Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste
Suppl. 1 Vol. XXXII, 105–118 (2001)

La Stabilità Asintotica dei Ground States della NLS

Scipio Cuccagna (*)

Summary. - *Accenniamo al comportamento per $t \to \infty$ di soluzioni della NLS vicino a groud states e alla dimostrazione di stabilità asintotica dei ground states nel caso di minore "complessità interna". I risultati sono simili a quelli per sistemi integrabili.*

1. Introduzione

Qui per NLS si intende l'equazione nonlineare di Schrödinger, in questa nota facciamo una breve descrizione di un nostro recente risultato, [7]. Per NLS intendiamo

$$iu_t + \Delta u + \beta(|u|^2)u = 0\,,\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\,,\ n \geq 3, \tag{1}$$

per $\beta(t^2)$ una funzione liscia soddisfaciente varie proprietà che qui non discutiamo. L'analisi per tempi lunghi di soluzioni inizialmente localizzate in un area limitata dello spazio, con una coda decrescente, lisce e piccole, è ben conosciuta. In particolare è noto che esse si comportano grosso modo come soluzioni dell'equazione lineare; il caso $n \geq 3$ è piú semplice del caso $n \leq 2$. Quando la nonlinearità è focalizzante, è possibile avere dei solitoni (o formazione di singolarità, qui non discusse), ossia dei pacchetti d'onde che non si dispergono. Dette soluzioni evidentamente sono non piccole. Qui in particolare siamo interessati, per $\omega > 0$, a soluzioni $\phi_\omega(x)$ dell'equazione

$$-\Delta\phi_\omega + \omega\phi_\omega - \beta(|\phi_\omega^2|)\phi_\omega = 0, \tag{2}$$

(*) Author's address: Southern Illinois University, Carbondale, IL 62901.

dalle quali si ottiene soluzioni

$$e^{\frac{i}{2}v\cdot x-\frac{i}{4}|v|^2t+it\omega+i\gamma}\phi_\omega(x-vt-D) \tag{3}$$

di (1). In particolare, siamo interessati a soluzioni di (2) che sono: positive, a simmetria sferica, decrescenti esponenzialmente per $|x|\to\infty$ e C^2. Considerati dei dati iniziali $u(0,x)$ vicini a qualcosa della forma (3) per $t=0$, possiamo scrivere, almeno per un certo intervallo di tempo, la soluzione nella forma

$$\begin{aligned}
&u(t,x)=e^{i\Theta(t,x)}(\phi_{\omega(t)}(y(t,x))+R(t,y(t,x)))\\
&\Theta(t,x)=\frac{1}{2}v(t)\cdot x-\frac{1}{4}\int_0^t|v(s)|^2ds+\int_0^t\omega(s)ds+\gamma(t)\\
&y(t,x)=x-\int_0^t v(s)ds-D(t)\\
&\sigma=(\omega,\gamma,v,D),
\end{aligned} \tag{4}$$

con $r(t)$ piccolo, almeno per un po'. Il problema se si possa fare lo stesso per tutti i $t\in[0,+\infty)$ è stato studiato in profondità, per (1) come per altre equazioni, da molti autori, vedi per esempio [31], [32],[24], [23], [25], [10], [11], [4], [1], [6], [28], [5] e [33]. Noi vogliamo discutere se, assumendo che (4) sia valida in $[0,+\infty)$, sia possibile dimostrare che $\|R(t,\cdot)\|_{L^\infty}\to 0$ e $\sigma(t)$ converge ad un limite per $t\to+\infty$. Il problema, in generale, è aperto, ed a nostro modesto parere è una delle piú interessanti domande nel contesto della teoria delle equazioni dispersive, in particolare perché le risposte parziali date finora coinvolgono uno splendido intreccio di idee di diversa origine: sistemi hamiltoniani, analisi dello spettro di operatori complicati, scattering per operatori di Schrödinger, teoria delle forme normali, metodi di equazioni non lineari. Nella sezione 1 diamo un po' di background. Per una rigorosa presentazione delle sezioni 2 - 4 si veda [7].

2. Risultati classici

Il problema della stabilità dei solitoni, o di altre soluzioni speciali, è tra i piú ricorrenti e meglio studiati. Ci limitiamo a ricordare qui lavoro sui ground states di Weinstein [31] [32] e Grillakis Shatah e

Strauss [10] [11]. Questi contengono una risposta al piú debole problema della stabilità orbitale (risposta ottenuta indipendentemente nelle rispettive tesi da Shatah e Weinstein). Se inseriamo la formula (4) in (1) ed usiamo (2) otteniamo

$$\begin{aligned} iR_t - i\dot{D}\cdot\nabla R = -\Delta R + \omega(t)R - \beta(\phi^2_{\sigma(t)})R - \beta'(\phi^2_{\sigma(t)})\phi^2_{\sigma(t)}R - \\ \beta'(\phi^2_{\sigma(t)})\phi^2_{\sigma(t)}\bar{R} + \frac{\dot{v}\cdot x}{2}R + \left(\frac{\dot{v}(t)\cdot x}{2} + \dot{\gamma}(t)\right)\phi_{\sigma(t)} \\ - i\dot{\omega}(t)\phi'_{\sigma(t)} + i\dot{D}\cdot\nabla\phi_{\sigma(t)} + \dot{\gamma}(t)R + e^{-i\Theta}N(e^{i\Theta}R) \quad (5) \end{aligned}$$

dove $\phi'_\sigma = (\partial_\omega\phi_\omega)(y)$ (qui assumiamo $(x,\omega)\to\phi_\omega(x)$ liscia); $R_t = R_t(t,y)$ calcolato in $y = y(t)$. Vorremmo trattare (5) come una NLS con R piccolo. Purtroppo la presenza di $\bar{R}$ fa sí che in effetti (5) sia un sistema. Si pone allora $R = \Re R + i\Im R$ lo si interpreta come un 2 vettore colonna con $R_1 = \Re R$ e $R_2 = \Im R$. Poi si pone $J = -i$,

$$\begin{aligned} &J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ H_\sigma = \begin{bmatrix} L_+ & 0 \\ 0 & L_- \end{bmatrix}, \\ &L_+ = -\Delta + \omega - \beta(\phi^2_\sigma) - 2\phi^2_\sigma\beta'(\phi^2_\sigma), \\ &L_- = -\Delta + \omega - \beta(\phi^2_\sigma). \end{aligned}$$

I due operatori L_+ ed L_- soddisfanno

i $\operatorname{Ker} L_- = \{\phi_\sigma\}$

ii $\operatorname{Ker} L_+ = \{\partial_{y^1}\phi_\omega(y),\dots,\partial_{y^n}\phi_\omega(y)\}$. il primo fatto essendo piú simplice da dimostrare, [31], laddove il secondo è dimostrato in [19] dopo una lunga storia.

Poniamo

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \dot{\gamma}(t) + \frac{1}{2}\dot{v}(t)\cdot\int_0^t v(s)ds + \frac{\dot{v}(t)\cdot D(t)}{2}$$

e riscriviamo (5) nella forma:

$$\begin{aligned} R_t = JH_{\sigma(t)}R + \dot{D}\cdot\nabla R + J\frac{\dot{v}\cdot y}{2}R + J\dot{\tilde{\gamma}}(t)R \\ +J\left(\frac{\dot{v}(t)\cdot y}{2} + \dot{\tilde{\gamma}}(t)\right)\phi_{\sigma(t)} - \dot{\omega}(t)\phi'_{\sigma(t)} + \dot{D}\cdot\nabla\phi_{\sigma(t)} + Je^{J\Theta}N(e^{-J\Theta}R). \end{aligned} \quad (6)$$

Prima di procedere osserviamo che lo spettro di JH_σ (per σ fissato) è parte importante in quanto segue. Se poniamo $H_0 = -\Delta + \omega$, risulta che lo spettro essenziale di JH_σ coincide con quello di JH_0, e cioè, si veda (16), con

$$\{z \colon \Re z = 0, \, , |\Im z| \geq \omega\}. \tag{7}$$

Lo spettro di JH_σ è simmetrico per riflessioni rispetto agli assi delle coordinate. [31] ma anche [10] e [11] dimostrano che se il prodotto interno in L^2 è

$$\langle \phi_\sigma, \phi'_\sigma \rangle > 0, \tag{8}$$

allora lo spettro di JH_σ è tutto contenuto nell'asse immaginario ed inoltre ([32] [10] [11]) si ha stabilità orbitale. Ciò viene dimostrato richiedendo $R(t) \in N_g^\perp(H_{\sigma(t)}J)$, dove $L^2 = N_g(JH_\sigma) \oplus N_g^\perp(H_\sigma J)$ è un inizio di decomposizione spettrale rispetto a JH_σ.

I due fatti su ricordati su $L_\pm$ permettono di dimostrare, [31], (qui ϕ è $(\phi, 0)$ ecc.):

$$N_g(H_\sigma J) = \{\phi_\sigma, J\phi'_\sigma, J\nabla\phi_\sigma, y\phi_\sigma\}$$

con $N_g(L) = \cup_{j \geq 1} \operatorname{Ker} L^j$. Considerando il prodotto interno di (6) con i vettori qui sopra e ponendo $\dot{\vec{\sigma}} = (\dot\omega, \dot{\vec{\gamma}}, \dot v, \dot D)$, si ottengono equazioni schematicamente della forma:

$$\begin{aligned}
&\dot\omega \langle \phi_\sigma, \phi'_\sigma \rangle = \langle J e^{J\Theta} N(e^{-J\Theta}R), e^{-J\Theta}\phi_\sigma \rangle + O(\dot{\vec{\sigma}} \|R\|_{W^{1,\infty}}) \\
&\dot{\vec{\gamma}} \langle \phi_\sigma, \phi'_\sigma \rangle = -\langle e^{J\Theta} N(e^{-J\Theta}R), e^{-J\Theta}\phi'_\sigma \rangle + O(\dot{\vec{\sigma}} \|R\|_{W^{1,\infty}}) \\
&\dot v_j \|\phi_\sigma\|_2^2/2 = -\langle e^{J\Theta} N(e^{-J\Theta}R), e^{-J\Theta}\partial_j\phi_\sigma \rangle + O(\dot{\vec{\sigma}} \|R\|_{W^{1,\infty}}) \\
&\dot D_j \|\phi_\sigma\|_2^2/2 = -\langle J e^{J\Theta} N(e^{-J\Theta}R), e^{-J\Theta} y_j\phi_\sigma \rangle + O(\dot{\vec{\sigma}} \|R\|_{W^{1,\infty}})
\end{aligned} \tag{ME}$$

dove $j = 1, \cdots, n$. Il fatto cruciale è che se abbiamo (8) per σ fissato, risulta che la forma quadratica $\langle H_\sigma \cdot, \cdot \rangle$ è strettamente positiva in $N_g^\perp(H_\sigma J)$ e da essa si può definire una norma equivalente a $\| \cdot \|_{H^1}$. Partendo da qui si riesce a concludere che $\langle H_\sigma R, R \rangle$ è una quantità quasi conservata. Da qui si ottengono vari tipi di stabilità. In altre parole [31] [32] [10] [11] trattano il sistema (2) (ME) essenzialmente come un ODE. Se in (8) invertiamo l'uguaglianza, [10] [11] dimostrano instabilità orbitale.

3. Stabilità asintotica

Supponiamo di avere (4). Come possiamo dimostrare che $R(t)$ diventa piccolo in qualche senso? I primi passi concettuali su questo sono dovuti a Soffer Weinstein [26] [27] e Buslaev Perelman [3] [2], dove i primi due sono su un problema analogo ma piú semplice ed i secondi due considerano, in modo un po' euristico e non rigoroso, il caso $n = 1$. Il fatto chiaro è che(5) o (6) sono piú o meno delle equazioni di Schrödinger con un potenziale (se si avesse una ODE si cercherebbe di usare qualche dissipatività. Ma qui non c'è dissipatività bensí semmai dispersività associata allo spettro continuo). Pertanto, ignorando termini nonlineari, le quazioni somigliano a

$$iu_t + \Delta u + V(x)u = 0 \tag{9}$$

ed, ancor piú, a

$$iu_t + \Delta u + V(t,x)u = 0. \tag{10}$$

Ricordiamo ora che per

$$iu_t + \Delta u = 0 \tag{11}$$

abbiamo

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \le ct^{-\frac{n}{2}}\|u(0)\|_{L^1}. \tag{12}$$

La cosa importante ora è che (12) continua a valere per soluzioni di (9), se $V(x)$ è abbastanza localizzata e regolare, e se $u(0)$ giace nella parte relativa allo spettro continuo, vedi [35], [36], [37], [9] [29], [34], [16], [15], [12], [13], [20] ed altri articoli in essi citati. Ma per soluzioni di (10) assai poco è noto, si veda per esempio i risultati assai deboli nell'ultima parte di [14]. In (2) la parte piú spiacevole è $J\omega(t)R$ contenuto in $JH_\sigma R$. Non pare esserci modo elementare per liberarsene. Il merito maggiore di [3] è, a nostro parere, l'avere mostrato come comportarsi con $J\omega(t)R$ in una situazione speciale. Essa consiste nel caso in cui la seguente ipotesi spettrale sia verificata:

$$0 \text{ è l'unico autovalore di } JH_\sigma \tag{13}$$

(c'è anche un'ulteriore ipotesi sugli estremi dello spettro continuo nel caso $n \leq 4$). Prima di procedere ricordiamo che in generale $[-i\omega(t), i\omega(t)]$ conterrà molti altri autovalori (per inciso [2] tratta del caso in cui vi sia una coppia, vengono in coppie, $\pm i\lambda(t)$, con $2\lambda > \omega$, piú un'altra condizione; in [30] è trattato un problema simile anche se piú facile). Assumendo (13) si tratta di dimostrare un classico argomento di continuità (questo è solo abbozzato in [2]). Ossia, se in $[0, T]$ vale

$$
\begin{aligned}
&|\sigma(t) - \sigma_0| < 2\delta \\
&\|R(t)\|_{H^{2m+1}} < 2\delta \\
&\||x|R(t,x)\|_{H^{2m}} < 2\delta(1+t) \\
&\|R(t)\|_{W^{m,\infty}} < 2\delta(1+t)^{-\frac{n}{2}}.
\end{aligned}
$$

si dimostra, se i dati iniziali sono piccoli,

$$
\begin{aligned}
&|\sigma(t) - \sigma_0| < \delta \\
&\|R(t)\|_{H^{2m+1}} < \delta \\
&\||x|R(t,x)\|_{H^{2m}} < \delta(1+t) \\
&\|R(t)\|_{W^{m,\infty}} < \delta(1+t)^{-\frac{n}{2}}.
\end{aligned}
$$

Per continuità si può allora prendere $[0, T]$ arbitrario ed il risultato è dimostrato. La dimostrazione consiste in due parti. Nella prima si lavora su (6) e si ottengono disuguaglianze dell'energia, che sono della forma

$$
\begin{aligned}
&\|R(t)\|_{H^{2m+1}} \leq c_1 e^{\int_0^t c_2(|\dot{\sigma}(s)| + \|R(s)\|_{W^{m,\infty}})ds} \\
&(\|R(0)\|_{H^{2m+1}} + \int_0^t e^{\int_0^s c_2(|\dot{\sigma}(s')| + \|R(s')\|_{W^{m,\infty}})ds'} \\
&(1 + \|(1+|y|)R(s\ )\|_{H^{2m}})|\dot{\sigma}(s)|ds.
\end{aligned}
$$

Si veda [7]. Qui ci interessa enfatizzare $\|R(t)\|_{L^\infty}$. La bella idea in [3] per controllarlo è di considerare

$$
\begin{aligned}
&e^{i\Theta} R = e^{i\Theta_1} r(t, y_1(t)) \\
&\Theta_1(t,x) = \frac{1}{2} v_1 \cdot x - \frac{1}{4} t |v_1|^2 + t\omega_1 + \gamma_1 \\
&y_1(t,x) = x - tv_1 - D_1,
\end{aligned}
$$

e di considerare in $[0,T]$, r_t è $r_t(t,z)$ per $z = y_1(t)$,

$$\begin{aligned} ir_t = -\Delta r + \omega_1 r - \beta(\phi^2_{\sigma_1})r - \beta'(\phi^2_{\sigma_1})\phi^2_{\sigma_1} r - \beta'(\phi^2_{\sigma_1})\phi^2_{\sigma_1}\bar r \\ - \{\beta(\phi^2_{\sigma(t)}) - \beta(\phi^2_{\sigma_1})\}r - \{\beta'(\phi^2_{\sigma(t)})\phi^2_{\sigma(t)} - \beta'(\phi^2_{\sigma_1})\phi^2_{\sigma_1}\}r - \\ \{e^{i2\Theta - i2\Theta_1}\beta'(\phi^2_{\sigma(t)})\phi^2_{\sigma(t)} - \beta'(\phi^2_{\sigma_1})\phi^2_{\sigma_1}\}\bar r \\ + \left(\frac{\dot v(t)\cdot x}{2} + \dot\gamma(t)\right) e^{i\Theta - i\Theta_1}\phi_{\sigma(t)} - i\dot\omega(t) e^{i\Theta - i\Theta_1}\phi'_{\sigma(t)} \\ + e^{-i\Theta_1} N(e^{i\Theta_1} r). \end{aligned}$$

Il piccolo miracolo è che il problema linearizzato è, glissando su varie questioni piú o meno elemantari,

$$R_t = JH_{\sigma_1}R \quad , \quad R(0) \in N_g^\perp(H_{\sigma_1}J). \tag{14}$$

Il nostro maggior contributo è stato di dimostrare in [7] che se (13) è vero allora

$$\|R(t)\|_\infty \le ct^{-\frac{n}{2}}\|R(0)\|_1. \tag{15}$$

Dato (15) è quasi routine dimostrare l'argomento di continuità.

4. La stima (15)

(14) assomiglia a (9), tuttavia è un sistema. La dimostrazione di (12) per (9) è dovuta inizialmente a Journé Soffer Sogge [16] per $n \ge 3$, Yajima [37] per $n = 2$ e Galtabiar Yajima [9] e Weder [29] [34] per $n = 1$. Qui ci soffermiamo al caso $n \ge 3$, ed allo splendido lavoro di Yajima [35] e [36]. Non è chiaro come applicare i risultati per (14), ma risulta che la teoria in [35] e [36] è ridimostrabile per (14). In particolare, assumendo (13), lo spazio $N_g^\perp(H_{\sigma_1}J)$ gioca il ruolo di spettro continuo. Prima di procedere notiamo che tutto questo potrebbe essere un fatto fortuito. Qui gioverà ricordare che se per esempio consideriamo l'equazione di Klein Gordon

$$U_{tt} - \Delta U + m^2 U - \beta(|U|^2)U = 0$$

e se per semplicità ci limitiamo alle sole soluzioni di simmetria sferica, il sistema analogo a (14) è della forma

$$\begin{aligned}
&v_{1t} = \omega v_2 + w_1 + \dot\omega \phi' \\
&v_{2t} = -\omega v_1 + w_2 \\
&w_{1t} = \Delta v_1 - m^2 v_1 + \beta(\phi^2) v_1 + 2\beta'(\phi^2)\phi^2 v_1 + \omega w_2 + N_1 \\
&w_{2t} = \Delta v_2 - m^2 v_1 + \beta(\phi^2) v_2 - \omega w_1 - \dot\omega \phi + \omega\dot\omega\phi' + N_2
\end{aligned}$$

che si può riscrivere nella forma (]14), ma che, al momento almeno, non sappiamo come trattare. Come dimostrare (15)? Noi abbiamo proceduto seguendo [35] e [36]. Prima di tutto consideriamo

$$W_+ u = \lim_{t\to+\infty} e^{JH_{\sigma_1}t} e^{-J(-\Delta+\omega_1)t} u.$$

Risulta che W_+ è ben definito in L^2. Inoltre $W_+ L^2 \subseteq N_g^\perp(H_{\sigma_1} J)$. Inoltre W_+ è limitato in L^2 (di norma $\neq 1$) e

$$e^{JH_{\sigma_1}t} W_+ = W_+ e^{J(-\Delta+\omega_1)t}.$$

(15) segue dal fatto che W_+ si estende in un isomorfismo

$$L^p \to L^p \cap N_g^\perp(H_{\sigma_1} J)$$

per ogni $p \in [1, +\infty]$. Infatti le stime per $e^{JH_{\sigma_1}t}$ e per $e^{-J(-\Delta+\omega_1)t}$ sono essenzialmente le stesse e per quest'ultimo sono facili. Come si procede? Nel seguito scriviamo

$$H = H_{\sigma_1} \quad , \quad H_0 = -\Delta + \omega_1.$$

Si procede come in [31] [32] e si scrive

$$\begin{aligned}
\langle W_+ u, v\rangle &= \langle u, v\rangle + \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_0^{+\infty} \langle J(H-H_0) e^{-JH_0 t - \epsilon t} u, e^{-HJt-\epsilon t} v\rangle dt \\
&= \langle u, v\rangle + \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle JA(JH_0+\epsilon+i\lambda)^{-1} u, B(HJ+\epsilon+i\lambda)^{-1} v\rangle d\lambda
\end{aligned}$$

con $B^* JA = J(H - H_0)$. Nota che siccome $W_+ u \in N_g^\perp(HJ)$ risulta che è sufficiente prendere $v \in N_g^\perp(JH)$, che ci permette di evitare la singolarità di $(HJ - z)^{-1}$ in $z = 0$. Risulta che l' ultimo integrale è un integrale sullo spettro continuo. Si può riscrivere, anticipando qualcosa di cui riparliamo in seguito,

$$\langle W_+ u, v\rangle = \langle u, v\rangle + \frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|\geq\omega} \langle JA\left[(JH_0 + 0 + i\lambda)^{-1}\right.$$
$$\left. -(JH_0 - 0 + i\lambda)^{-1}\right] u, B(HJ + \epsilon + i\lambda)^{-1} v\rangle d\lambda.$$

Un fatto fortunato è il seguente: è elementare diagonalizzare J e conseguentemente, per U una matrice costante,

$$U^{-1}(H_0 J - z)U = i \begin{bmatrix} -\Delta + \omega - z & 0 \\ 0 & \Delta - \omega \mp -z \end{bmatrix} \tag{16}$$

(è da qui che si capisce immediatamente che (7) è lo spettro essenziale di JH). Gli operatori $(HJ \pm 0 + i\lambda)^{-1}$ e $(JH_0 \pm 0 + i\lambda)^{-1}$ sono bene definiti per $s > 0$ opportuno, come operatori

$$L^2_s \to L^2_{-s} \tag{17}$$

dove

$$L^2_s = \{f \colon \|(1 + |x|^2)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^2} < \infty\} :$$

la dimostrazione per $(JH_0 \pm 0 + i\lambda)^{-1}$ è teoria standard, per $(HJ \pm 0 + i\lambda)^{-1}$ è fattibile perché si può con un po' di fatica adattare aspetti di un classico articolo di Kato [17]. Fatta questa osservazione, è poi facile ottenere stime della forma

$$\|(HJ \pm 0 + i\lambda)^{-1}\|_{L^2_s \to L^2_{-s}} \leq c(1 + |\lambda|^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Usando stime di questo genere è possibile procedere come in [35] [36] e

1 l'ultimo integrale è essenzialmente un integrale oscillante;

2 integrare per parti. Grande attenzione è spesa in [35] [36] per l'integrazione per parti vicino alle estremità $\pm i\omega$ dello spettro continuo.

Per completare la dimostrazione bisogna dimostrare che

$$W_+(L^p) = L^p \cap N_g^\perp(HJ). \tag{18}$$

Questa questione è legata al delicato problema della completezza degli operatori di onda. Nel caso di perturbazioni $-\Delta + V$, con V potenziale reale, di $-\Delta$, una ben nota teoria garantisce completezza per $p = 2$, si veda ad esempio il volume 4 [22] o Kato [18]. In particolare [18, §5] fornisce varie equivalenti caratterizzazioni di completezza per operatori autoaggiunti. Per via della teoria descritta in questa nota, si sa che alcune di queste caratterizzazioni sono valide per JH, non tutte però, perché l'operatore JH non è diagonalizzabile. Se JH fosse diagonalizzabile la dimostrazione sarebbe conclusa grazie a [18, §5]; siccome non lo è dobbiamo faticare ancora. Fortunatamente ci possiamo avvalere di [18, §2] e ripeterne gli argomenti.

In linea di principio l'inverso di W_+ è

$$Z_+ u = \lim_{t \to +\infty} e^{J(-\Delta+\omega)t} e^{-JH_\omega t} u\,,\ u \in N_g^\perp(HJ).$$

Il problema con questa definizione è che in realtà, non potendo usare il metodo di Cook, che è basato essenzialmente su fatti che dobbiamo ancora dimostrare, non è semplice come dimostrare che il limite esiste. La corretta definizione di Z_+ è invece per $u \in N_g^\perp(HJ)$ e $v \in L^2$

$$\begin{aligned} &\langle Z_+ u, v\rangle = \langle v, u\rangle - \\ &- \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle JA(JH + \epsilon + i\lambda)^{-1} u, B(H_0 J + \epsilon + i\lambda)^{-1} v\rangle d\lambda. \end{aligned}$$

Abbiamo

$$Z_+ \colon L^p \cap N_g^\perp(HJ) \to L^p$$

per la stessa dimostrazione valida per W_+. Dopodiché ci si accorge che tutti i passaggi formali di [18, §2] possono essere ripetuti (giustificandoli in modo diverso che in [18]) per dimostrare che Z_+, nella seconda definizione, è l'inverso di W_+ (e che le due definizioni di Z_+ coincidono).

5. Il lavoro [2]

Il grosso problema aperto è lo studio di questo problema nel caso che (13) non sia vera, e che vi siano ulteriori autovalori. Il sistema (2) (ME) si complica, dovendosi aggiungere varie ulteriori ODE associate agli ulteriori modi discreti. Se vi è una sola coppia di autovalori $\pm i\lambda$ con $2\lambda > \omega$, il modo con cui procedere è tracciato in [2], noi speriamo di ottenere una dimotrazione rigorosa in qualche caso speciale nel prossimo futuro (per $n = 1$ una dimostrazione rigorosa è stata recentemente annunciata da Buslaev e Catherine Sulem, ma al momento non vi è un manoscritto). Se per esempio $2\lambda < \omega$ si vedano le interessanti congetture in [30]. Diamo pochi cenni sul lavoro [2].

La presenza dei due autovalori fa sí che lo spazio ambiente si spezzi

$$N_g(JH) \oplus \sum_{\pm} N(JH \mp i\lambda) \oplus \left[N_g(HJ) \oplus \sum_{\pm} N(HJ \mp i\lambda) \right]^{\perp}$$

dove si ha $R(t) = \zeta(t) + f(t)$,

$$\zeta \in \sum_{\pm} N(JH(t) \mp i\lambda(t))$$

$$f \in \left[N_g(H(t)J) \oplus \sum_{\pm} N(H(t)J \mp i\lambda(t)) \right]^{\perp}.$$

Se chiamiamo $\xi(t)$ un generatore opportunamente normalizzato di $N(JH(t) - i\lambda(t))$, e se prendiamo il prodotto interno di (6) e $J\xi$, estraiamo da (6) una PDE per f ed un'ulteriore equazione della forma (qui $\zeta = z\xi + \bar{z}\bar{\xi}$)

$$\dot{z} - i\lambda(t)z = \text{Nonlin}. \tag{19}$$

Il fatto interessante è che ponendo Nonlin $= 0$, da (19) ricaviamo un'equazione con soluzioni oscillanti. Pertanto se vogliamo che $R(t)$, e con esso $z(t)$, decresca, bisogna trovare degli effetti dissipativi nelle interazioni nonlineari in (19). Questo si può fare mediante:

- Una analisi ed espansione della nonlinearità, che usa in modo essenziale la teoria descritta nella sezione 4;

- L'uso della teoria delle forme normali di Poincaré Dulac.

In particolare, dopo un cambio di variabile, (19) diviene

$$\dot{z} - i\lambda(t)z = b|z|^2 z + (*),$$

dove $(*)$ è "trascurabile" e b è una costante con parte immaginaria $\Im b < 0$. In fatto che non si abbia $\Im b = 0$ è legato al fatto che, il sistema di partenza, (6) (ME), non è una ODE. Si veda le considerazioni in [30]. Ci ripromettiamo di fornire una dimostrazione rigorosa dei contenuti di questa sezione 5 in tempi brevi.

References

[1] H. Berestycki and T. Cazenave, *Instabilité des états stationnaires des les équations de Schrödinger et de Klein Gordon non linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris **293** (1981), 489 –492.

[2] V.S. Buslaev and G.S. Perelman, *On the stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations*, Nonlinear evolution equations, Transl. Ser. 2, vol. 164, Amer. Math. Soc., pp. 75–98.

[3] V.S. Buslaev and G.S. Perelman, *Scattering for the nonlinear Schrödinger equation: states close to a soliton*, St. Petersburg Math. J. **4** (1993), 1111–1142.

[4] T. Cazenave, *Stable solutions of the logarithmic Schrödinger equations*, Nonlin. Anal. T. M. A. **7** (1983), 1127–1140.

[5] T. Cazenave and A. Haraux, *An introduction to semilinear evolution equations*, Oxford U. Press.

[6] T. Cazenave and P.L. Lions, *Orbital stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations*, Comm. Math. Phys. **85** (1982), 549–561.

[7] S. Cuccagna, *Stabilization of solutions to nonlinear Schrödinger equations*, preprint.

[8] J. Fröhlich, T.P. Tsai, and H.T. Yau, *Dynamics of solitons and waves in the non linear Hartree equation*, preprint.

[9] A. Galtabiar and K. Yajima, *L^p boundedness of wave operators for one dimensional Schrödinger operators*, preprint.

[10] M. Grillakis, J. Shatah, and W. Strauss, *Stability of solitary waves in the presence of symmetries, I*, Jour. Funct. An. **74** (1987), 160–197.

[11] M. Grillakis, J. Shatah, and W. Strauss, *Stability of solitary waves in the presence of symmetries, II*, Jour. Funct. An. **94** (1990), 308–348.

[12] A. Jensen, *Spectral properties of Schrödinger operators and time decay of the wave functions. Results in $L^2(\mathbb{R}^m)$, $m \geq 5$*, Duke Math. J. **47** (1980), 57–80.

[13] A. Jensen, *Spectral properties of Schrödinger operators and time decay of the wave functions. Results in* $L^2(\mathbb{R}^4)$, Jour. Math. An. Applic. **101** (1984), 397–422.

[14] A. Jensen, *Results in $L^p(\mathbb{R}^d)$ for the Schrödinger equation with a time dependent potential*, Math. Annalen **299** (1994), 117–125.

[15] A. Jensen and T.Kato, *Spectral properties of Schrödinger operators and time decay of the wave functions*, Duke Math. J. **46** (1979), 583–611.

[16] J.L. Journe, A. Soffer, and C.D. Sogge, *Decay estimates for Schrödinger operators*, Comm. P. Appl. Mat. **44** (1991), 573–604.

[17] T. Kato, *Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient*, Comm. Math. P. Appl. **12** (1959), 403–425.

[18] T. Kato, *Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators*, Math. Annalen **162** (1966), 258–269.

[19] K. McLeod, *Uniqueness of positive radial solutions of $\delta u + f(u) = 0$ in $\mathbb{R}^n$*, Trans. Am. Math. Soc. (1993).

[20] M. Murata, *Asymptotic expansions in time for solutions of Schrödinger type equations*, J. Funct. Anal. **49** (1982), 10–56.

[21] C.A. Pillet and C.E. Wayne, *Invariant manifolds for a class of dispersive, Hamiltonian partial differential equations*, J. Diff. Eq. **141** (1997), 310–326.

[22] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, Academic press.

[23] J. Shatah, Ph.D. thesis.

[24] J. Shatah, *Stable standing waves of nonlinear Klein Gordon equations*, Comm. Math. Phys. **91** (1985), 313–327.

[25] J. Shatah and W. Strauss, *Instability of nonlinear bound states*, Comm. Math. Phys. **100** (1985), 173–190.

[26] A. Soffer and M. Weinstein, *Multichannel nonlinear scattering for nonintegrable equations*, Comm. Math. Phys. **133** (1990), 116–146.

[27] A. Soffer and M. Weinstein, *Multichannel nonlinear scattering II. The case of anisotropic potentials and data*, J. Diff. Eq. **98** (1992), 376–390.

[28] C. Sulem and P.L. Sulem, *The nonlinear Schrödinger equation. Self focusing and wave collapse*, Springer.

[29] R. Weder, *The $W^{k,p}$ continuity of the Schrödinger wave operators on the line*, Comm. Math. Phys. **208** (1999), 507–520.

[30] A. Soffer M. Weinstein, *Resonances, radiation damping and instability in Hamiltonian nonlinear wave equations*, Invent. Math. **136**

(1999), 9–74.

[31] M. Weinstein, *Modulation stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations*, Siam J. Math. Anal. **16** (1985), 472–491.

[32] M. Weinstein, *Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive equations*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), 51–68.

[33] M. Weinstein, *Asymptotic stability of nonlinear bound states in conservative dispersive systems*, Contemporary Math. **200** (1996), 223–235.

[34] M. Weinstein, *$L^p \to L^{p'}$ estimates for the Schrödinger equation on the line and inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation with a potential*, J. Funct. Anal. **170** (2000), 37–68.

[35] K. Yajima, *The $W^{k,p}$ continuity of wave operators for Schrödinger operators*, J. Math. Soc. Japan **47** (1995), 551–581.

[36] K. Yajima, *The $W^{k,p}$ continuity of wave operators for Schrödinger operators III, even dimensional case $m \geq 4$*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **2** (1995), 311–346.

[37] K. Yajima, *The L^p boundedness of wave operators for two dimensional Schrödinger operators*, Comm. Math. Phys. **208** (1999), 125–152.

Received January 15, 2001.