi) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ è la sovrapposizione della funzione (variabile) $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ con la funzione (fissa) $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Per questo motivo l'operatore (2.2) si chiama *operatore di sovrapposizione* (oppure *operatore di Nemytskij*) F generato da f. Questo operatore è molto importante, sia nella teoria che nelle applicazioni, nell'analisi di vari problemi non lineari.

A tale proposito siamo interessati al seguente

PROBLEMA 2.3. *Sotto quali ipotesi sulla funzione f, l'operatore F generato da f manda lo spazio $S([0, 1])$ in sé? In altre parole, quale proprietà di f garantisce che la misurabilità di $x \mapsto \phi(x)$ implichi la misurabilità di $x \mapsto f(x, \phi(x))$?*

Diciamo una funzione f *super-misurabile*[10], se l'operatore F generato da f manda funzioni misurabili in funzioni misurabili, cioè

[9] A voler essere precisi, la (2.1) non è una metrica, poiché $d(\phi, \psi) = 0$ implica solo che $\phi(x) = \psi(x)$ q.o. su M. Se “identifichiamo” però due funzioni che coincidono quasi ovunque, la (2.1) diventa una metrica. In altre parole, consideriamo *classi di equivalenza* di funzioni misurabili, anziché singole funzioni.

[10] Il prefisso “super-” indica la misurabilità della sovrapposizione, in inglese “superposition”.

se $F(S([0,1])) \subseteq S([0,1])$. Una condizione *sufficiente* per la super-misurabilità di f è contenuta nel seguente Teorema 2.4. Inoltre, questa condizione implica anche la *continuità* dell'operatore F nella metrica (2.1):

TEOREMA 2.4. *Se f è una funzione di Carathéodory, allora f è super-misurabile e l'operatore F generato da f è continuo nella metrica (2.1).*

Dimostrazione. Possiamo supporre, senza perdere di generalità, che $F(0) = 0$. Osserviamo anzitutto che l'operatore F manda ogni funzione semplice in una funzione misurabile. Infatti, se $\phi(x) = c_1\chi_{D_1}(x) + \ldots + c_m\chi_{D_m}(x)$ con $D_1, \ldots, D_m$ misurabili, allora

$$F(\phi)(x) = f(x, c_1)\chi_{D_1}(x) + \ldots + f(x, c_m)\chi_{D_m}(x).$$

Ora, per ogni $\phi \in S([0,1])$ esiste una sucessione $(\phi_n)_n$ di funzioni semplici t.c. $\phi_n(x) \to \phi(x)$ q.o. su $[0,1]$. Per la continuità di $f(x,\cdot)$ si ha $F(\phi_n)(x) \to F(\phi)(x)$ q.o. su $[0,1]$ e quindi $F(\phi) \in S([0,1])$, per il Teorema di Lebesgue.

Supponiamo adesso che $\phi_n \to \phi$ $(n \to \infty)$ nella metrica (2.1), ma $d(F(\phi_n), F(\phi)) \geq \varepsilon_0 > 0$. Per il Teorema di Riesz esiste una sottosuccessione $(\phi_{n_k})_k$ di $(\phi_n)_n$ t.c. $\phi_{n_k}(x) \to \phi(x)$ $(k \to \infty)$ q.o. su $[0,1]$. Ma ciò implica che $d(F(\phi_{n_k}), F(\phi)) \to 0$ per $k \to \infty$, una contraddizione. $\square$

Il problema della *necessità* delle condizioni di Carathéodory per la super-misurabilitá di f è particolarmente interessante. In altre parole, poniamo il

PROBLEMA 2.5. *Sia $f : [0,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione super-misurabile che genera un operatore di sovrapposizione continuo $F : S([0,1]) \to S([0,1])$. Ne segue allora che f è di Carathéodory?*

Questo problema, ben noto come *congettura di Nemytskij*, è rimasto aperto per ben 50 anni. Diamo la risposta (negativa) più avanti (vedi l'Esempio 2.7).

Prima consideriamo, per un attimo, la questione analoga per funzioni *continue* anziché misurabili. Denotiamo come prima con

$C = C([0,1])$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni continue $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$. Munito della norma

$$||\phi||_C = \max_{0 \leq x \leq 1} |\phi(x)|, \tag{2.3}$$

$C([0,1])$ diventa uno spazio di Banach, e la convergenza nella norma (2.3) non è nient'altro che la convergenza uniforme su $[0,1]$. Ora, se la funzione "esterna" $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua sul prodotto $[0,1] \times \mathbb{R}$, è facile convincersi che l'operatore di sovrapposizione (2.2) generato da f manda lo spazio $C([0,1])$ in sé; inoltre, F è continuo nella norma (2.3). Ma tale ragionamento si può anche invertire: se l'operatore di sovrapposizione (2.2) generato da f manda lo spazio $C([0,1])$ in sé ed è continuo nella norma (2.3), allora f è continua sul prodotto $[0,1] \times \mathbb{R}$.[11]

In modo analogo ci si potrebbe quindi aspettare che una funzione $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è super-misurabile (con F continuo nella metrica (2.1)) se e solo se f è misurabile sul prodotto $[0,1] \times \mathbb{R}$. Stranamente, *la misurabilità di f sul prodotto non è né sufficiente né necessaria per la super-misurabilità di f!* Diamo due controesempi al riguardo.

Esempio 2.6. *Sia $\omega : [0,1] \to \mathbb{R}$ una qualsiasi funzione* non *misurabile. Poniamo*

$$f(x,u) = \begin{cases} \omega(x) & \textit{se} \quad u = x, \\ 0 & \textit{se} \quad u \neq x. \end{cases}$$

Allora f è misurabile sul prodotto $[0,1] \times \mathbb{R}$, ma non super-misurabile, poiché l'operatore (2.2) generato da f manda la funzione misurabile $\phi(x) = x$ nella funzione non misurabile ω.

Il controesempio "inverso", cioè di una funzione super-misurabile

[11] Questo fatto è una semplice conseguenza del *Teorema di Tietze-Uryson*. Infatti, sia $(x_n, u_n)_n$ una successione che converge ad un punto (x_*, u_*). Allora l'insieme $M = \{(x_*, u_*), (x_1, u_1), (x_2, u_2), \ldots\}$ è chiuso. Per il Teorema di Tietze-Uryson troviamo una funzione $\phi \in C([0,1])$ con $\phi(x_1) = u_1, \phi(x_2) = u_2, \ldots, \phi(x_*) = u_*$. Per ipotesi, la funzione $F(\phi)$ è continua e quindi $f(x_n, u_n) = F(\phi)(x_n) \to F(\phi)(x_*) = f(x_*, u_*)$ per $n \to \infty$.

ma non misurabile, è più difficile da costruire. Infatti, non possiamo farne a meno dell'ipotesi del continuo per un tale controesempio.[12]

ESEMPIO 2.7. *Sia* $[0,1] = (x_\alpha)_\alpha$ *un riordinamento dei numeri reali in* $[0,1]$ *con la proprietà che, per ogni* $x_{\hat{\alpha}} \in [0,1]$, *l'insieme degli elementi "precedenti"* $\{x_\alpha : \alpha < \hat{\alpha}\}$ *sia al massimo numerabile. (E' qui che utilizziamo l'ipotesi del continuo!) Analogamente, sia* $S([0,1]) = (\phi_\beta)_\beta$ *un riordinamento delle (classi di) funzioni misurabili su* $[0,1]$ *con la proprietà che, per ogni* $x_{\hat{\beta}} \in S([0,1])$, *l'insieme degli elementi "precedenti"* $\{\phi_\beta : \beta < \hat{\beta}\}$ *sia al massimo numerabile. Per* $x_\alpha \in [0,1]$ *poniamo*

$$f(x_\alpha, u) = \begin{cases} 0 & \textit{se } u = \phi_\beta(x_\alpha) \textit{ per qualche } \beta < \alpha, \\ 1 & \textit{altrimenti.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Allora per ogni $\phi_\beta \in S([0,1])$ *fissato, la funzione* $F(\phi_\beta)$ *è diversa da zero solo sull'insieme* numerabile $\{x_\alpha : \alpha \leq \beta\}$. *Ma ciò significa che* F *manda ogni funzione misurabile nella funzione identicamente nulla e quindi* f *è sicuramente super-misurabile. D'altro canto,* f *non è misurabile sul prodotto* $[0,1] \times \mathbb{R}$. *Infatti, l'insieme* $Q = \{(x,u) : 0 \leq x \leq 1,\ u \in \mathbb{R},\ f(x,u) = 1\}$ *interseca ogni retta orizzontale* $u = cost.$ *al massimo in un insieme numerabile di punti, mentre interseca ogni retta verticale* $x = cost.$ *al minimo in un insieme con complemento numerabile. Di conseguenza, l'insieme* Q *non può essere misurabile, e quindi neanche* f, *essendo la funzione caratteristica di* Q.

L'Esempio 2.7 dimostra che la risposta alla congettura di Nemytskij (Problema 2.5) è negativa, poiché l'operatore $F(\phi) \equiv 0$ è banalmente continuo nella metrica (2.1), ma la funzione (2.4) non è di Carathéodory. Il seguente Teorema 2.8 dimostra, però, che la congettura di Nemytskij è sbagliata solo perché abbiamo scelto "male" la funzione (2.4):[13]

---

[12] Funzioni "patologiche" di due variabili come quella contenuta nel seguente Esempio 2.7 sono chiamate "mostri" nella letteratura. La funzione (2.4) ("mostro russo") si può trovare in [19]. Un esempio diverso ma equivalente ("mostro polacco"), costruito sempre sotto l'ipotesi del continuo, è contenuto in [17].

[13] La dimostrazione del Teorema 2.8 è troppo tecnica per essere riportata qui; si può trovare in [3].

Teorema 2.8. *Sia $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione qualsiasi. Supponiamo che l'operatore di sovrapposizione (2.2) generato da f mandi lo spazio $S([0,1])$ in sé e sia continuo nella metrica (2.1). Allora esista una funzione di Carathéodory $\tilde{f} : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $\tilde{f}(x, \phi(x)) = f(x, \phi(x))$ per ogni $\phi \in S([0,1])$, cioè f e $\tilde{f}$ definiscono lo stesso operatore di sovrapposizione.*

In altre parole, il Teorema 2.8 dice che la congettura di Nemytskij vale se possiamo passare ad una funzione “equivalente” senza cambiare l'operatore. Ad esempio, nel caso del “mostro” (2.4) basta prendere $\tilde{f}(x, u) \equiv 0$.

Possiamo riassumere i risultati di questo paragrafo nel modo seguente: *Le condizioni di Carathéodory e di Scorza-Dragoni sono equivalenti ed implicano la misurabilità e la super-misurabilità; del resto non esiste alcun altro legame tra questi concetti.*

f Carathéodory	$\Leftrightarrow$	f Scorza-Dragoni
$\Downarrow$		$\Downarrow$
f misurabile		f super-misurabile

Tabella 1

3. Insiemi di 1^a categoria

Sia (X, d) uno spazio metrico. Un insieme $M \subseteq X$ si dice *mai denso*[14] se la chiusura di M non ha punti interni, cioè $(\overline{M})^0 = \emptyset$. Ad esempio, il discontinuo di Cantor (1.1) è mai denso, essendo chiuso e di misura nulla.

Un insieme $M \subseteq X$ si chiama *di 1ª categoria* (oppure *magro*) se M è rappresentabile come unione numerabile di insiemi $M_1, M_2, M_3, \ldots$

[14] In inglese “nowhere dense”, cioè “in nessun luogo denso” oppure “non ovunque denso”.

mai densi, cioè

$$(3.1) \qquad M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k, \qquad (\overline{M_k})^0 = \emptyset.$$

Il sistema degli insiemi di 1^a categoria soddisfa le proprietà (a) - (e) dell'Introduzione. Se M non è di 1^a categoria, M viene detto *di 2^a categoria.* Ovviamente, ogni insieme numerabile $M = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ è di 1^a categoria, poiché $M_k = \{x_k\}$ non ha punti interni. Un esempio più interessante è il seguente

ESEMPIO 3.1. *Sia $X = P[0,1]$ lo spazio vettoriale dei polinomi $p : [0,1] \to \mathbb{R}$, $p(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ $(n \in \mathbb{N})$, con la norma*

$$(3.2) \qquad ||p|| = |a_n| + |a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|.$$

Allora vale la (3.1) per $M = X$ e $M_k = \{p : p \in X,\, deg\, p \leq k\}$. Infatti, essendo di dimensione finita ($\dim M_k = k+1$), il sottospazio M_k è chiuso. D'altro canto, per ogni $\varepsilon > 0$ e $p \in M_k$ esiste $p_\varepsilon \in M_{k+1}$ t.c. $||p_\varepsilon - p|| \leq \varepsilon$ (p. es., $p_\varepsilon(t) = \varepsilon t^{k+1} + p(t)$). Ciò significa che $M_k^0 = \emptyset$.

Possiamo dare una descrizione alternativa di X come spazio c_f di tutte le successioni "finite" $a = (a_n)_n$, cioè

$$a = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m, 0, 0, 0, \ldots)$$

per qualche $m \in \mathbb{N}$. Munito della norma

$$||a|| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

lo spazio c_f è isometrico a $P[0,1]$ con la norma (3.2), e $M_k = \{(a_n)_n : (a_n)_n \in c_f,\, a_n = 0 \text{ per } n > k\} \cong \mathbb{R}^{k+1}$ si comporta come sopra.

Osserviamo che gli spazi $P[0,1]$ e c_f non sono completi. Ad esempio, la successione di polinomi

$$p_n(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

è di Cauchy nella norma (3.2), ma non converge ad un polinomio. Ciò è una conseguenza del seguente importantissimo

Teorema 3.2. (Baire). *Ogni spazio metrico completo è di 2ª categoria.*

Dimostrazione. Scriviamo $B_r(x) = \{y : y \in X, d(x,y) < r\}$ per la palla aperta di raggio $r > 0$ e centro $x \in X$. Supponiamo che

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k, \qquad (\overline{M_k})^0 = \emptyset. \tag{3.3}$$

Allora per ogni aperto $U \subseteq X$ e $k \in \mathbb{N}$, l'insieme $U \setminus \overline{M_k}$ è aperto e non vuoto e quindi contiene $\overline{B_\varepsilon(x)}$ per qualche $\varepsilon \leq \frac{1}{k}$ e $x \in U \setminus \overline{M_k}$. Possiamo quindi costruire, per induzione, una successione di palle $B_{\varepsilon_1}(x_1), B_{\varepsilon_2}(x_2), B_{\varepsilon_3}(x_3), \ldots$ t.c.

$$\overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subseteq B_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1}) \setminus \overline{M_k}, \qquad \varepsilon_k \leq \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

La successione $(x_k)_k$ è di Cauchy e perciò $x_k \to x$ $(k \to \infty)$ per qualche $x \in X$. Inoltre, si ha $x \in \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Ma $B_{\varepsilon_k}(x_k) \cap M_k = \emptyset$ implica che $x \notin X$, per la (3.3), una contraddizione. □

Ricorrendo al Teorema 3.2 possiamo ora dimostrare che l'insieme $M = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dei numeri irrazionali non è di tipo F_σ. Infatti, se per assurdo fosse

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \qquad \overline{M_n} = M_n,$$

allora $(\overline{M_n})^0 = M_n^0 = \emptyset$, poiché nessun insieme di numeri irrazionali può avere punti interni. Di conseguenza, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sarebbe di 1^a categoria e quindi anche $\mathbb{R}$, contraddicendo il Teorema 3.2.

Sia (X,d) uno spazio metrico completo e $M \subseteq X$. Se M è mai denso in X, allora il complemento $X \setminus M$ è denso in X, essendo $\overline{X \setminus M} = X \setminus M^0 \supseteq X \setminus (\overline{M})^0 = X \setminus \emptyset = X$. E' meno evidente che, più in generale, anche il complemento di un insieme di 1^a categoria è denso in X:

Teorema 3.3. *Sia M un sottoinsieme di 1^a categoria in uno spazio metrico completo (X,d). Allora $X \setminus M$ è denso in X.*

Dimostrazione. Sia

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k, \qquad (\overline{M_k})^0 = \emptyset,$$

e siano B_0 una qualsiasi palla aperta in X e $x_1 \in B_0$. Analogamente a quanto fatto nella dimostrazione del Teorema 3.2, scegliamo una successione di palle $B_{\varepsilon_1}(x_1)$, $B_{\varepsilon_2}(x_2)$, $B_{\varepsilon_3}(x_3), \ldots$ t.c.[15]

$$x_k \in B_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1}) \setminus \overline{M_k}, \quad \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subseteq B_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1}) \setminus M_k, \quad \varepsilon_k \leq \frac{1}{k}$$

per $k \in \mathbb{N}$. Poiché $(x_k)_k$ è una successione di Cauchy e X è completo, ne segue che $x_k \to x$ $(k \to \infty)$ per qualche $x \in X$. Inoltre, $x \in \overline{B_{\varepsilon_1}(x_1)} \cap \overline{B_{\varepsilon_2}(x_2)} \cap \overline{B_{\varepsilon_3}(x_3)} \cap \ldots \subseteq B_0 \setminus M$. Di conseguenza, $X \setminus M$ è denso in X. □

E' chiaro che la tesi del Teorema 3.3 non si può invertire: $M = \mathbb{Q}$ è denso in $X = \mathbb{R}$, ma $X \setminus M = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non è di 1^a categoria.

Si dice che un insieme $M \subseteq \mathbb{R}$ ha la *proprietà di Baire* se $M = G \triangle P$ con G aperto e P di 1^a categoria, dove $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ denota la differenza simmetrica di A e B. Inoltre, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è detta una *funzione di Baire* se $f^{-1}(G)$ ha la proprietà di Baire per ogni aperto $G \subseteq \mathbb{R}$.

Il seguente teorema è un analogo del Teorema 2.1 per insiemi di 1^a categoria anziché insiemi di misura piccola:

Teorema 3.4. *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è di Baire se e solo se esiste un insieme Q t.c. $\mathbb{R} \setminus Q$ sia di 1^a categoria e la restrizione $f|_Q : Q \to \mathbb{R}$ sia continua.*

Dimostrazione. Sia di nuovo $\{O_1, O_2, O_3, \ldots\}$ una base della topologia usuale in $\mathbb{R}$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha la proprietà di Baire, allora $f^{-1}(O_n) = G_n \triangle P_n$ con G_n aperto e P_n di 1^a categoria $(n \in \mathbb{N})$.

[15] Osserviamo che $B_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1}) \setminus \overline{M_k} \neq \emptyset$, poiché $\overline{M_k}$ non ha punti interni.

L'insieme $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \ldots$ è sempre di 1^a categoria. Poniamo $Q = \mathbb{R} \setminus P$. Allora l'insieme

$$f|_Q^{-1}(O_n) = f^{-1}(O_n) \setminus P = (G_n \triangle P_n) \setminus P = G_n \setminus P = G_n \cap Q$$

è aperto in Q per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi la restrizione di f a Q è continua.

Viceversa, supponiamo che la restrizione di f su Q sia continua, dove $P = \mathbb{R} \setminus Q$ è di 1^a categoria. Ciò significa che per ogni aperto $U \subseteq \mathbb{R}$ esiste un aperto $G \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $f|_Q^{-1}(U) = G \cap Q$. L'inclusione

$$f|_Q^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(U) \subseteq f|_Q^{-1}(U) \cup G$$

implica che

$$G \cap Q \subseteq f^{-1}(U) \subseteq G \cup P.$$

Di conseguenza, $f^{-1}(U) = G \triangle R$ per qualche $R \subseteq P$, cioè f è una funzione di Baire. □

Nei Teoremi 1.2 e 1.9 abbiamo ottenuto una caratterizzazione delle funzioni f per le quali l'insieme $D(f)$ dei punti di discontinuità di f sia di misura nulla o di tipo F_σ. Ora diamo una caratterizzazione in termini di categoria:

Teorema 3.5. *Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una qualsiasi funzione. Allora $D(f)$ è di 1^a categoria se e solo se esiste un insieme denso $M \subseteq [0,1]$ t.c. f sia continua in ogni punto di M.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima il seguente risultato di interesse indipendente: Un insieme $M \subseteq \mathbb{R}$ di tipo F_σ è di 1^a categoria se e solo se $\mathbb{R} \setminus M$ è denso in $\mathbb{R}$.

Infatti, sia

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \qquad \overline{M_n} = M_n.$$

Se $\mathbb{R} \setminus M$ è denso in $\mathbb{R}$, allora

$$\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R} \setminus M} = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus M_n)} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{(\mathbb{R} \setminus M_n)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus M_n^0),$$

e quindi $M_n^0 = \emptyset$ per ogni n, cioè M è di 1^a categoria. L'implicazione inversa segue dal Teorema 3.3.

Ora la tesi segue combinando l'equivalenza appena dimostrata con il Teorema 1.9. □

E' interessante riconsiderare gli Esempi 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 dal punto di vista del Teorema 3.5. Nell'Esempio 1.5 abbiamo $D(f) = [0,1] \cap \mathbb{Q}$, nell'Esempio 1.6 $D(f) = C$; entrambi questi insiemi sono di 1^a categoria, e infatti f è continua sull'insieme denso $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ risp. $[0,1] \setminus C$. D'altro canto, negli Esempi 1.4 e 1.7 gli insiemi $D(f)$ sono di 2^a categoria; di conseguenza, non possiamo trovare alcun insieme denso $M \subseteq [0,1]$ t.c. f sia continua su M.

4. Un confronto tra misura nulla e 1^a categoria

Si sono finora considerate tre classi diverse di "insiemi piccoli": insiemi numerabili, insiemi di misura nulla ed insiemi di 1^a categoria. Ognuna di queste classi soddisfa le cinque proprietà assiomatiche (a) - (e) dell'Introduzione. Confrontiamo ora queste classi di insiemi.

Sappiamo già che ogni insieme numerabile è di misura nulla e di 1^a categoria. Un insieme mai denso è, in un senso intuitivo, "bucato", mentre un insieme di 1^a categoria si può, per così dire, "approssimare" con tali insiemi. In altre parole, un insieme di 1^a categoria non ha necessariamente "buchi", ma possiede sempre un insieme denso di "lacune": non c'è alcun intervallo che si possa rappresentare come unione numerabile di insiemi di questo genere.

Dall'altra parte, un insieme di misura nulla è piccolo in un senso "metrico", potendosi ricoprire con una successione di intervalli di lunghezza totale piccola a piacere. In maniera più suggestiva potremmo dire che, scegliendo "a caso" un punto in un insieme $M \subseteq \mathbb{R}$, la probabilità di trovarlo in un sottoinsieme *fissato* $N \subseteq M$ di misura nulla è zero.

Se N è chiuso e di misura nulla, allora N non contiene alcun intervallo, e quindi è mai denso. Di conseguenza, un insieme di misura nulla e di tipo F_σ è sempre di 1^a categoria (vedi anche il Teorema 3.5). Tale ragionamento ci porta al seguente più generale

PROBLEMA 4.1. *C'è un legame tra insiemi di misura nulla ed insiemi di 1^a categoria?*

Il seguente Teorema 4.2 dimostra che la risposta è negativa e che questi due concetti possono essere addirittura "complementari":

TEOREMA 4.2. *Esiste una decomposizione*

$$\mathbb{R} = M \cup N \tag{4.1}$$

della retta reale t.c. M sia di 1^a categoria e N abbia misura nulla.

Dimostrazione. Sia $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ un'enumerazione dei numeri razionali e sia $I_{jk} = (r_j - 2^{-(j+k)}, r_j + 2^{-(j+k)})$ $(j, k \in \mathbb{N})$. Poniamo

$$G_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{jk}, \qquad N = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k, \qquad M = \mathbb{R} \setminus N. \tag{4.2}$$

Dimostriamo che N ha misura nulla. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $k \in \mathbb{N}$ t.c. $2^{1-k} \leq \varepsilon$. Allora

$$\begin{aligned} \lambda(N) \leq \lambda(G_k) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_{jk}) \\ = 2 \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-(j+k)} &= 2^{1-k} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 2^{1-k} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Poiché $\varepsilon > 0$ è arbitrario, si ha $\lambda(N) = 0$.

Inoltre, M è di 1^a categoria. Infatti,

$$M = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus G_k)$$

e

$$(\overline{\mathbb{R} \setminus G_k})^0 = (\mathbb{R} \setminus G_k)^0 = \mathbb{R} \setminus \overline{G_k} = \emptyset,$$

poiché ogni insieme G_k è aperto e denso in $\mathbb{R}$ (essendo $\mathbb{Q} \subseteq G_k$). $\square$

Ovviamente, l'insieme M nella (4.2) non può essere di misura nulla (altrimenti avremmo $\lambda(\mathbb{R}) = \lambda(M) + \lambda(N) = 0$), e l'insieme N nella (4.2) non può essere di 1^a categoria (altrimenti $\mathbb{R}$ sarebbe di 1^a categoria, contraddicendo il Teorema 3.2). Inoltre, non può esistere una decomposizione (4.1) di $\mathbb{R}$ con M numerabile e N di misura nulla, oppure con M di 1^a categoria e N numerabile.

Esistono altri metodi per decomporre un "continuo" in due sottoinsiemi "piccoli". Ad esempio, sia $C^{1/n}$ il discontinuo di Cantor (1.3) per $\alpha = \frac{1}{n}$ e siano

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} C^{1/n}, \qquad N = [0,1] \setminus M. \tag{4.3}$$

Allora

$$[0,1] = M \cup N, \tag{4.4}$$

M è di 1^a categoria (poiché ogni insieme $C^{1/n}$ è mai denso) e N ha misura nulla (poiché $1 - \frac{1}{n} = \lambda(C^{1/n}) \leq \lambda(M) \leq 1$). Vedremo più avanti un altro tipo di decomposizione (4.1) con certi numeri trascendenti (Teorema 6.2).

Introduciamo ancora un altro concetto di piccolezza un po' curioso che soddisfa le proprietà assiomatiche (a) - (e) ed è "intermedio" tra numerabilità e misura nulla. Chiamiamo un insieme $N \subset \mathbb{R}$ *microscopico* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione $(I_n)_n$ di intervalli t.c.

$$N \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \qquad \lambda(I_n) \leq \varepsilon^n. \tag{4.5}$$

Ovviamente, ogni insieme numerabile è microscopico, ma non viceversa; ad esempio, l'insieme N nella (4.2) (oppure nella (4.3)) è microscopico, ma non numerabile. Inoltre, ogni insieme microscopico ha misura nulla. Infatti, la (4.5) implica che, per $\varepsilon < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

ma $\varepsilon/(1-\varepsilon) \to 0$ per $\varepsilon \to 0$. Malgrado la somiglianza tra insiemi microscopici ed insiemi di misura nulla, esistono insiemi di misura nulla che non sono microscopici:

ESEMPIO 4.3. *Consideriamo di nuovo il discontinuo di Cantor (1.1) di misura nulla. Supponiamo che, per* $\varepsilon < \frac{1}{3}$, *esista una successione di intervalli* $(I_n)_n$ *t.c. valga la (4.5). Possiamo scrivere ogni* $x \in C$ *nella forma (1.2) con* $x_n \in \{0, 2\}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$. *Poiché* $\lambda(I_n) < 3^{-n}$, *la proiezione* p_n *che associa ad ogni* $x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots \in C$ *l'ennesima cifra* $x_n = p_n(x)$ *è costante su* I_n. *Quindi, se poniamo* $\hat{x} = 0, \hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3 \ldots$ *con*

$$\hat{x}_n = \begin{cases} 0 & se \quad p_n(x) \equiv 2 \ su \ I_n, \\ 2 & se \quad p_n(x) \equiv 0 \ su \ I_n, \end{cases}$$

allora $\hat{x} \in C$, *ma* $\hat{x} \notin I_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$. *Abbiamo così dimostrato che* C *non è microscopico.*

Confrontiamo ora queste classi con quella degli insiemi F_σ considerati nel Teorema 1.9. [16] Per quanto osservato sopra, ogni insieme numerabile è di tipo F_σ. D'altro canto, l'insieme di misura nulla N nella (4.2) (o nella (4.3)) non può essere di tipo F_σ: infatti, se avessimo $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup \ldots$ con N_k chiuso per ogni k, allora $\lambda(N_k) = 0$ e quindi $N_k^0 = \emptyset$; di conseguenza, N sarebbe di 1^a categoria, ma non lo è.

Trovare un insieme di tipo F_σ che non sia né di 1^a categoria né di misura nulla né microscopico è semplice: basta considerare $M = \mathbb{R}$ o qualsiasi intervallo chiuso in $\mathbb{R}$. Resta da trovare un esempio di un insieme microscopico di 1^a categoria che non sia di tipo F_σ. Non costruiamo un tale insieme sotto forma esplicita, ma dimostriamone l'esistenza tramite un ragionamento astratto sulla "cardinalità".

ESEMPIO 4.4. *Ogni insieme* $M \subseteq \mathbb{R}$ *di tipo* F_σ *si può scrivere come*

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \in N_n} (\mathbb{R} \setminus O_k),$$

dove $\{O_1, O_2, O_3, \ldots\}$ *è una base della topologia naturale in* $\mathbb{R}$, *e* $N_1, N_2, N_3, \ldots$ *sono appropriati sottoinsiemi di* $\mathbb{N}$. *La cardinalità del sistema di tutti gli insiemi* F_σ *è dunque* $\operatorname{card}([2^{\mathbb{N}}]^{\mathbb{N}}) = \operatorname{card}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) =$

[16]Osserviamo che gli insiemi F_σ soddisfano solo le condizioni (b), (c) e (d) dell'Introduzione e quindi non sono "piccoli" nel senso assiomatico da noi usato.

card$(\mathbb{R}) = \aleph_1$. *D'altro canto, ogni sottoinsieme del discontinuo di Cantor (1.1) è di 1^a categoria (e di misura nulla). La cardinalità di questo sistema è dunque* card$(2^{\mathbb{R}}) > \aleph_1$. *Ciò implica che esiste un sottoinsieme di 1^a categoria $M \subset C$ che non è di tipo F_σ e che tali sottoinsiemi sono addirittura "abbondanti".*

Possiamo così riassumere i legami tra le classi di insiemi "piccoli" considerate finora nel modo seguente: *Ogni insieme numerabile è microscopico, di 1^a categoria e di tipo F_σ; inoltre, ogni insieme microscopico ha misura nulla. Per il resto non esiste alcun altro legame tra questi concetti.*

$$\begin{array}{ccccc}
1^a \text{ categoria} & \Leftarrow & \text{numerabile} & \Rightarrow & \text{microscopico} \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & & F_\sigma & & \text{misura nulla}
\end{array}$$

Tabella 2

Inoltre, nella seguente Tabella 3 riportiamo i controesempi che dimostrano che le implicazioni nella Tabella 2 sono le uniche possibili.

	num.	*mis. nulla*	*1^a cat.*	F_σ	*microsc.*
non num.	—-	C in (1.1)	M in (4.2)	$\mathbb{R}$	N in (4.3)
mis. positiva	—-	—-	M in (4.2)	$\mathbb{R}$	—-
2^a cat.	—-	N in (4.2)	—-	$\mathbb{R}$	N in (4.3)
non F_σ	—-	N in (4.2)	Esempio 4.4	—-	N in (4.3)
non microsc.	—-	C in (1.1)	C in (1.1)	$\mathbb{R}$	—-

Tabella 3

5. Trasformazioni di insiemi piccoli

In questo paragrafo ci interessiamo del problema di quanto le proprietà di un insieme considerate sopra (numerabilità, misura nulla, 1^a categoria ecc.) si conservino applicando una trasformazione biettiva opportuna. Siano $M, N \subset \mathbb{R}$ due insiemi *omeomorfi*, cioè tali che esista una mappa biettiva $\phi : M \to N$ con ϕ e ϕ^{-1} continue. Come sempre chiamiamo una tale mappa *bicontinua* oppure un *omeomorfismo* tra M e N.

PROBLEMA 5.1. *Se M è numerabile/di misura nulla/di 1^a categoria/di tipo F_σ/microscopico e $\phi : M \to N$ è un omeomorfismo, allora si può concludere che anche $N = \phi(M)$ sia numerabile/di misura nulla/di 1^a categoria/di tipo F_σ /microscopico?*

E' chiaro che la risposta è positiva se M è numerabile (poiché ϕ è una biezione), o se M è di tipo F_σ (poiché ϕ è una biezione continua). Può benissimo darsi, però, che applicando un omeomorfismo si perda la misura nulla!

ESEMPIO 5.2. *Sia C l'insieme di Cantor (1.1). Scriviamo ogni $x \in C$ nella forma ternaria (1.2) con $x_n \in \{0,2\}$ e definiamo $\psi : C \to [0,1]$ tramite la formula*

$$\psi\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n 3^{-n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2} 2^{-n}.$$

Allora ψ è una mappa suriettiva. Infatti, possiamo scrivere ogni $y \in [0,1]$ in forma binaria *$y = 0, y_1 y_2 y_3 \ldots$ con $y_n \in \{0,1\}$; di conseguenza, l'elemento $x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots$ con $x_n = 2y_n$ appartiene a C e soddisfa $\psi(x) = y$. Osserviamo che la mappa ψ non è iniettiva; infatti,*[17] *abbiamo p. es.*

$$\psi(\tfrac{2}{3}) = \psi(0,2000\ldots) = 0,1000\ldots = \tfrac{1}{2}$$

[17] La non-iniettività di ψ segue anche dal fatto che C e $[0,1]$ non possono essere omeomorfi, poiché C è totalmente sconnesso, ma $[0,1]$ è connesso. Valgono due risultati importanti sulla “universalità” del discontiuo di Cantor: ogni spazio metrico compatto è l'immagine continua dell'insieme (1.1) ed ogni spazio metrico compatto perfetto totalmente sconnesso è l'immagine omeomorfa dell'insieme (1.1).

e

$$\psi(\tfrac{1}{3}) = \psi(0,0222\ldots) = 0,0111\ldots = \tfrac{1}{2}.$$

Più in generale, si vede che $\psi(x_1) = \psi(x_2)$ *se e solo se* x_1 *e* x_2 *sono punti estremi di un intervallo "cancellato" nella costruzione dell'insieme di Cantor (1.1). Ciò implica che* ψ *è una mappa* crescente *tra* C *e* $[0,1]$*, ma suggerisce anche come prolungare* ψ *su tutto l'intervallo* $[0,1]$*. Infatti, se* $x \in [0,1] \setminus C$ *appartiene a qualche intervallo "cancellato"* (a,b)*, poniamo* $\psi(x) \equiv \psi(a)$ *(*$= \psi(b)$*) su questo intervallo. In questo modo, la mappa* $\psi : [0,1] \to [0,1]$ *rimane monotona crescente, ma diventa anche* continua [18] *su* $[0,1]$.

Adesso è sufficiente porre

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(x + \psi(x)). \tag{5.1}$$

E' evidente che la mappa $\phi : [0,1] \to [0,1]$ *è biettiva e* strettamente *crescente, quindi è un omeomorfismo. Poiché* ϕ *manda ogni intervallo* (a,b)*, "cancellato" nella costruzione dell'insieme* C*, in un intervallo di lunghezza* $\frac{1}{2}(b-a)$*, si ha* $\lambda(\phi([0,1]\setminus C)) = \frac{1}{2}\lambda([0,1]\setminus C) = \frac{1}{2}$*, quindi* $\lambda(\phi(C)) = \frac{1}{2}$*. Di conseguenza,* l'omeomorfismo ϕ manda l'insieme $C \subset [0,1]$ di misura nulla in un insieme $\phi(C) \subset [0,1]$ di misura positiva.

Si osservi che era possibile sostituire l'insieme (1.1) con l'altro discontinuo di Cantor (1.3). Infatti, siano $(I_n)_n$ e $(I_n^\alpha)_n$ gli intervalli "cancellati" nella costruzione di (1.1) e (1.3), rispettivamente, nello stesso ordine, cioè

$$I_1 = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}),\ I_2 = (\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}),\ I_3 = (\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}), \ldots, \tag{5.2}$$

$$\begin{gathered} I_1^\alpha = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\alpha, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\alpha),\ I_2^\alpha = (\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{16}\alpha, \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{16}\alpha), \\ I_3^\alpha = (\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{16}\alpha, \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{16}\alpha), \ldots, \end{gathered} \tag{5.3}$$

[18] Essendo monotona, la mappa ψ può avere solo discontinuità di 1^a specie ("salti"), ma per la suriettività non può avere salti. La mappa ψ viene spesso chiamata *funzione di Cantor*.

e così via. Allora possiamo definire una mappa crescente e lineare ϕ tra I_n e I_n^α per ogni $n \in \mathbb{R}$. Poiché gli insiemi $I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \ldots$ e $I_1^\alpha \cup I_2^\alpha \cup I_3^\alpha \cup \ldots$ sono entrambi densi in $[0,1]$, c'è un'unica estensione biettiva continua $\hat{\phi} : [0,1] \to [0,1]$ della mappa (5.1). Abbiamo così dimostrato che *gli insiemi di Cantor* (1.1) *e* (1.3) (e quindi anche due insiemi di Cantor C^α e C^β per qualunque $\alpha, \beta \in (0,1)$) *sono omeomorfi.*

Vediamo adesso se un omeomorfismo conserva la proprietà di un insiemi di essere di 1^a categoria. Il seguente esempio assai sorprendente dimostra che due insiemi omeomorfi possono essere di categoria diversa.[19]

Esempio 5.3. *Sia $(I_n^\alpha)_n$ la successione (5.3) degli intervalli "cancellati" nella costruzione del discontinuo di Cantor C^α di misura $1-\alpha$ e sia $\mathbb{Q} \cap (0,1) = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$ un'enumerazione dei numeri razionali tra 0 e 1. Definiamo un riordinamento $(r_n)_n$ di $(s_n)_n$ in modo tale che $r_m < r_n$ se e solo se l'intervallo I_m^α è situato "a sinistra" dall'intervallo I_n^α. Ciò si può fare ponendo $r_1 = s_1$, $r_2 = s_{n_1}$ con $n_1 = \min\{n : n \in \mathbb{N},\ s_n < r_1\}$, $r_3 = s_{n^1}$ con $n^1 = \min\{n : n \in \mathbb{N},\ s_n > r_1\}$, $r_4 = s_{n_2}$ con $n_2 = \min\{n : n \in \mathbb{N},\ s_n < r_2\}$, $r_5 = s_{n_2^1}$ con $n_2^1 = \min\{n : n \in \mathbb{N},\ r_2 < s_n < r_1\}$, $r_6 = s_{n_1^3}$ con $n_1^3 = \min\{n : n \in \mathbb{N},\ r_1 < s_n < r_3\}$, $r_7 = s_{n^3}$ con $n^3 = \min\{n : n \in \mathbb{N},\ s_n > r_3\}$ e così via.*

Ora definiamo $\phi(x) = r_n$ per $x \in \overline{I_n^\alpha}$. Poiché gli insiemi $I_1^\alpha \cup I_2^\alpha \cup I_3^\alpha \cup \ldots$ e $\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ sono entrambi densi in $[0,1]$, c'è nuovamente un'unica estensione continua crescente surgettiva $\hat{\phi} : [0,1] \to [0,1]$.

Denotiamo con L l'insieme degli estremi di tutti gli intervalli "cancellati" nella costruzione del discontinuo C^α e poniamo $M = C^\alpha \setminus L$. Allora L e M sono mai densi e quindi di 1^a categoria.

---

[19] Con un ragionamento "naive" potremmo tentare di dimostrare il contrario cosi. Dato un omeomorfismo $\phi : [0,1] \to [0,1]$, sia $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots \subseteq [0,1]$ di 1^a categoria, cioè $(\overline{M_k})^0 = \emptyset$ per ogni k. Allora $\phi(M) = \phi(M_1) \cup \phi(M_2) \cup \phi(M_3) \cup \ldots \subseteq [0,1]$ con $(\overline{\phi(M_k)})^0 = \phi((\overline{M_k})^0) = \emptyset$ per ogni k e quindi anche $\phi(M)$ è di 1^a categoria. Il punto cruciale è che l'omeomorfismo ϕ nell'Esempio 5.3 non è indotto da un omeomorfismo su $[0,1]$, ma è definito solo sull'insieme di 1^a categoria M.

Inoltre,

$$\hat{\phi}(L) = (0,1) \cap \mathbb{Q}, \qquad \hat{\phi}(M) = (0,1) \setminus \mathbb{Q}.$$

Essendo strettamente crescente[20] *su M, la mappa $\hat{\phi}$ è addirittura un* omeomorfismo *tra M e $(0,1) \setminus \mathbb{Q}$. Ma sappiamo già che l'insieme $(0,1) \setminus \mathbb{Q}$ è di 2^a categoria.*

Un esempio di un isomorfismo che mandi un insieme microscopico in un insieme non microscopico sarà dato più tardi (Esempio 5.6).

Gli Esempi 5.2 e 5.3 dimostrano che le proprietà "misura nulla" e "1^a categoria" non sempre si conservano per l'azione di omeomorfismi. Potremmo anche, "invertendo" il punto di vista, chiederci ad esempio se un insieme di 1^a categoria si può sempre "deformare", tramite un omeomorfismo, in un insieme di misura nulla. Il seguente Teorema 5.4 dimostra che questo è infatti possibile; qui ci limitiamo, senza perdere di generalità, a sottoinsiemi dell'intervallo $[0,1]$.

A tale scopo consideriamo l'insieme $Aut([0,1])$ di tutti gli omeomorfismi (= funzioni strettamente crescenti) $\phi : [0,1] \to [0,1]$ t.c. $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 1$, munito della metrica [21]

$$d(\phi, \psi) = \max_{0 \le x \le 1} |\phi(x) - \psi(x)|. \tag{5.4}$$

Teorema 5.4. *Per ogni insieme di 1^a categoria $M \subset [0,1]$ esiste un $\phi \in Aut([0,1])$ t.c. $N = \phi(M)$ abbia misura nulla.*

Dimostrazione. Scriviamo M nella forma (3.1) e poniamo

$$E_{k,m} = \{\phi : \phi \in Aut([0,1]),\ \lambda(\phi(\overline{M_k})) < \tfrac{1}{m}\} \quad (k, m \in \mathbb{N}).$$

---

[20] Questo fatto segue dal modo in cui abbiamo riordinato gli insiemi $I_1^\alpha \cup I_2^\alpha \cup I_3^\alpha \cup \ldots$ e $\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$.

[21] Osserviamo che questo spazio metrico non è completo. Ad esempio, la successione $(\phi_n)_n$ definita da $\phi_n(x) = \frac{2}{n}x$ per $0 \le x \le \frac{1}{2}$ e $\phi_n(x) = (2 - \frac{2}{n})x - 1 + \frac{2}{n}$ per $\frac{1}{2} \le x \le 1$ è di Cauchy in $Aut([0,1])$, ma non convergente. Il sottoinsieme $Aut([0,1])$ con la metrica (5.4) quindi non è chiuso in $C([0,1])$ con la norma "ereditata" (2.3). Questo difetto, però, non è importante per i nostri scopi.

Per ogni $\phi \in E_{k,m}$, l'insieme $\phi(\overline{M_k})$ è compatto e contenuto in un insieme aperto G_ϕ di misura $\lambda(G_\phi) < \frac{1}{m}$. Scegliamo $\delta > 0$ con

$$\bigcup_{y \in \phi(\overline{M_k})} (y - \delta, y + \delta) \subseteq G_\phi.$$

Allora $d(\phi, \psi) < \delta$ (vedi (5.4)) implica $\psi(\overline{M_k}) \subseteq G_\phi$, quindi $\psi \in E_{k,m}$. Abbiamo così dimostrato che ogni insieme $E_{k,m}$ è aperto in $Aut([0,1])$.

Dimostriamo che $E_{k,m}$ è denso in $Aut([0,1])$. Fissiamo $\phi \in Aut([0,1])$ e $\varepsilon > 0$. Dividiamo l'intervallo $[0,1]$ in sottointervalli $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$ t.c. $b_i - a_i < \varepsilon$ per $i = 1, 2, \ldots, n$. Successivamente scegliamo per ogni $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ degli intervalli $[c_i, d_i] \subset (a_i, b_i) \setminus \phi(\overline{M_k})$. Per ogni i possiamo trovare una funzione continua e strettamente crescente $\psi_i : [a_i, b_i] \to [a_i, b_i]$ t.c. $\psi_i(d_i) - \phi_i(c_i) \geq (b_i - a_i) - (mn)^{-1}$. “Incollando” le funzioni $\psi_1, \ldots, \psi_n$, otteniamo un omeomorfismo $\psi : [0,1] \to [0,1]$ che soddisfa $\lambda(\psi(\phi(M_k))) < \frac{1}{m}$, cioè $\psi \circ \phi \in E_{k,m}$. Inoltre, $d(\psi \circ \phi, \phi) < \varepsilon$ e quindi $E_{k,m}$ è denso in $Aut([0,1])$.

Poniamo ora

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{k,m}. \tag{5.5}$$

Allora per ogni $\phi \in E$ e $k \in \mathbb{N}$, l'insieme $\phi(\overline{M_k})$ e quindi anche l'insieme $\phi(M) \subseteq \phi(\overline{M_1}) \cup \phi(\overline{M_2}) \cup \phi(\overline{M_3}) \cup \ldots$, ha misura nulla. $\square$

Osserviamo che abbiamo in effetti dimostrato di più nel Teorema 5.4: *L'insieme residuale* $Aut([0,1]) \setminus E$ *è di 1^a categoria* (per la rappresentazione (5.5)) e quindi la “maggior parte” degli omeomorfismi su $[0,1]$ manda insiemi di 1^a categoria in insiemi di misura nulla.

Come conseguenza del Teorema 5.4 otteniamo un risultato molto interessante che descrive l'effetto di un “cambio di variabili” in $[0,1]$ sull'integrabilità (secondo Riemann) di una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, in termini dell'insieme $D(f)$ dei suoi punti di discontiuità. Questo risultato coinvolge i concetti di “piccolezza” più importanti discussi finora:

Teorema 5.5. *Sia* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata. Allora la funzione* $f \circ \phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ *è R-integrabile*

(a) per ogni $\phi \in Aut([0,1])$ *se e solo se* $D(f)$ *è numerabile;*

(b) per qualche $\phi \in Aut([0,1])$ *se e solo se* $D(f)$ *è di* 1^a *categoria;*

(c) per $\phi(x) = x$ *se e solo se* $D(f)$ *è di misura nulla.*

Dimostrazione. Ricordiamo, innanzitutto, che l'insieme $D(f)$ è sempre di tipo F_σ, cioè

$$D(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k, \qquad \overline{D_k} = D_k. \tag{5.6}$$

Inoltre, è chiaro che $D(f \circ \phi) = \phi^{-1}(D(f))$.

(a) Se $D(f)$ è numerabile, allora anche $\phi^{-1}(D(f))$ è numerabile per ogni $\phi \in Aut([0,1])$ e quindi $f \circ \phi$ è R-integrabile secondo il Teorema 1.2. Viceversa, se $D(f)$ non è numerabile, allora $D(f)$ contiene un sottoinsieme chiuso non numerabile (poiché $D(f)$ è F_σ). Ciò implica[22] che $\phi^{-1}(D(f))$ ha misura positiva per qualche $\phi \in Aut([0,1])$.

(b) Se $D(f)$ è di 1^a categoria, possiamo applicare il Teorema 5.4 e trovare un $\phi \in Aut([0,1])$ t.c. $\phi^{-1}(D(f))$ abbia misura nulla. La R-integrabilità di $f \circ \phi$ segue ancora una volta dal Teorema 1.2. Viceversa, se $D(f)$ è di 2^a categoria, allora uno degli insiemi D_k nella (5.6) deve contenere un intervallo. Di conseguenza, anche $\phi^{-1}(D(f))$ contiene un intervallo e quindi ha misura positiva. Ne segue che $f \circ \phi$ non è R-integrabile per tale $\phi \in Aut([0,1])$.

(c) La tesi è già stato dimostrato nel Teorema 1.2.

□

[22] Osserviamo che questa implicazione non è assolutamente banale. In questo caso si utilizza il fatto che per ogni sottoinsieme chiuso non numerabile $A \subset [0,1]$ possiamo trovare una mappa continua e *surgettiva* $f : A \to [0,1]$. Fatto ciò è sufficiente porre $\phi^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + \lambda(f(A \cap [0,x])))$.

Il Teorema 5.4 ci permette anche di trovare un omeomorfismo, sia pure non esplicito, che mandi un insieme microscopico in un insieme non microscopico:

ESEMPIO 5.6. *Consideriamo di nuovo la decomposizione* $[0,1] = M \cup N$ *con* M *e* N *come nella (4.3). Sappiamo che* M *è di 1*^{a} *categoria e* N *è microscopico. Per il Teorema 5.4 esiste un* $\phi \in Aut([0,1])$ *t.c.* $\phi(M)$ *abbia misura nulla. Di conseguenza,* $\phi(N)$ *ha misura 1, e quindi non può essere microscopico, poiché ogni insieme microscopico ha misura nulla.*

Torniamo ora un attimo all'Esempio 5.2. In fondo non c'è niente di strano nel fatto che un omeomorfismo distrugga la misura nulla: il concetto di omeomorfismo è puramente topologico, mentre il concetto di misura nulla si rivolge alla struttura di “misura”. Consideriamo pertanto ora mappe “bi-misurabili” ϕ invece di omeomorfismi; con questo intendiamo che $\phi : M \to N$ sia biettiva ed entrambe ϕ e ϕ^{-1} siano misurabili.

PROBLEMA 5.7. *Se* M *è numerabile/di misura nulla/di 1*^{a} *categoria/di tipo* F_σ*/microscopico e* $\phi : M \to N$ *è bi-misurabile, allora si può concludere che anche* $N = \phi(M)$ *sia numerabile/di misura nulla/di 1*^{a} *categoria/di tipo* F_σ*/microscopico?*

Come nel caso precedente la risposta è positiva se M è numerabile (poiché ϕ è una biezione). Per dare la risposta nel caso che M sia di misura nulla occorre il seguente

TEOREMA 5.8. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione bimisurabile. Allora* f *manda ogni insieme misurabile in un insieme misurabile se e solo se* f *manda insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla.*

Dimostrazione. Supponiamo prima che f mandi insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla. Se $M \subseteq \mathbb{R}$ è misurabile, allora M ammette una rappresentazione $M = F \cup N$ con F di tipo F_σ e N di misura nulla. Se $F = F_1 \cup F_2 \cup \ldots$ con $\overline{F_n} = F_n$, allora $f(F_n)$ è misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$, poiché f^{-1} è una funzione misurabile. Di conseguenza,

$$f(M) = f(F_1 \cup F_2 \cup \ldots) \cup f(N) = f(F_1) \cup f(F_2) \cup \ldots \cup f(N)$$

è misurabile.

Viceversa, supponiamo che esista un insieme N di misura nulla t.c. $\lambda(f(N)) > 0$. Allora possiamo trovare un insieme non misurabile $P \subset f(N)$. Ma $f^{-1}(P) \subseteq N$ è certamente misurabile (di misura nulla). $\square$

Nell'Esempio 5.2 abbiamo trovato una funzione bicontinua (e quindi bimisurabile) $\phi : [0,1] \to [0,1]$ che manda insiemi di misura nulla in insiemi di misura positiva (vedi (5.1)). Il Teorema 5.8 implica dunque che esiste un insieme misurabile $M \subseteq [0,1]$ t.c. $\phi(M)$ non sia misurabile. Ciò si può anche vedere direttamente: l'insieme $\phi(C)$, avendo misura positiva, contiene un sottoinsieme non misurabile P, mentre $P = \phi^{-1}(N) \subseteq C$ è sicuramente misurabile (di misura nulla).

Gli Esempi 5.3 e 5.6 dimostrano che la risposta al Problema 5.7 è anche negativa per insiemi di 1^a categoria ed insiemi microscopici. Ciò si può anche vedere con il seguente esempio un po' più semplice:

Esempio 5.9. *Sia $C \subset [0,1]$ il discontinuo di Cantor (1.1) e sia $N \subset [0,1]$ definito come nella (4.3). Sappiamo che C è di 1^a categoria e non microscopico, mentre N è di 2^a categoria e microscopico. Ambedue gli insiemi sono non numerabili e hanno misura nulla; esiste dunque una funzione bimisurabile $\phi : C \to N$.*

Infine, forniamo un esempio in cui una mappa bimisurabile distrugge la proprietà F_σ:

Esempio 5.10. *Siano*

$$C = C_1 \cup C_2, \qquad C = C_1' \cup C_2'$$

due decomposizioni del discontinuo di Cantor (1.1) tali che C_1 e C_2 siano F_σ, ma C_1' e C_2' non siano F_σ. Possiamo supporre che C_j e C_j' abbiano la stessa cardinalità per $j = 1, 2$. Allora ogni biezione $\phi : C \to C$ con $\phi(C_j) = C_j'$ è sicuramente bimisurabile.

Riassumiamo nuovamente i diversi risultati e controesempi di questo paragrafo nella seguente Tabella 4:

trasformazione	*bicontinua*	*bimisurabile*
numerabile	sì	sì
misura nulla	no (Esempio 5.2)	no (Esempio 5.2)
1^a categoria	no (Esempio 5.3)	no (Esempio 5.9)
F_σ	sì	no (Esempio 5.10)
microscopico	no (Esempio 5.6)	no (Esempio 5.9)

Tabella 4

Per quanto osservato sopra, né la misura nulla né la 1^a categoria vengono conservate per l'azione di una mappa bicontinua o bimisurabile. D'altro canto, c'è un teorema di importanza rilevante [23] che fornisce uno stretto legame tra queste due proprietà: *Sotto l'ipotesi del continuo, esiste una mappa biettiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $f^{-1} = f$ e $f(M)$ ha misura nulla se e solo se M è di 1^a categoria.*

Osserviamo infine che si possono trovare classi di mappe più "regolari" che conservano le varie proprietà di piccolezza introdotte sopra. Ad esempio, non è difficile dimostrare che ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfa una *condizione di Lipschitz*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

per qualche $L > 0$ manda insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla, ma anche insiemi microscopici in insiemi microscopici.

6. La misura e la dimensione di Hausdorff

Passiamo ora ad un concetto di "piccolezza" un po' diverso. Sia s un numero reale positivo. Un insieme $N \subset \mathbb{R}$ ha *s-misura nulla* (di

[23] Questo teorema è conosciuto come *principio di dualità* di Sierpínski-Erdös, vedi [28, 26].

Hausdorff) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione $(I_n)_n$ di intervalli t.c.

$$N \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \qquad \lambda(I_n) \le \varepsilon, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n)^s \le \varepsilon.$$

La famiglia dei sottoinsiemi $N \subset \mathbb{R}$ con s-misura nulla soddisfa di nuovo le proprietà assiomatiche (a) - (e) dell'Introduzione. Per $s = 1$ otteniamo gli insiemi di misura nulla considerati nel 1, mentre per $s < 1$ otteniamo una famiglia strettamente più piccola.

Osserviamo che ogni insieme microscopico (a maggior ragione, ogni insieme numerabile) ha s-misura nulla per ogni $s > 0$. Infatti, per $0 < \varepsilon < 1$ (senza perdita di generalità) e $\lambda(I_n) \le \varepsilon^n$ risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n)^s \le \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{ns} = \frac{\varepsilon^s}{1-\varepsilon^s} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

Consideriamo adesso un altro esempio di insieme di s-misura nulla meno banale del precedente. Un elemento $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si dice *numero di Liouville* se per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, p e q primi fra loro, t.c.

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}. \tag{6.1}$$

Per illustrare questa definizione, consideriamo un semplice esempio.

ESEMPIO 6.1. *Sia* $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \ldots + \frac{1}{2^{n!}} + \ldots$*; allora* x *è un numero di Liouville. Infatti, per* $n \in \mathbb{N}$ *fissato, scegliamo*

$$p = 2^{n!-1!} + 2^{n!-2!} + \ldots + 2^{n!-(n-1)!} + 1, \qquad q = 2^{n!}$$

e otteniamo

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \ldots + \frac{1}{2^{n!}} + \ldots - \frac{p}{2^{n!}} \right| < (2^{n!})^{-n},$$

come volevasi dimostrare.

Si può dimostrare che un numero di Liouville è sempre trascendente. In altre parole, numeri algebrici come $x = \sqrt{2}$ o $x = \sqrt[3]{7}$ non sono numeri di Liouville. Poiché l'insieme dei numeri algebrici è numerabile [24], l'insieme dei numeri trascendenti deve essere di 2^a categoria. Il seguente teorema dimostra che, se da una parte l'insieme dei numeri di Liouville è grande dal punto di vista della categoria, dall'altra è piccolo dal punto di vista della misura.

TEOREMA 6.2. *L'insieme* $\mathbb{L}$ *dei numeri di Liouville ha* s*-misura nulla per ogni* $s > 0$*, mentre il complemento* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{L}$ *è di* 1^a *categoria.*

Dimostrazione. Dalla definizione (6.1) segue direttamente che

$$\mathbb{L} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

dove abbiamo posto

$$G_n = \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} I_n(p,q)$$

con

$$I_n(p,q) = \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right) \qquad (n = 1,2,3,\ldots). \tag{6.2}$$

Ovviamente, ogni G_n è aperto e contiene $\mathbb{Q}$. Di conseguenza, $\overline{G_n} = \mathbb{R}$ e

$$(\overline{\mathbb{R} \setminus G_n})^0 = (\mathbb{R} \setminus G_n^0)^0 = (\mathbb{R} \setminus G_n)^0 = \mathbb{R} \setminus \overline{G_n} = \emptyset,$$

cioè $\mathbb{R} \setminus G_n$ è mai denso per ogni $n \in \mathbb{N}$. Abbiamo cosi dimostrato che

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{L} = \mathbb{Q} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus G_n)$$

è di 1^a categoria.

Proviamo adesso che $\mathbb{L}$ ha s-misura nulla per ogni $s > 0$ (e quindi, a maggior ragione, misura nulla nel senso di Lebesgue). Sia $s > 0$ e sia $m \in \mathbb{N}$ fissato; basta dimostrare che $\mathbb{L} \cap (-m, m)$ ha s-misura nulla.

---

[24] Per provare ciò, basta considerare, per ogni numero naturale n, un'enumerazione di tutti i polinomi di grado n a coefficienti interi e osservare che un tale polinomio può avere solo n zeri.

Sia $\varepsilon > 0$. Come prima, possiamo scrivere

$$\mathbb{L} \cap (-m, m) \subseteq \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-mq}^{mq} I_n(p, q)$$

con $I_n(p, q)$ come nella (6.2). Scegliamo n sufficientemente grande da soddisfare le tre condizioni

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leq \varepsilon, \qquad n > \frac{2}{s}, \qquad \frac{(2m+1)2^s}{ns-2} \leq \varepsilon.$$

La lunghezza dell'intervallo $I_n(p, q)$ è

$$\lambda(I_n(p, q)) = \frac{2}{q^n} \leq 2^{1-n} \leq \varepsilon.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=-mq}^{mq} \frac{2^s}{q^{ns}} &= \sum_{q=2}^{\infty} \frac{(2mq+1)2^s}{q^{ns}} \leq (2m+1)2^s \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^{ns-1}} \\ &\leq (2m+1)2^s \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{ns-1}} dx = \frac{(2m+1)2^s}{ns-2} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. □

Il concetto di "s-misura nulla" dà un'altra possibilità di illustrare la piccolezza di un insieme. Più in generale, si può considerare una s-misura per ogni $s > 0$. Descriviamo brevemente la costruzione nello spazio Euclideo $\mathbb{R}^d$.

Indichiamo con $\operatorname{diam} M$ il *diametro* di $M \subset \mathbb{R}^d$, cioè

$$\operatorname{diam} M = \sup \{|x - y| : x, y \in M\}, \tag{6.3}$$

dove $|\cdot|$ indica la norma Euclidea in $\mathbb{R}^d$. Per $M \subset \mathbb{R}^d$, $s > 0$ e $\delta > 0$ poniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s(M; \delta) = \inf \Bigg\{ &\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{diam} M_n)^s : \\ &M \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \operatorname{diam} M_n \leq \delta \Bigg\}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Poiché la funzione $\delta \mapsto \mathcal{H}_s(M;\delta)$ è monotona decrescente, il limite

$$\mathcal{H}_s(M) = \lim_{\delta\to 0+} \mathcal{H}_s(M;\delta) \quad (= \sup_{\delta>0} \mathcal{H}_s(M;\delta)) \tag{6.5}$$

esiste. Il numero $\mathcal{H}_s(M) \in [0,\infty]$ viene detto *s-misura di Hausdorff* di M.

Osserviamo che non si può sostituire la (6.5) con la formula, apparentemente più semplice,

$$\tilde{\mathcal{H}}_s(M) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{diam} M_n)^s : M \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right\} \quad (= \mathcal{H}_s(M;\infty)),$$

ovvero è impossibile fare a meno del parametro $\delta > 0$. Ad esempio, per $M = \{(t, t\sin\frac{1}{t}) : 0 \le t \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$ avremmo $\tilde{\mathcal{H}}_1(M) < \infty$, benché M abbia “lunghezza infinita” e quindi la misura $\tilde{\mathcal{H}}_s(M)$ non “segue la geometria” di M come la misura $\mathcal{H}_s(M)$ (vedi anche il Teorema 6.7 più avanti).

Nel seguente lemma sono riportate alcune proprietà della s-misura di Hausdorff in $X = \mathbb{R}$. Ricordiamo che $\lambda(M)$ denota la misura di Lebesgue di un insieme misurabile $M \subseteq \mathbb{R}$.

Lemma 6.3. *La misura (6.5) ha le seguenti proprietà ($M \subseteq \mathbb{R}$ misurabile; $s, t > 0$):*

(a) $\mathcal{H}_1(M) = \lambda(M)$;

(b) $\mathcal{H}_s(M) < \infty$ implica che $\mathcal{H}_t(M) = 0$ per $t > s$;

(c) $\mathcal{H}_s(M) = 0$ per $s > 1$;

(d) $\mathcal{H}_0(M) = \#(M)$ $\;$ (= numero di elementi di M).[25]

Dimostrazione. (a) Per $M \subset \mathbb{R}$ con $\operatorname{diam} M = r$ si ha $\lambda(M) \le r$. Ma $\mathcal{H}_1(M;r) \le \operatorname{diam} M \le r$, per la definizione (6.4) e quindi $\lambda(M) \le \mathcal{H}_1(M;r) \le \mathcal{H}_1(M)$.

[25] In altre parole, $\mathcal{H}_0$ è la “misura che conta”, in inglese “counting measure”.

Viceversa, sia $[a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo semi-aperto. Fissato $\delta > 0$, si scelga una partizione $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ di $[a, b)$ t.c. $x_j - x_{j-1} \le \delta$ per $j = 1, \ldots, n$. La disuguaglianza

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{diam}[x_{j-1}, x_j) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \le b - a$$

implica che $\mathcal{H}_1([a, b); \delta) \le b - a$. Di conseguenza, $\mathcal{H}_1(M) \le \lambda(M)$ per ogni insieme misurabile $M \subset \mathbb{R}$.

(b) Per $t > s$ e per ogni $M \subset \mathbb{R}$ con $\operatorname{diam} M \le \delta$ si ha

$$\mathcal{H}_t(M; \delta) \le (\operatorname{diam} M)^t \le \delta^{t-s} (\operatorname{diam} M)^s,$$

quindi $\mathcal{H}_t(M; \delta) \le \delta^{t-s} \mathcal{H}_s(M; \delta)$. Di conseguenza, $\mathcal{H}_s(M) < \infty$ implica che

$$\mathcal{H}_t(M) = \lim_{\delta \to 0+} \mathcal{H}_t(M; \delta) \le \mathcal{H}_s(M) \lim_{\delta \to 0+} \delta^{t-s} = 0.$$

(c) Ciò è una conseguenza immediata di (a) e (b).

(d) Per la definizione (6.4) abbiamo

$$\mathcal{H}_0(M; \delta) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(M_n) : M \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n,\ \operatorname{diam} M_n \le \delta \right\},$$

dove $\mu_0(M_n) = (\operatorname{diam} M_n)^0 \equiv 1$. Abbiamo quindi $\mathcal{H}_0(M; \delta) \le \#(M)$, cioè $\mathcal{H}_0(M) \le \#(M)$. Viceversa, per ogni numero finito n di elementi di M troviamo qualche $\delta_0 > 0$ t.c. questi elementi abbiano distanza $> \delta_0$ tra di loro. Quindi, se copriamo M con k sottoinsiemi $M_1, \ldots, M_k$ di diametro $\le \delta_0$, risulta $k \ge n$, cioè $\mathcal{H}_0(M; \delta) \ge n$ per $\delta < \delta_0$. Ciò implica che $\mathcal{H}_0(M) \ge n$, quindi $\mathcal{H}_0(M) \ge \#(M)$. □

Il Lemma 6.3 dimostra che, per $M \subset \mathbb{R}$ misurabile, esiste un valore "critico" $s_0 \in [0, 1]$ t.c. $\mathcal{H}_s(M) = \infty$ per $s < s_0$ e $\mathcal{H}_s(M) = 0$ per $s > s_0$. Tale valore s_0 è chiamato la *dimensione di Hausdorff* $\dim_H(M)$ di M, quindi

$$\dim_H(M) = \inf \{s : s > 0,\ \mathcal{H}_s(M) = 0\}. \tag{6.6}$$

Per il Lemma 6.3, la dimensione di Hausdorff $\dim_H(M)$ di $M \subseteq \mathbb{R}$ è un qualche numero reale (non necessariamente intero) tra 0 e 1. Inoltre, $\mathcal{H}_s(M) = \infty$ per $s < \dim_H(M)$ e $\mathcal{H}_s(M) = 0$ per $s > \dim_H(M)$.

Questa dimensione può essere interpretata più suggestivamente cosí: il numero $\dim_H(M)$ caratterizza, per così dire, la "velocità" con cui il numero $N(\delta)$ di palle di raggio $\delta > 0$ che coprono M tende ad infinito quando δ tende a zero. In alcuni esempi "tipici" (vedi l'Esempio 6.6) di insiemi costruiti tramite una "decomposizione continuata"[26] si ha $N(\delta) \sim \delta^{-\dim_H(M)}$ e quindi

$$\dim_H(M) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N(\delta)}{\log 1/\delta}.$$

Esempio 6.4. *Come atteso, la dimensione di Hausdorff dell'asse reale è*

$$\dim_H(\mathbb{R}) = 1.$$

Infatti, sappiamo già che $\dim_H(\mathbb{R}) \geq \dim_H([0,1)) = 1$ *e* $\mathcal{H}_s([0,1)) = 0$ *per* $s > 1$. *Di conseguenza,*

$$\mathcal{H}_s(\mathbb{R}) \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_s([k, k+1)) = 0.$$

Poiché $s > 1$ *è arbitrario, si ha* $\dim_H(\mathbb{R}) \leq 1$, *per la definizione (6.6).*

Esempio 6.5. *Sia* $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}$ *l'insieme dei numeri di Liouville. Allora il Teorema 6.2 implica che* $\dim_H(\mathbb{L}) = 0$, *e quindi l'insieme* $\mathbb{L}$ *è "trascurabile" rispetto alla dimensione di Hausdorff.*

Esempio 6.6. *Sia* $C \subset [0,1]$ *il discontinuo di Cantor (1.1). Allora*

$$\dim_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,631\ldots$$

Se invece $C^\alpha \subset [0,1]$ *è il discontinuo di Cantor (1.3), allora*

$$\dim_H(C^\alpha) = \frac{\log 2}{\log 2 - \log \alpha}.$$

---

[26] Questa costruzione porta ad una specie di "self-similarity" di M, cioè ogni ingrandimento di M ha la stessa struttura di M.

In particolare, le dimensioni di Hausdorff di C^α e C^β sono diverse per $\alpha \neq \beta$.

Un altro tipo di esempio è contenuto nel seguente Teorema 6.7. Ricordiamo che la *lunghezza* di una curva (continua) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è definita da

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1 \right\},$$

dove l'estremo superiore è calcolato su tutte le partizioni $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ di $[0,1]$ e $|\cdot|$ denota sempre la norma Euclidea in $\mathbb{R}^2$. Se la parametrizzazione γ è di classe C^1, si può calcolare la lunghezza più facilmente tramite la formula classica

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|\, dt.$$

TEOREMA 6.7. *Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ una curva continua e $\Gamma = \gamma([0,1])$. Allora*

$$\mathcal{H}_1(\Gamma) \leq L(\gamma), \tag{6.7}$$

e si ha l'uguaglianza nella (6.7) *se γ è iniettiva. In particolare, $\dim_H(\Gamma) \leq 1$ se γ è rettificabile.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. In virtu della continuità uniforme di γ su $[0,1]$, esiste $\delta > 0$ t.c. $|\gamma(s) - \gamma(t)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ per $|s - t| \leq \delta$. Si scelga una partizione $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ di $[0,1]$ con $t_j - t_{j-1} \leq \delta$ per $j = 1, \ldots, n$. Allora

$$\Gamma \subseteq \gamma([0,t_1]) \cup \gamma([t_1,t_2]) \cup \ldots \cup \gamma([t_{n-1},1]).$$

Per la compattezza di $[t_{j-1}, t_j]$ esistono u_j e v_j con $t_{j-1} \leq u_j < v_j \leq t_j$ t.c.

$$\operatorname{diam} \gamma([t_{j-1}, t_j]) = |\gamma(u_j) - \gamma(v_j)| \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Utilizzando ora la nuova partizione $\{0, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n, 1\}$ si ottiene per $L(\gamma)$ la stima inferiore

$$L(\gamma) \geq \sum_{j=1}^{n} |\gamma(u_j) - \gamma(v_j)| = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{diam} \gamma([t_{j-1}, t_j]) \geq \mathcal{H}_1(\Gamma; \varepsilon).$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0+$ si può concludere che $L(\gamma) \geq \mathcal{H}_1(\Gamma)$.

Sia adesso $\gamma : [0,1] \to \Gamma$ biettiva. Dimostriamo preliminarmente che, per ogni sottointervallo $[a,b] \subseteq [0,1]$, si ha

$$\mathcal{H}_1(\gamma([a,b])) \geq |\gamma(a) - \gamma(b)|.$$

Infatti, la funzione continua $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, definita da $h(t) = |\gamma(a) - \gamma(t)|$, verifica $h(a) = 0$ e $h(b) = |\gamma(a) - \gamma(b)|$ e quindi, per il teorema dei valori intermedi, si ha $h([a,b]) \supseteq [0, |\gamma(a) - \gamma(b)|]$. Allora

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(\gamma([a,b])) &\geq \mathcal{H}_1(h([a,b])) \\ &\geq \mathcal{H}_1([0, |\gamma(a) - \gamma(b)|]) = |\gamma(a) - \gamma(b)|. \end{aligned}$$

Ora, per ogni partizione $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ di $[0,1]$, essendo γ iniettiva, gli insiemi $\gamma([x_{j-1}, x_j])$ $(j = 1, \ldots, n)$ sono disgiunti. Di conseguenza,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} |\gamma(x_{j-1}) - \gamma(x_j)| &\leq \sum_{j=1}^{n} \mathcal{H}_1(\gamma([x_{j-1}, x_j])) \\ = \mathcal{H}_1\left(\bigcup_{j=1}^{n} \gamma([x_{j-1}, x_j])\right) &= \mathcal{H}_1(\gamma([0,1])) \leq \mathcal{H}_1(\Gamma), \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. □

Consideriamo ora come sopra il problema di quanto la s-misura e la dimensione di Hausdorff rimangano inalterate per l'azione di certe classi di mappe continue. Più precisamente, poniamo il seguente

Problema 6.8. *Se M ha s-misura finita e $f : M \to N$ è un omeomorfismo, allora si ha che $\mathcal{H}_s(N) = \mathcal{H}_s(M)$? Inoltre, è vero che $\dim_H(N) = \dim_H(M)$?*

L'Esempio 6.6 dimostra che la risposta è negativa. Infatti, per quanto osservato sopra, le dimensioni di Hausdorff di C^α e C^β sono diverse per $\alpha \neq \beta$, benché $C^\alpha \cong C^\beta (\cong C)$ per ogni $\alpha, \beta \in (0,1)$. Il punto cruciale è che l'omeomorfismo tra C^α e C costruito nel §4 non soddisfa una condizione di Lipschitz. Infatti, vale il seguente

Teorema 6.9. *Sia* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *una funzione continua. Se*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{R}^d) \tag{6.8}$$

per qualche $L > 0$, *allora* $\mathcal{H}_s(f(M)) \leq L^s \mathcal{H}_s(M)$ *per ogni* $s > 0$ *e quindi* $\dim_H(f(M)) \leq \dim_H(M)$. *Se invece*

$$|f(x) - f(y)| \geq l|x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{R}^d) \tag{6.9}$$

per qualche $l > 0$, *allora* $\mathcal{H}_s(f(M)) \geq l^s \mathcal{H}_s(M)$ *per ogni* $s > 0$, *e quindi* $\dim_H(f(M)) \geq \dim_H(M)$. *Di conseguenza, se* f *soddisfa (6.8) e (6.9), allora*

$$\dim_H(f(M)) = \dim_H(M). \tag{6.10}$$

Dimostrazione. Sia soddisfatta la condizione di Lipschitz (6.8). Allora

$$M \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \qquad \operatorname{diam} M_n \leq \delta$$

implica che

$$f(M) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f(M_n), \qquad \operatorname{diam} f(M_n) \leq L\delta.$$

Di conseguenza, $\mathcal{H}_s(f(M); L\delta) \leq L^s \mathcal{H}_s(M; \delta)$ per ogni $s > 0$. La disuguaglianza $\mathcal{H}_s(f(M)) \leq L^s \mathcal{H}_s(M)$ si ottiene per $\delta \to 0+$.

In maniera analoga, l'ipotesi (6.9) implica la disuguaglianza

$$\mathcal{H}_s(f(M)) \geq l^s \mathcal{H}_s(M).$$

Inoltre, se f soddisfa (6.8) e (6.9), allora

$$l^s \mathcal{H}_s(M) \leq \mathcal{H}_s(f(M)) \leq L^s \mathcal{H}_s(M) \qquad (s > 0),$$

e la (6.10) segue direttamente dalla definizione (6.6). □

Ci sono altri tipi di "dimensioni topologiche" che caratterizzano la grandezza di un insieme. Discutiamo brevemente una di queste nel caso di $M \subset \mathbb{R}^d$ *compatto*. Si dice che M ha dimensione topologica $n \in \mathbb{N}$, se sono soddisfatte due condizioni: da una parte, esistono insiemi aperti $G_1, \ldots, G_{n+1}$ t.c. $M \subseteq G_1 \cup \ldots \cup G_{n+1}$; dall'altra, se $F_j \subset G_j$ $(j = 1, \ldots, n+1)$ sono sottoinsiemi chiusi di G_j t.c. $M \subseteq F_1 \cup \ldots \cup F_{n+1}$, allora $F_1 \cap \ldots \cap F_{n+1} \neq \emptyset$. Il numero più grande $n \in \mathbb{N}$ con queste proprietà è la *dimensione di ricoprimento*,[27] $\dim_{cov}(M)$, di M.

Ad esempio, sia $M = [0,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Intuitivamente, M dovrebbe essere qualcosa di "unidimensionale". Possiamo infatti ricoprire M con $G_1 = \{(x,y) : -1 < x < \frac{2}{3}\}$ e $G_2 = \{(x,y) : \frac{1}{3} < x < 2\}$ e qualunque due insiemi chiusi $F_1 \subset G_1$ e $F_2 \subset G_2$ con $M \subseteq F_1 \cup F_2$ hanno intersezione non vuota, perché M è connesso. Di conseguenza, $\dim_{cov}(M) = 1$, come ci si aspettava.

Per definizione, la dimensione di ricoprimento $\dim_{cov}(M)$ è sempre un numero naturale, mentre la dimensione di Hausdorff $\dim_H(M)$ può non essere intera. Ciononostante, c'è un legame tra questi due numeri:

Teorema 6.10. *Per ogni insieme compatto $M \subset \mathbb{R}^d$ si ha*

$$\dim_{cov}(M) \leq \dim_H(M). \tag{6.11}$$

Dimostrazione. Sia $\dim_{cov}(M) = n$. Scegliamo insiemi aperti $G_1, \ldots, G_{n+1}$ in $\mathbb{R}^d$ come nella definizione della dimensione di ricoprimento. Per $x \in M$ e $j = 1, \ldots, n+1$ poniamo

$$d_j(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus G_j), \qquad d(x) = d_1(x) + \ldots + d_{n+1}(x).$$

Allora la funzione $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{d(x)}(d_1(x), \ldots, d_{n+1}(x)) \tag{6.12}$$

è continua. Poiché M è compatto con $M \subseteq G_1 \cup \ldots \cup G_{n+1}$, ne segue $a \leq d(x) \leq b$ per qualche $a > 0$ e $b < \infty$. La maggiorazione

$$\left| \frac{d_j(x)}{d(x)} - \frac{d_j(y)}{d(y)} \right| = \frac{|d(x)d_j(y) - d(y)d_j(x)|}{d(x)d(y)}$$

$$\leq \frac{d(x)|d_j(y) - d_j(x)| + d_j(x)|d(x) - d(y)|}{d(x)d(y)} \leq \frac{b(n+2)}{a^2}|x - y|$$

[27] In inglese "covering dimension".

per $j = 1, \ldots, n+1$ implica che

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{b(n+1)(n+2)}{a^2}|x-y|.$$

Ciò significa che la funzione (6.12) soddisfa una condizione di Lipschitz (6.8) e quindi

$$\dim_H(f(M)) \leq \dim_H(M). \tag{6.13}$$

Denotiamo con Δ_n il poliedro aperto

$$\Delta_n = \{(\tau_1, \ldots, \tau_{n+1}) : 0 < \tau_1, \ldots, \tau_{n+1} < 1,\ \tau_1 + \ldots + \tau_{n+1} = 1\}$$

in $\mathbb{R}^{n+1}$. Mostriamo che $\Delta_n \subseteq f(M)$. Infatti, fissato $(\tau_1, \ldots, \tau_{n+1}) \in \Delta_n$, gli insiemi

$$F_j = \{x : x \in \mathbb{R}^{n+1},\ d_j(x) \geq \tau_j d(x)\} \qquad (j = 1, \ldots, n+1)$$

sono chiusi e soddisfano $F_j \subset G_j$ e $F_1 \cup \ldots \cup F_{n+1} \supseteq M$. Dalla definizione di $\dim_{cov}(M)$ segue che esiste un punto $\hat{x} \in F_1 \cap \ldots \cap F_{n+1}$. Ma $d_j(\hat{x}) = \tau_j d(\hat{x})$ (poiché $d_1(\hat{x}) + \ldots + d_{n+1}(\hat{x}) = d(\hat{x})$), cioè $(\tau_1, \ldots, \tau_{n+1}) = f(\hat{x})$.

Combinando l'inclusione $\Delta_n \subseteq f(M)$ con la (6.13) concludiamo che

$$\dim_H(M) \geq \dim_H(f(M)) \geq \dim_H(\Delta_n) = n,$$

e quindi vale la (6.11). □

Il Teorema 6.10 fornisce un legame con la teoria (molto di moda) dei cosiddetti "frattali". Un insieme compatto $M \subset \mathbb{R}^d$ si chiama *frattale* se $\dim_{cov}(M) < \dim_H(M)$, cioè vale la disuguglianza stretta nella (6.11). Ad esempio, è facile convincersi che il discontinuo di Cantor (1.1) ha dimensione di ricoprimento $\dim_{cov}(C) = 0$ e che quindi è un insieme frattale.

7. Operatori contrattivi

Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $F : X \to X$ un operatore non lineare che soddisfa una condizione di Lipschitz

$$d(F(x), F(y)) \leq L d(x, y) \qquad (x, y \in X). \tag{7.1}$$

Denotiamo con $Lip(F)$ la *minima costante di Lipschitz* nella (7.1), quindi

$$Lip(F) = \sup_{x \neq y} \frac{d(F(x), F(y))}{d(x,y)}. \tag{7.2}$$

Nel caso particolare $Lip(F) < 1$, l'operatore F è chiamato *contrattivo* (oppure una *contrazione*), nel caso $Lip(F) = 1$ *non espansivo.*

La minima costante di Lipschitz dà anche un'idea della piccolezza di un operatore F. In particolare, per F *lineare* si ha semplicemente $Lip(F) = ||F||$, cioè la (7.2) coincide con la norma di F.

Ricordiamo il ben noto Teorema di punto fisso di Banach-Caccioppoli per operatori contrattivi: *una contrazione F in uno spazio metrico completo X ha un unico punto fisso, cioè un $x^* \in X$ t.c. $F(x^*) = x^*$.* Inoltre, questo punto fisso può essere “calcolato” esplicitamente come limite delle approssimazioni successive $x_n = F(x_{n-1})$ con $x_0 \in X$ arbitrario. In altre parole, ogni operatore F non “troppo grande” lascia esattamente un punto invariante.

La condizione di contrazione per F significa che

$$d(F(x), F(y)) \leq q d(x,y) \qquad (x, y \in X) \tag{7.3}$$

per qualche $q < 1$. Potremmo chiederci se si può sostituire la (7.3) con la condizione più debole

$$d(F(x), F(y)) < d(x,y) \qquad (x, y \in X,\ x \neq y). \tag{7.4}$$

Un operatore soddisfacente la (7.4) potrebbe essere chiamato *debolmente contrattivo.* Non è difficile vedere che la (7.4) non garantisce l'esistenza di un punto fisso. Ad esempio, per $F(x) = \log(1 + e^x)$ in $X = \mathbb{R}$ si ha $F'(x) = e^x/(1 + e^x) < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi F è debolmente contrattivo, per il teorema del valor medio. D'altro canto, è ovvio che F non ha punti fissi e quindi non è una contrazione. Infatti, si ha $F'(x) \to 1$ per $x \to \infty$, e per questo non vale la (7.3).

E' interessante osservare che l'operatore $F(x) = \log(1 + e^x)$ non manda nessun intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ in sé stesso. Ciò è una conseguenza del fatto che, *se X è compatto, allora ogni contrazione debole F di X in sé ha un unico punto fisso.*[28]

E' facile convincersi che operatori non espansivi possono essere senza punti fissi ($F(x) = x + 1$ in $X = \mathbb{R}$), oppure avere molti punti fissi ($F(x) = x$ in $X = \mathbb{R}$). Possiamo riassumere i risultati sull'esistenza ed unicità di punti fissi nella seguente Tabella 5:

punti fissi di operatori	*esistenza*	*unicità*
contrattivi	si	si
debolmente contrattivi	no	si
non espansivi	no	no

Tabella 5

E' interessante osservare, però, che un operatore non espansivo F ha spesso "punti quasi fissi", cioè punti x^* in cui la distanza $d(x^*, F(x^*))$ è "piccola". Per essere più precisi, denotiamo con

$$\eta(F; M) = \inf\{d(x, F(x)) : x \in M\} \tag{7.5}$$

lo *spostamento minimo* di F in $M \subseteq X$. Dimostriamo che, nel caso di un insieme limitato, chiuso e convesso M in uno spazio di Banach X, lo spostamento minimo (7.5) è sempre zero.

Teorema 7.1. *Siano X uno spazio di Banach, $M \subset X$ un insieme limitato, chiuso e convesso e $F : M \to M$ un operatore non espansivo. Allora*

$$\eta(F; M) = 0.$$

[28] La dimostrazione di questo fatto è semplice: La funzione $\phi : X \to [0, \infty)$ definita da $\phi(x) = d(x, F(x))$ è continua e quindi ha un punto di minimo $x^* \in X$, per la compattezza di X. Se avessimo $\phi(x^*) > 0$, allora $\phi(F(x^*)) < \phi(x^*)$ – una contraddizione. Di conseguenza, $\phi(x^*) = 0$, cioè x^* è un punto fisso di F. L'unicità segue come nel caso di una contrazione.

Dimostrazione. Fissiamo $z \in M$ ed $\varepsilon \in (0,1)$ e consideriamo l'operatore $F_\varepsilon : M \to M$ definito da [29]

$$F_\varepsilon(x) = \varepsilon z + (1-\varepsilon)F(x).$$

Allora F_ε è una contrazione con $Lip(F_\varepsilon) = (1-\varepsilon)Lip(F) \leq 1-\varepsilon$. Per il teorema di punto fisso di Banach-Caccioppoli, esiste un unico punto $x_\varepsilon^* \in M$ con $x_\varepsilon^* = F_\varepsilon(x_\varepsilon^*) = \varepsilon z + (1-\varepsilon)F(x_\varepsilon^*)$. Di conseguenza,

$$\eta(F;M) \leq ||x_\varepsilon^* - F(x_\varepsilon^*)|| = \varepsilon||z - F(x_\varepsilon^*)|| \leq \varepsilon \operatorname{diam} M,$$

e quindi $\eta(F;M) = 0$, dato che $\varepsilon > 0$ è arbitrario e M è limitato. □

Illustriamo due esempi nei quali sono soddisfatte le ipotesi del Teorema 7.1, benché l'operatore F non abbia punti fissi in M.

Esempio 7.2. *Sia* $X = C([0,1])$ *e*

$$M = \{x : x \in X,\, 0 = x(0) \leq x(t) \leq x(1) = 1\}. \tag{7.6}$$

Definiamo $F : M \to M$ *tramite la formula* $F(x)(t) = tx(t)$. *E' facile vedere che* M *è limitato, chiuso e convesso e* F *è non espansivo su* M. *Per il Teorema 7.1 si ha* $\eta(F;M) = 0$, *ma* F *ovviamente non ha punti fissi in* M. *Se scegliamo* $z(t) = t$, *il punto* x_ε^* *costruito nella dimostrazione del Teorema 7.1 è*

$$x_\varepsilon^*(t) = \frac{\varepsilon t}{1-(1-\varepsilon)t},$$

e la stima $||x_\varepsilon^* - F(x_\varepsilon^*)|| \leq \varepsilon$ *si verifica facilmente.*

L'operatore F *in questo esempio gode di una proprietà particolarmente interessante. Se consideriamo per questo operatore le approssimazioni successive* $x_n = F(x_{n-1})$, *come nel caso di una contrazione, allora per* ogni *punto iniziale* $x_0 \in M$ *si ottiene*

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} ||x_0 - F^n(x_0)|| \\ &= \lim_{n\to\infty} \max_{0\leq t\leq 1} |(1-t^n)x_0(t)| = 1 = \operatorname{diam} M. \end{aligned} \tag{7.7}$$

[29] Il fatto che F_ε manda M in sé è una conseguenza della convessità di M.

Ciò significa, grosso modo, che le approssimazioni successive prendono la "massima distanza possibile" da ogni punto iniziale in M. [30]

Diamo ora un esempio di un operatore debolmente contrattivo (vedi (7.4)) senza punti fissi che manda una palla chiusa in sé. Evidentemente, un tale esempio è possibile solo in uno spazio di dimensione infinita.

ESEMPIO 7.3. *Sia $X = c_0$ lo spazio di Banach delle successioni convergenti a zero con la norma*

$$||x|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n| \qquad (x = (\xi_n)_n),$$

e sia M la palla chiusa unitaria in X. L'operatore F definito da

$$\begin{aligned} F(x) &= F(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, \ldots) \\ &= (\tfrac{1}{2}(1 + ||x||), \tfrac{3}{4}\xi_1, \tfrac{7}{8}\xi_2, \ldots, (1 - 2^{-n})\xi_{n-1}, \ldots) \end{aligned}$$

manda M in sé e soddisfa la condizione di contrazione debole (7.4). Se $\hat{x} = (\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3, \ldots)$ fosse un punto fisso di F in M, allora avremmo

$$\hat{\xi}_1 = \tfrac{1}{2}(1 + ||\hat{x}||),\ \hat{\xi}_2 = \tfrac{1}{2}\tfrac{3}{4}(1 + ||\hat{x}||),\ \hat{\xi}_3 = \tfrac{1}{2}\tfrac{3}{4}\tfrac{7}{8}(1 + ||\hat{x}||), \ldots$$

e, in particolare, $\hat{\xi}_n \geq 1$ per ogni n. Il punto $\hat{x}$ non appartiene quindi allo spazio X.

Osserviamo che non si può costruire l'Esempio 7.3 in uno spazio di Hilbert. Infatti, *ogni operatore non espansivo che manda un insieme limitato, chiuso e convesso in uno spazio di Hilbert in sé ha un punto fisso.* [31]

Il seguente Teorema 7.4 dà una generalizzazione importante del Teorema 7.1. Ricordiamo che il *raggio* di un insieme limitato M in uno spazio di Banach X è definito da

$$\rho(M) = \inf_{x\in M} \sup \{||x - y|| : y \in M\}.$$

[30] Dunque succede esattamente il contrario di quello che succede per operatori contrattivi, dove le approssimazioni successive convergono all'unico punto fisso!

[31] vedi [7]

E' chiaro che $\rho(M) \leq \operatorname{diam} M$ per ogni $M \subset X$. Ad esempio, per la palla unitaria $M = B_1(0)$ in uno spazio normato abbiamo $\rho(M) = 1$ e $\operatorname{diam} M = 2$. D'altro canto, la relazione (7.7) dimostra che l'insieme (7.6) soddisfa l'uguaglianza "estremale" $\rho(M) = \operatorname{diam} M$ $(= 1)$.

TEOREMA 7.4. *Siano X uno spazio di Banach, $M \subset X$ un insieme limitato, chiuso e convesso e $F : M \to M$ un operatore che soddisfa la condizione di Lipschitz (7.1) con $Lip(F) \geq 1$. Allora*

$$\eta(F; M) \leq \rho(M) \left(1 - \frac{1}{Lip(F)}\right). \tag{7.8}$$

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, fissiamo $L > Lip(F)$ e $z \in M$ con $\sup \{||z - y|| : y \in M\} \leq \rho(M) + \varepsilon$. Consideriamo l'operatore $F_\varepsilon : M \to M$ definito da

$$F_\varepsilon(x) = \left(1 - \frac{1}{L + \varepsilon}\right) z + \left(\frac{1}{L + \varepsilon}\right) F(x).$$

Poiché $Lip(F_\varepsilon) \leq L/(L + \varepsilon)$, per il teorema di punto fisso di Banach-Caccioppoli, esiste un unico punto $x_\varepsilon^* \in M$ con $x_\varepsilon^* = F_\varepsilon(x_\varepsilon^*)$. Di conseguenza,

$$\eta(F; M) \leq ||x_\varepsilon^* - F(x_\varepsilon^*)|| = \left|\left|\left(1 - \tfrac{1}{L+\varepsilon}\right) z - \left(1 - \tfrac{1}{L+\varepsilon}\right) F(x_\varepsilon^*)\right|\right|$$

$$\leq \left(1 - \tfrac{1}{L+\varepsilon}\right) ||z - F(x_\varepsilon^*)|| \leq (\rho(M) + \varepsilon) \left(1 - \tfrac{1}{L+\varepsilon}\right),$$

da cui segue la tesi, poiché $\varepsilon > 0$ ed $L > Lip(F)$ sono arbitrari. □

Nel caso particolare $Lip(F) = 1$ otteniamo, ovviamente, il Teorema 7.1. Il seguente Esempio 7.5 dimostra che la stima (7.8) è ottimale.

ESEMPIO 7.5. *Siano X e M come nell'Esempio 7.2 e sia $F_k : M \to M$ l'operatore di sovrapposizione (2.2) generato dalla funzione (autonoma)*

$$f_k(u) = \max \{k(u - 1) + 1, 0\} \qquad (k \geq 1).$$

Sappiamo già che $\rho(M) = 1$. Inoltre, è facile convinversi che $Lip(F_k) = k$. Dimostriamo che

$$\eta(F_k; M) = 1 - \frac{1}{k}, \tag{7.9}$$

e quindi abbiamo uguaglianza nella (7.8).

Infatti, per k fissato si ha

$$|f_k(\phi(s)) - \phi(s)| = \begin{cases} \phi(s) & se \quad 0 \leq s \leq 1 - \frac{1}{k}, \\ (k-1)(1-\phi(s)) & se \quad 1 - \frac{1}{k} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

per ogni $\phi \in M$. Distinguiamo ora due casi.

Supponiamo prima che $\phi(s_0) \leq 1 - \frac{1}{k}$ per qualche $s_0 \geq 1 - \frac{1}{k}$. Allora

$$||F_k(\phi) - \phi|| \geq (k-1)(1-\phi(s_0)) \geq 1 - \frac{1}{k}.$$

D'altro canto, supponiamo che $\phi(s) > 1 - \frac{1}{k}$ per ogni $s \geq 1 - \frac{1}{k}$. Per la continuità di ϕ troviamo qualche $s_0 \leq 1 - \frac{1}{k}$ t.c. $\phi(s_0) \geq 1 - \frac{1}{k}$, e quindi

$$||F_k(\phi) - \phi|| \geq \phi(s_0) \geq 1 - \frac{1}{k}.$$

Ciò implica che $\eta(F_k; M) \geq 1 - \frac{1}{k}$. Considerando in particolare $\phi(s) = s$ nel punto $s_k = 1 - \frac{1}{k}$ otteniamo l'uguaglianza (7.9).

8. Operatori condensanti

Sia (X, d) uno spazio metrico completo. E' ben noto che un insieme $M \subseteq X$ è *precompatto* (cioè $\overline{M}$ è compatto) se e solo se, per ogni $\delta > 0$, esiste un numero *finito* di insiemi $M_1, \ldots, M_m$ t.c.

$$(8.1) \qquad M \subseteq M_1 \cup \ldots \cup M_m, \qquad \operatorname{diam} M_j \leq \delta \quad (j = 1, \ldots, m).$$

In altre parole, se M *non* è precompatto, allora esiste un $\delta_0 > 0$ t.c. per $\delta < \delta_0$ non basta più un numero finito di insiemi di diametro $\leq \delta$ per ricoprire M. Questa osservazione motiva la seguente definizione.

La *misura di non compattezza di Kuratowski* di un insieme $M \subseteq X$ è definita da

$$(8.2) \qquad \gamma(M) = \inf\{\delta > 0 : \text{ esistono } M_1, \ldots, M_m \text{ con } (8.1)\}.$$

Nel seguito ci limitiamo al caso di uno *spazio di Banach* reale X; supponiamo quindi che la metrica d sia di tipo $d(x, y) = ||x - y||$, dove $||\cdot||$ indica la norma in X. In questo caso consideriamo, oltre alla misura di non compattezza (8.2), la *misura di non compattezza di Hausdorff*

$$\alpha(M) = \inf\{\varepsilon > 0 : \text{ esiste una } \varepsilon\text{-rete finita per } M\}. \tag{8.3}$$

Ricordiamo che una ε-rete finita per M in X è un insieme

$$\{z_1, \dots, z_m\} \subset X \quad \text{t.c.} \quad M \subseteq B_\varepsilon(z_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(z_m),$$

cioè un ricoprimento di M con un numero finito di palle[32] di raggio ε in X.

Nel seguente lemma riportiamo alcune proprietà delle misure di non compattezza (8.2) e (8.3).

LEMMA 8.1. *Sia β la misura di non compattezza (8.2) o (8.3). Allora valgono le seguenti proprietà ($M, N \subset X$; $\lambda \in \mathbb{R}$):*

(a) $\beta(M) < \infty$ se e solo se M è limitato;

(b) $\beta(M) = 0$ se e solo se M è precompatto;

(c) $\beta(M \cup N) = \max\{\gamma(M), \gamma(N)\}$;

(d) $\beta(M + N) \leq \beta(M) + \beta(N)$;

(e) $\beta(\lambda M) = |\lambda|\beta(M)$;

(f) $\beta(\overline{co}\, M) = \beta(M)$

Dimostrazione. Le proprietà (a) e (b) seguono direttamente dalla definizione. Dimostriamo le altre proprietà solo per $\beta = \gamma$; la dimostrazione per $\beta = \alpha$ è analoga. Se $M \subseteq M_1 \cup \dots \cup M_m$ con $\operatorname{diam} M_j \leq \delta$ $(j = 1, \dots, m)$ e $N \subseteq N_1 \cup \dots \cup N_n$ con $\operatorname{diam} N_i \leq \varepsilon$ $(i = 1, \dots, n)$, allora $M \cup N \subseteq M_1 \cup \dots \cup M_m \cup N_1 \cup \dots \cup N_n$ e quindi $\gamma(M \cup N) \leq \max\{\delta, \varepsilon\}$. La stima inversa segue dalla monotonia di γ.

Le proprietà (d) ed (e) seguono dalle proprietà del diametro

$$\operatorname{diam}(M + N) \leq \operatorname{diam} M + \operatorname{diam} N, \quad \operatorname{diam}(\lambda N) = |\lambda| \operatorname{diam} M.$$

---

[32] Qui non importa se prendiamo palle aperte o chiuse.

L'unica proprietà non banale è la (f).

La stima $\gamma(\overline{co}\, M) \geq \gamma(M)$ segue sempre dalla monotonia di γ. Fissato $\delta > \gamma(M)$, scegliamo $M_1, \dots, M_m$ t.c. $M \subseteq M_1 \cup \ldots \cup M_m$ con $\operatorname{diam} M_j \leq \delta$ per $j = 1, \dots, m$. Possiamo assumere che gli insiemi M_j siano tutti convessi, poiché $\operatorname{diam}(co\, M) = \operatorname{diam} M$. Sia

$$\Delta_{m-1} = \{(\tau_1, \dots, \tau_m) : 0 \leq \tau_1, \dots, \tau_m \leq 1,\, \tau_1 + \ldots + \tau_m = 1\}$$

il poliedro chiuso in $\mathbb{R}^m$. Ad ogni $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m) \in \Delta_{m-1}$ associamo l'insieme $A(\tau) = \tau_1 M_1 + \ldots + \tau_m M_m$. Allora

$$\gamma(A(\tau)) \leq \sum_{j=1}^{m} \tau_j \gamma(M_j) \leq \delta \qquad (\tau \in \Delta_{m-1}).$$

Proviamo che $A(\tau)$ è convesso. Infatti, siano $x \in A(\xi)$, $y \in A(\eta)$, $\zeta = t\xi + (1-t)\eta$ per qualche $t \in (0,1)$ e $z = tx + (1-t)y$; basta dimostrare che $z \in A(\zeta)$. Ora, se $x = \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_m x_m$ e $y = \eta_1 y_1 + \ldots + \eta_m y_m$ con $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \Delta_{m-1}$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in \Delta_{m-1}$ e $x_j, y_j \in M_j$ $(j = 1, \dots, m)$, allora possiamo scrivere z nella forma $z = \zeta_1 z_1 + \ldots + \zeta_m z_m$, dove

$$z_j = \begin{cases} \dfrac{t\xi_j}{\zeta_j} x_j + \left(1 - \dfrac{t\xi_j}{\zeta_j}\right) y_j & \text{se} \quad \zeta_j > 0, \\ y_j & \text{se} \quad \zeta_j = 0 \end{cases}$$

$(j = 1, \dots, m)$. Di conseguenza, $z \in A(\zeta)$, poiché $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in \Delta_{m-1}$ e $z_j \in co\, M_j = M_j$.

Per complettare la dimostrazione di (f), facciamo vedere che $\gamma(co\, M) \leq \gamma(M)$. Si ha

$$M \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} M_j \subseteq \bigcup_{\tau \in \Delta_{m-1}} A(\tau),$$

quindi

$$co\, M \subseteq co\left(\bigcup_{j=1}^{m} M_j\right) \subseteq co\left(\bigcup_{\tau \in \Delta_{m-1}} A(\tau)\right) = \bigcup_{\tau \in \Delta_{m-1}} A(\tau).$$

Per la compattezza del poliedro Δ_{m-1} possiamo trovare, per $\varepsilon > 0$, punti $\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(n)} \in \Delta_{m-1}$ t.c.

$$\sup_{\tau \in \Delta_{m-1}} \min \{|\tau - \tau^{(1)}|, \ldots, |\tau - \tau^{(n)}|\} \leq \frac{\varepsilon}{c},$$

dove $c = \sup \{||x|| : x \in M_1 \cup \ldots \cup M_m\} < \infty$. In altre parole, per ogni x con

$$x \in \bigcup_{\tau \in \Delta_{m-1}} A(\tau), \qquad x = \sum_{j=1}^{m} \tau_j x_j, \qquad \sum_{j=1}^{m} \tau_j = 1$$

possiamo trovare $i \in \{1, \ldots, n\}$ con $|\tau_1 - \tau_1^{(i)}| + \ldots + |\tau_m - \tau_m^{(i)}| \leq \varepsilon/c$. Ma il punto $\hat{x} = \tau_1^{(i)} x_1 + \ldots + \tau_m^{(i)} x_m$ soddisfa

$$||x - \hat{x}|| \leq \sum_{j=1}^{m} |\tau_j - \tau_j^{(i)}| \, ||x_j|| \leq \varepsilon,$$

quindi

$$co\, M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left[A(\tau^{(i)}) + \overline{B_\varepsilon(0)} \right].$$

Tenendo presente quanto visto otteniamo la stima

$$\gamma(co\, M) \leq \max \, \{\gamma(A(\tau^{(i)})) + \gamma(\overline{B_\varepsilon(0)}) : i = 1, \ldots, n\} \leq \delta + 2\varepsilon,$$

e la tesi segue dall'arbitrarietà di $\delta > \gamma(M)$ ed $\varepsilon > 0$. □

Un'altra proprietà molto importante delle misure di non compattezza (8.2) e (8.3) è la seguente, analoga alla "proprietà di intersezione di Cantor" per insiemi compatti:

LEMMA 8.2. *Sia $(M_n)_n$ una successione di insiemi chiusi $M_n \subseteq X$ con $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \ldots$ e $\beta(M_n) \to 0$ per $n \to \infty$. Allora*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \neq \emptyset. \tag{8.4}$$

Dimostrazione. Sia $(x_n)_n$ una successione con $x_n \in M_n$ per ogni n, e sia $N_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$. Ovviamente, $N_n \subseteq M_n$, quindi $\beta(N_1) = \beta(N_n) \leq \beta(M_n) \to 0$ per $n \to \infty$. Di conseguenza, N_1 è compatto e quindi $x_{n_k} \to x_*$ $(k \to \infty)$ per qualche sottosuccessione $(x_{n_k})_k$, ed il limite x_* appartiene all'intersezione (8.4). □

Sia $F : X \to X$ un operatore non lineare continuo e limitato. [33] Supponiamo che esista $k > 0$ t.c.

$$\beta(F(M)) \leq k\beta(M) \tag{8.5}$$

per ogni insieme limitato $M \subset X$, dove β denota una delle misure di non compattezza (8.1) o (8.2). La più piccola costante $k > 0$ per cui vale la (8.5) viene spesso chiamata la *misura di non compattezza dell'operatore* F e denotata con $\beta(F)$. In particolare, si dice che F è un operatore *condensante* se $\beta(F) < 1$ e *β-non espansivo* se $\beta(F) = 1$. Due classi di operatori particolarmente importanti per cui $\beta(F)$ è finito sono considerate nei seguenti esempi.

ESEMPIO 8.3. *Se $F : X \to X$ è un operatore* compatto*, cioè F manda ogni insieme limitato in un insieme precompatto, allora $\beta(F) = 0$. Viceversa, l'uguaglianza $\beta(F) = 0$ significa che $\beta(F(M)) = 0$ per ogni insieme limitato $M \subset X$ e quindi F è compatto.*

ESEMPIO 8.4. *Se $F : X \to X$ soddisfa una condizione di Lipschitz (7.1) con costante di Lipschitz $L > 0$, allora un semplice ragionamento geometrico dimostra che $\beta(F) \leq L$.[34] In particolare, otteniamo l'importante stima*

$$\beta(F) \leq Lip(F) \tag{8.6}$$

che fornisce un legame tra la minima costante di Lipschitz e la misura di non compattezza di un operatore F. E' facile trovare esempi

---

[33]Un operatore si chiama *limitato* se manda ogni insieme limitato in un insieme limitato. Si osservi che, diversamente dal caso lineare, un operatore non lineare può essere continuo e non limitato, oppure limitato e non continuo.

[34]Infatti, se $\{z_1, \ldots, z_m\}$ è una ε-rete finita per M e $Lip(F) \leq L$, allora $\{F(z_1), \ldots, F(z_m)\}$ è una $L\varepsilon$-rete finita per $F(M)$. Analogamente, se $\{M_1, \ldots, M_m\}$ è un ricoprimento di M con insiemi di diametro $\leq \delta$ e $Lip(F) \leq L$, allora $\{F(M_1), \ldots, F(M_m)\}$ è un ricoprimento di $F(M)$ con insiemi di diametro $\leq L\delta$.

in cui $\beta(F) = 0$ *e* $Lip(F) = \infty$*; potremmo quindi dire che la caratteristica* $\beta(F)$ *è più fine della caratteristica* $Lip(F)$ *per descrivere la "piccolezza" di un operatore* F*. Per* F lineare *la (8.6) diventa*

$$\beta(F) \leq ||F||, \tag{8.7}$$

cioè la misura di non compattezza di un operatore lineare non può mai superare la sua norma.

Dimostriamo ora un importante teorema di punto fisso per operatori condensanti. [35] Questo teorema ha trovato numerose applicazioni ad equazioni integrali, problemi al contorno per equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali e equazioni funzionali.

TEOREMA 8.5. *Siano* X *uno spazio di Banach,* $M \subset X$ *chiuso, limitato e convesso e* $F : M \to M$ *un operatore continuo e condensante. Allora* F *ha un punto fisso in* M*.*

Dimostrazione. Definiamo una successsione di insiemi $(M_n)_n$ ponendo

$$M_1 = \overline{co}\, F(M),\ M_2 = \overline{co}\, F(M_1),\ M_3 = \overline{co}\, F(M_2), \ldots,$$

e denotiamo

$$M_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Per costruzione, M_∞ è un sottoinsieme limitato, chiuso e convesso di M. Inoltre, per il Lemma 8.2, $M_\infty \neq \emptyset$. L'inclusione $F(M) \subseteq M$ implica che $F(M_n) \subseteq M_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $F(M_\infty) \subseteq M_\infty$. Per il Teorema di punto fisso di Schauder esiste $x^* \in M_\infty \subseteq M$ con $F(x^*) = x^*$. □

E' evidente che il Teorema 8.5 contiene il Teorema di punto fisso di Schauder come caso particolare ($\beta(F) = 0$). D'altro canto, la dimostrazione fa vedere che questi due teoremi sono in realtà *equivalenti.* Inoltre, la stima (8.6) dimostra che il Teorema 8.5 generalizza

[35] vedi [10]. Nella maggior parte delle applicazioni l'insieme M è una palla chiusa in uno spazio di dimensione infinita. E' interessante osservare che il Teorema 8.5 vale anche se l'operatore F manda una *sfera* in sé, vedi [24].

anche il Teorema di punto fisso di Banach-Caccioppoli (in una forma particolare).

Come nel paragrafo precedente, potremmo chiederci se il Teorema 8.5 sussiste se sostituiamo la condizione $\beta(F) < 1$, cioè

$$\beta(F(M)) \leq q\beta(M) \quad (M \subset X \text{ limitato; } q < 1) \tag{8.8}$$

con la condizione più debole

$$\beta(F(M)) < \beta(M) \quad (M \subset X \text{ limitato con } \beta(M) > 0). \tag{8.9}$$

Potremmo chiamare operatori che soddisfano la (8.9) *debolmente condensanti.* Vedremo nel seguente Teorema 8.6 che la risposta è affermativa.[36] La condizione (8.9) che caratterizza operatori debolmente condensanti *non* è quindi analoga alla condizione (7.4) che caratterizza operatori debolmente contrattivi.

TEOREMA 8.6. *Siano X uno spazio di Banach, $M \subset X$ chiuso, limitato e convesso e $F : M \to M$ un operatore continuo e debolmente condensante. Allora F ha un punto fisso in M.*

Dimostrazione. Fissiamo un punto $m \in M$ e denotiamo con $\Sigma(M)$ la classe di tutti i sottoinsiemi chiusi convessi $K \subseteq M$ t.c. $m \in K$ e $F(K) \subseteq K$. Inoltre, poniamo

$$\tilde{M} = \bigcap_{K \in \Sigma(M)} K, \qquad \hat{M} = \overline{co}\,[F(\tilde{M}) \cup \{m\}].$$

Ovviamente, $\Sigma(M) \neq \emptyset$, $\tilde{M} \neq \emptyset$ e $F(\tilde{M}) \subseteq \tilde{M}$. Dimostriamo che $\tilde{M} = \hat{M}$.

Il fatto che $m \in \tilde{M}$ e $F(\tilde{M}) \subseteq \tilde{M}$ implica che $\hat{M} \subseteq \tilde{M}$. Ma questa inclusione implica anche che $F(\hat{M}) \subseteq F(\tilde{M}) \subseteq \hat{M}$, quindi $\hat{M} \in \Sigma(M)$ e $\tilde{M} \subseteq \hat{M}$.

Dalle proprietà dimostrate nel Lemma 8.1 otteniamo

$$\begin{aligned} \beta(\tilde{M}) &= \beta(\hat{M}) = \beta(F(\tilde{M}) \cup \{m\}) \\ &= \max\{\beta(F(\tilde{M})), \beta(\{m\})\} = \beta(F(\tilde{M})). \end{aligned}$$

---

[36] vedi [27].

Ora, la (8.9) implica che $\beta(\tilde{M}) = 0$, cioè $\tilde{M}$ è compatto. Poiché $\tilde{M} = \hat{M}$ è anche convesso, la tesi segue di nuovo dal Teorema di punto fisso di Schauder. □

Esempi assai semplici dimostrano che operatori β-non espansivi possono essere privi di punti fissi, oppure averne molti. Inoltre, il fatto che il Teorema di Darbo contiene il Teorema di Schauder come caso particolare implica che non possiamo aspettare unicità del punto fisso. Possiamo quindi costruire la seguente tabella riassuntiva:

punti fissi di operatori	*esistenza*	*unicità*
condensanti	si	no
debolmente condensanti	si	no
β-non espansivi	no	no

Tabella 6

Inoltre, possiamo riassumere i legami tra tutte le classi di operatori considerati in questo paragrafo e quello precedente con il seguente schema:

$$\begin{array}{ccccc}
F \text{ contrattivo} & \Rightarrow & F \text{ condensante} & \Leftarrow & F \text{ compatto} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \\
F \text{ deb. contrattivo} & & F \text{ deb. condensante} & & \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \\
F \text{ non espansivo} & \Rightarrow & F\ \beta\text{-non espansivo} & &
\end{array}$$

Tabella 7

Nel seguente paragrafo faremo un confronto tra le classi di operatori condensanti, debolmente condensanti e β-non espansivi dal punto di vista della loro “grandezza”.

9. Un confronto tra operatori condensanti

Siano X uno spazio di Banach di dimensione infinita e $M \subset X$ un sottoinsieme chiuso, limitato, convesso e non compatto. Denotiamo con $\Gamma_k(M)$ l'insieme di tutti gli operatori continui $F : M \to M$ con $\gamma(F) \leq k$ ($k > 0$). In particolare, $\Gamma_1(M)$ contiene gli operatori γ-non espansivi e

$$\Gamma_1^-(M) = \bigcup_{k<1} \Gamma_k(M) \tag{9.1}$$

gli operatori condensanti $F : M \to M$ rispetto alla misura di non compattezza (8.2). Sulla classe $\Gamma_1(M)$ consideriamo la metrica

$$d(F, G) = \sup_{x \in M} ||F(x) - G(x)||. \tag{9.2}$$

Non è difficile convincersi che lo spazio $\Gamma_1(M)$ è completo in questa metrica e $\Gamma_k(M)$ è chiuso in $\Gamma_1(M)$ per ogni $k \leq 1$.

Denotiamo ancora con $\Gamma(M)$ la classe degli operatori debolmente condensanti $F : M \to M$ (vedi (8.9)). Valgono quindi le inclusioni

$$\Gamma_1^-(M) \subseteq \Gamma(M) \subseteq \Gamma_1(M).$$

Facciamo vedere, tramite due esempi, che queste inclusioni sono proprie.

Esempio 9.1. *Sia X uno spazio di Banach di dimensione infinita e M la palla chiusa unitaria in X. Definiamo $F : M \to M$ con la formula*

$$F(x) = (1 - ||x||)x. \tag{9.3}$$

Allora $F \notin \Gamma_1^-(M)$. Infatti, per $r \in (0, 1)$ si ha $F(B_r(0)) \supseteq B_{r(1-r)}(0)$ e quindi

$$\gamma(F(B_r(0))) \geq \gamma(B_{r(1-r)}(0)) = 2r(1 - r) = (1 - r)\gamma(B_r(0)).$$

Poiché $1 - r \to 1$ per $r \to 0$, l'operatore (9.3) non è condensante.

Dimostriamo che F è debolmente condensante. Per $A \subseteq M$ con $\gamma(A) > 0$ e $0 < r < \frac{1}{2}\gamma(A)$ poniamo $A_1 = A \cap B_r(0)$ e $A_2 = A \backslash B_r(0)$. Allora

$$\gamma(F(A_1)) \leq \gamma(A_1) \leq \gamma(B_r(0)) = 2r < \gamma(A),$$

da una parte, e

$$\gamma(F(A_2)) \leq \gamma(\overline{co}\,[(1-r)A \cup \{0\}]) = (1-r)\gamma(A) < \gamma(A),$$

dall'altra. Si ha quindi

$$\gamma(F(A)) = \max\{\gamma(F(A_1)), \gamma(F(A_2))\} < \gamma(A),$$

cioè $F \in \Gamma(M)$.

Esempio 9.2. *Sia $X = l_2$ lo spazio delle successioni $x = (\xi_n)_n$ in $\mathbb{R}$ con la norma usuale*

$$||x|| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2} \qquad (x = (\xi_n)_n),$$

e sia M la palla chiusa unitaria in X. Definiamo $F : M \to M$ con la formula

$$F(x) = F(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) = (\sqrt{1 - ||x||^2}, \xi_1, \xi_2, \ldots).$$

Possiamo rappresentare F come somma $F = F_1 + F_2$ dell'isometria lineare

$$F_1(x) = F_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$$

e dell'operatore compatto non lineare

$$F_2(x) = F_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) = (\sqrt{1 - ||x||^2}, 0, 0, \ldots).$$

Di conseguenza, per ogni insieme $A \subseteq M$ abbiamo

$$\gamma(F(A)) \leq \gamma(F_1(A)) + \gamma(F_2(A)) = \gamma(F_1(A)) = \gamma(A),$$

cioè $F \in \Gamma_1(M)$. D'altro canto, è facile vedere che F non ha punti fissi e quindi F non è debolmente condensante, per il Teorema 8.6.

Infine, trovare un esempio di un operatore condensante che non è né compatto né contrattivo è facile:

ESEMPIO 9.3. *Sia $X = l_2$ come prima, e sia $F : X \to X$ definito con la formula*

$$F(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = (2\xi_1, \tfrac{1}{2}\xi_2, \tfrac{1}{2}\xi_3, \dots).$$

E' chiaro che F è condensante con $\gamma(F(M)) = \frac{1}{2}\gamma(M)$ per ogni $M \subset X$ limitato. D'altro canto, F non è compatto, poiché l'insieme $F(B_1(0))$ non è precompatto, e neanche non espansivo, poiché $F(0,0,0,\dots) = (0,0,0,\dots)$ e $F(1,0,0,\dots) = (2,0,0,\dots)$.

La seguente Tabella 8 dimostra che le implicazioni riportate nella Tabella 7 sono le uniche possibili:

	contr.	*deb. contr.*	*non esp.*	*cond.*	*deb. cond.*	*$\beta-$ non esp.*
non contr.	—	Es. 7.3	Es. 7.2	Es. 9.3	Es. 9.1	Es. 9.2
non deb. contr.	—	—	Es. 7.2	Es. 9.3	Es. 9.3	Es. 9.2
non non esp.	—	—	—	Es. 9.3	Es. 9.3	Es. 9.2
non cond.	—	Es. 7.3	Es. 7.2	—	Es. 9.1	Es. 9.2
non deb. cond.	—	Es. 7.3	Es. 7.2	—	—	Es. 9.2
non β-non esp.	—	—	—	—	—	—

Tabella 8

Diamo adesso un teorema sulla "disposizione" di $\Gamma_1^-(M)$ in $\Gamma(M)$ e di $\Gamma(M)$ in $\Gamma_1(M)$.

TEOREMA 9.4. *Valgono le seguenti proprietà:*

(a) $\Gamma_1^-(M)$ *è denso in* $\Gamma_1(M)$

(b) $\Gamma_1^-(M)$ *è di 1[a] categoria in* $\Gamma_1(M)$*;*

(c) $\Gamma_1(M) \setminus \Gamma(M)$ *è denso in* $\Gamma_1(M)$*;*

(d) $\Gamma_1(M) \setminus \Gamma(M)$ *è di tipo* F_σ *in* $\Gamma_1(M)$*.*

Dimostrazione. (a) Senza ledere la generalità supponiamo che $0 \in M$. Fissato $F \in \Gamma_1(M)$, poniamo $F_n(x) = k_n F(x)$ con $k_n = \frac{n}{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Allora $F_n \in \Gamma_{k_n}(M) \subseteq \Gamma_1^-(M)$ e

$$d(F_n, F) \leq \frac{1}{n} \sup_{x \in M} ||F(x)|| \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

cioè $\Gamma_1^-(M)$ è denso in $\Gamma_1(M)$.

(b) Per quanto osservato sopra, $\Gamma_k(M)$ è chiuso in $\Gamma_1(M)$ per ogni $k \leq 1$. Proviamo che $\Gamma_k(M)^0 = \emptyset$ per $k < 1$. Fissato $F \in \Gamma_k(M)$, sappiamo che F ha un punto fisso $x^* \in M$. Possiamo supporre senza ledere la generalità che $x^* = 0$. Dato $\varepsilon > 0$, scegliamo $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$ t.c. $||F(x)|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ per $||x|| \leq \delta$. Definiamo $G : M \to M$ come segue

$$(9.4) \quad G(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad ||x|| \leq \frac{\delta}{2}, \\ \hat{\delta}(x)x + \left(1 - \hat{\delta}(x)\right) F(x) & \text{se} \quad \frac{\delta}{2} \leq ||x|| \leq \delta, \\ F(x) & \text{se} \quad ||x|| \geq \delta. \end{cases}$$

con $\hat{\delta}(x) := 2(\delta - ||x||)/\delta$. Per la nostra scelta di δ abbiamo $d(F, G) \leq \varepsilon$ (vedi (9.2)). Ora, per $A \subseteq M$ poniamo

$$A_1 = A \cap \overline{B_{\delta/2}(0)}, \quad A_2 = A \cap [\overline{B_\delta(0)} \setminus B_{\delta/2}(0)], \quad A_3 = A \setminus B_\delta(0).$$

Per la definizione di G si ha

$$\gamma(G(A_1)) = \gamma(A_1) \leq \gamma(A),$$

$$\gamma(G(A_2)) \leq \gamma(\text{co}\,[A_2 \cup F(A_2)])$$

$$= \max\{\gamma(A_2), \gamma(F(A_2))\} = \gamma(A_2) \leq \gamma(A),$$

e

$$\gamma(G(A_3)) = \gamma(F(A_3)) \leq \gamma(A),$$

quindi

$$\gamma(G(A)) = \max\{\gamma(G(A_1)), \gamma(G(A_2)), \gamma(G(A_3))\} \leq \gamma(A).$$

Abbiamo così dimostrato che $G \in \Gamma_1(M)$. D'altro canto, il fatto che $G(x) = x$ per $x \in M \cap \overline{B_{\delta/2}(0)}$) e $M \cap \overline{B_{\delta/2}(0)}$ non è compatto implica che $G \notin \Gamma(M)$ e quindi $\Gamma_k(M)^0 = \emptyset$. La (b) segue ora dall'uguaglianza

$$\Gamma_1^-(M) = \bigcup_{k<1} \Gamma_k(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_{k_n}(M) \qquad (k_n = \tfrac{n}{n+1}).$$

(c) Dato $F \in \Gamma_1(M)$, l'operatore G appena costruito nella (9.4) soddisfa $G \in \Gamma_1(M) \setminus \Gamma(M)$ e $d(F, G) \leq \varepsilon$.

(d) Per $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$G_n = \bigcup_{F \in \Gamma_1^-(M)} \left\{G : G \in \Gamma_1(M),\, d(F, G) < \tfrac{1}{2n}(1 - \gamma(F))\right\}.$$

Essendo l'unione di palle aperte, l'insieme G_n è aperto in $\Gamma_1(M)$ per ogni n. Dimostriamo che

$$\Gamma(M) = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n. \tag{9.5}$$

Fissiamo $G \in G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap \ldots$ e $A \subseteq M$ con $\gamma(A) > 0$ e scegliamo $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande in modo che $\frac{1}{n} < \gamma(A)$. Per la definizione di G_n possiamo trovare $F \in \Gamma_1^-(M)$ con $d(F, G) < \frac{1}{2n}(1 - \gamma(F))$. Si ha dunque

$$\begin{aligned} \gamma(G(A)) &\leq \gamma(F(A)) + \tfrac{1}{n}(1 - \gamma(F)) \\ &< \gamma(F)\gamma(A) + (1 - \gamma(F))\gamma(A) = \gamma(A), \end{aligned}$$

cioè $G \in \Gamma(M)$. L'inclusione inversa è ovvia.

Basta ora osservare che la rappresentazione (9.5) implica che

$$\Gamma_1(M) \setminus \Gamma(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Gamma_1(M) \setminus G_n) \quad \overline{(\Gamma_1(M) \setminus G_n)} = \Gamma_1(M) \setminus G_n,$$

e quindi che $\Gamma_1(M) \setminus \Gamma(M)$ è di tipo F_σ. □

Possiamo riassumere il contenuto del Teorema 9.4 in maniera più suggestiva così: un operatore condensante ha sempre punti fissi (Teorema 8.5), ma anche un operatore debolmente condensante ha sempre punti fissi (Teorema 8.6). Benché il Teorema 8.6 sembri una generalizzazione abbastanza insignificante del Teorema 8.5, in realtà la differenza è notevole! Infatti, da una parte "quasi tutti" gli operatori γ-non espansivi sono debolmente condensanti (Teorema 9.4 (a)) e quindi hanno punti fissi. Da questo punto di vista gli Esempi 9.1 e 9.3 sono "tipici", ma l'Esempio 9.2 non lo è. D'altra, la classe degli operatori debolmente condensanti (e quindi, a maggior ragione, la classe degli operatori condensanti) è "trascurabile" nella classe degli operatori γ-non espansivi (Teorema 9.4 (b)). Da questo punto di vista gli Esempi 9.1 e 9.3 non sono "tipici", ma l'Esempio 9.2 lo è.

10. Alcune osservazioni bibliografiche

Tenendo conto del carattere "folkloristico" di questo survey, abbiamo deciso di elencare molti libri sui risultati ed esempi considerati sopra. Quasi tutto il materiale presentato nei paragrafi precedenti si può trovare in questi libri, o almeno nella loro bibliografia.

Due libri classici sulla teoria della misura sono [8] e [18], ma ci sono ormai molti libri di testo più moderni e ben scritti, p. es. [4, 5, 6, 9, 22, 23]. Il recente libro [20] contiene molto materiale presentato sopra sulla teoria della misura e le sue applicazioni. Alcuni legami della teoria della misura con l'analisi funzionale, da una parte, e la topologia, dall'altra, sono esposti in [14, 29, 31] Quasi tutti i controesempi dei paragrafi 1-5 si possono trovare in [15, 25, 32, 33]. Molte informazioni sull'aspetto geometrico della teoria della misura (come la misura e la dimensione di Hausdorff, vedi il §6) sono contenute nei libri [11, 12, 21] e, su un livello molto più elevato e quindi meno leggibile, in [13].

Una discussione dettagliata della teoria delle misure di non compattezza ed operatori condensanti, insieme a numerose applicazioni, si può trovare in [1, 30]. Teoremi di punti fissi sono trattati in [16], mentre tutti i risultati sull'operatore di sovrapposizione (2.2) sono presi dalla monografia [2].

Acknowledgements. These lecture notes are based on a series of talks given by the author at the Summer School on Measure Theory and Real Analysis in Gorizia (Italy). The author expresses his gratitude to Aljoša Volčič for the honorable invitation and kind hospitality. He is indebted to Emma D'Aniello for communicating Example 5.6, as well as to Franco Obersnel for many helpful remarks and comments.

Riferimenti bibliografici

[1] R.R. Akhmerov, M.I. Kamenskij, A.S. Potapov, A.E. Rodkina, and B.N. Sadovskij, *Measures of Noncompactness and Condensing Operators*, Nauka, Novosibirsk, 1986, in Russian, Engl. transl.: Birkhäuser, Basel, 1992.

[2] J. Appell and P. P. Zabrejko, *Nonlinear Superposition Operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[3] J. Appell and P.P. Zabrejko, *Continuity properties of the superposition operator*, J. Austral. Math. Soc. **46** (1989), 1–25.

[4] H. Bauer, *Mass- und Integrationstheorie*, DeGruyter, Berlin, 1990.

[5] E. Behrends, *Mass- und Integrationstheorie*, Springer, Berlin, 1987.

[6] S.K. Berberian, *Measure and Integration*, Macmillan, New York, 1979.

[7] F.E. Browder, *Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **53** (1965), 1272–1276.

[8] F. Cafiero, *Misura ed integrazione*, Cremonese, Roma, 1959.

[9] D.L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser, Basel, 1980.

[10] G. Darbo, *Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **24** (1955), 84–92.

[11] G.A. Edgar, *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer, Berlin, 1990.

[12] G.A. Edgar, *Integral, Probability, and Fractal Measures*, Springer, Berlin, 1998.

[13] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer, Berlin, 1969.

[14] D.H. Fremlin, *Topological Riesz Spaces and Measure*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974.

[15] B.R. Gelbaum and J.M.H. Olmsted, *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day, San Francisco, 1964.
[16] K. Goebel and W.A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
[17] Z. Grande and J.S. Lipiński, *Un exemple d'une fonction sup-mesurable qui n'est pas mesurable*, Colloquium Math. **39** (1978), no. 1, 77–79.
[18] P.R. Halmos, *Measure Theory*, Van Nostrand, Amsterdam, 1950.
[19] M.A. Krasnosel'skij and A. V. Pokrovskij, *On a discontinuous superposition operator*, Uspekhi Mat. Nauk **32** (1977), no. 1, 169–170, [in Russian].
[20] J. Lukeš and J. Malý, *Measure and Integral*, Matfyz Press, Prague, 1994.
[21] P. Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
[22] M. Metivier, *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*, Dunod, Paris, 1984.
[23] M.E. Munroe, *Measure and Integration*, Addison-Wesley Reading, MA, 1971.
[24] R.D. Nussbaum, *Some fixed point theorems*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 360–365.
[25] J.C. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer, Berlin, 1971.
[26] P.Erdös, *Some remarks on set theory*, Annals Math. **44** (1943), 643–646.
[27] B.N. Sadovskij, *On a fixed point principle*, Funk. Anal. Prilozh. **1** (1967), no. 2, 74–76, [in Russian].
[28] W. Sierpiński, *Sur la dualité entre la première catégorie et la mesure nulle*, Fund. Math. **22** (1934), 276–280.
[29] Y. Sonntag, *Topologie et analyse fonctionelle*, Ed. Ellipses, Paris, 1998.
[30] J.M. Ayerbe Toledano, T. Dominguez Benavides, and G. López Acedo, *Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory*, Birkhäuser, Basel, 1997.
[31] F. Topsøe, *Topology and Measure*, Springer, Berlin, 1970.
[32] A.C.M. van Rooij and W.H. Schikhof, *A Second Course on Real Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982.
[33] G.L. Wise and E.B. Hall, *Counterexamples in Probability and Real Analysis*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1993.

Received May 17, 2001.