Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste
Suppl. Vol. XXXI, 135–142 (1999)

Sur les Sélections Continues des Collections d'Arcs

Robert Cauty (*)

Summary. - *Let F be a lower semicontinuous multivalued mapping from a paracompact space X into a metrisable space Y such that $F(x)$ is an arc or a point for every x in X. We prove that if the family $\{F(x)/x \in X\}$ is ELC^o, then F admits a continuous selection.*

Pour un espace métrisable Y, nous notons $\mathcal{F}(Y)$ l'ensemble des fermés non vides de Y, $\mathcal{A}(Y)$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(Y)$ formé des compacts homéomorphes à un arc et $\mathcal{A}^*(Y)$ la réunion de $\mathcal{A}(Y)$ et des singletons de Y. Un exemple de Day et Kuratowski [2] montre qu'une fonction semi-continue inférieurement F d'un espace paracompact X dans $\mathcal{A}(Y)$ peut ne pas admettre de sélection continue. Dans leur livre récent, Repovš et Semenov, après avoir décrit l'exemple de Day et Kuratowski, demandent si une telle sélection existe quand la famille $\{F(x)/x \in X\}$ est ELC^o ([7], remarque 6.12, p. 123). Le théorème suivant répond affirmativement à cette question.

Théorème. *Soient X un espace paracompact, Y un espace métrisable et F une fonction semi-continue inférieurement de X dans $\mathcal{A}^*(Y)$. Si la famille $\{F(x)/x \in X\}$ est ELC^o, alors F admet une sélection continue.*

Rappelons qu'une fonction F de X dans $\mathcal{F}(Y)$ est dite semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) si, pour tout ouvert U de Y, l'ensemble des points x tels que $F(x) \cap U \neq \emptyset$ (resp. $F(x) \subset U$) est ouvert ; F est dite continue si elle est la fois semi-continue inférieurement et supérieurement. La famille $\{F(x)/x \in X\}$ est dite ELC^o si, pour tout point y appartenant à sa réunion et pour tout

(*) Author's address: Université Paris 6, UFR 920, boite courrier 172, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France, e-mail: cauty@math.jussieu.fr

voisinage V de y, il existe un voisinage W de y tel que, pour tout $x \in X$, si z et z' sont deux points de $W \cap F(x)$, alors $V \cap F(x)$ contient un arc d'extrémités z et z'.

Notre stratégie est de se ramener au cas où la fonction F est continue, puis d'utiliser le fait que, lorsque F est continue, elle admet localement des sélections continues. La dimension utilisée ci-dessous est celle au sens des recouvrements.

LEMME 1. *Pour tout espace paracompact X, il existe un espace paracompact Z de dimension au plus un et une surjection continue propre et ouverte de Z sur X.*

Démonstration. C'est une variante d'un résultat de Pasynkov ([5], [6]). Nous pouvons trouver un ensemble A et, pour tout $\alpha \in A$, un espace métrisable Y_α et une fonction continue $\xi_\alpha : X \to Y_\alpha$ vérifiant la condition suivante : pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de X, il existe un $\alpha \in A$ et un recouvrement ouvert $\mathcal{W}$ de Y tels que $\xi_\alpha^{-1}(\mathcal{W})$ soit plus fin que $\mathcal{V}$ (cela résulte du corollaire 1.2.17 de [4]). En particulier, pour tout fermé F de X et tout point $x \in X \backslash F$, il existe α tel que $\xi_\alpha(x) \notin \overline{\xi_\alpha(F)}$, donc la fonction $\xi = (\xi_\alpha) : X \to Y' = \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ est un plongement. Nous identifions X à son image par ξ.

D'après un théorème de Pasynkov ([6] ou [1, p. 472]), il existe, pour tout $\alpha \in A$, un espace métrisable Z_α de dimension ≤ 1 et une surjection continue propre et ouverte ϕ_α de Z_α sur Y_α telle que, pour tout $y \in Y_\alpha$, le compact $\phi_\alpha^{-1}(y)$ soit de dimension zéro. Soient $Z' = \prod_{\alpha \in A} Z_\alpha$, $\phi : Z' \to Y'$ l'application produit des $\phi_\alpha, Z = \phi^{-1}(X)$ et $\psi = \phi | Z$. Pour $\alpha \in A$, nous notons π_α (resp. ρ_α) la projection de Z' (resp. Y') sur Z_α (resp. Y_α).

Puisque les ϕ_α sont des surjections continues propres et ouvertes, il en est de même de ϕ, donc aussi de ψ. Etant image réciproque d'un espace paracompact par une application propre, Z est paracompact. Il reste à vérifier que $\dim Z \leq 1$.

Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de Z. Pour $x = (x_\alpha) \in X$, $\psi^{-1}(x) = \prod_{\alpha \in A} \phi_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ est un compact de dimension zéro de l'espace normal Z, donc peut être recouvert par une famille finie $\{G_j(x)/j \in J(x)\}$ d'ouverts deux à deux disjoints de Z telle que chaque $G_j(x)$ soit contenu dans un élément de $\mathcal{U}$. Soit $G(x) = \bigcup_{j \in J(x)} G_j(x)$; c'est un ouvert contenant $\psi^{-1}(x)$. Puisque ψ est propre, il existe un voisinage ouvert $V(x)$ de x dans X tel que $\psi^{-1}(V(x)) \subset G(x)$. Alors, $\mathcal{V} = \{V(x)/x \in X\}$ est un recouvrement ouvert de X, donc nous pouvons trouver un $\alpha_0 \in A$ et un recouvrement ouvert $\mathcal{W}$ de Y_{α_0} tels que $\xi_{\alpha_0}^{-1}(\mathcal{W}) = (\phi_{\alpha_0}|X)^{-1}(\mathcal{W})$ soit plus fin que $\mathcal{V}$. Nous pouvons supposer que $\mathcal{W}$ est de la forme $\{W(x)/x \in X\}$ où $\xi_\alpha^{-1}(W(x)) \subset V(x)$.

Puisque Z_{α_0} est de dimension au plus un, nous pouvons trouver un recouvrement ouvert $\mathcal{H}$ de Z_{α_0}, plus fin que $\phi_{\alpha_0}^{-1}(\mathcal{W})$ et d'ordre au plus un (i.e. l'intersection de trois éléments distincts de $\mathcal{H}$ est vide). Nous pouvons supposer que $\mathcal{H}$ est de la forme $\{H(x)/x \in X\}$ où $H(x) \subset \phi_{\alpha_0}^{-1}(W(x))$. Soit $\mathcal{K} = \{\pi_{\alpha_0}^{-1}(H(x)) \cap G_j(x)/x \in X, j \in J(x)\}$. $\mathcal{K}$ est une famille d'ouverts de Z plus fine que $\mathcal{U}$. $\mathcal{K}$ recouvre Z. En effet, soit $z \in Z$. Il existe $x \in X$ tel que $\pi_{\alpha_0}(z) \in H(x)$. Alors, $\rho_{\alpha_0}(\psi(z)) = \phi_{\alpha_0}(\pi_{\alpha_0}(z)) \in W(x)$, donc $\psi(z) \in (\rho_{\alpha_0}|X)^{-1}(W(x)) \subset X$, et il existe un indice $j \in J(x)$ tel que $G_j(x)$ contienne z, d'où $z \in \pi_{\alpha_0}^{-1}(H(x)) \cap G_j(x)$. $\mathcal{K}$ est d'ordre au plus un. En effet, dans le cas contraire, il existerait trois couples distincts (x_i, j_i) avec $j_i \in J(x_i)$ pour $i = 0, 1, 2$, tels que $\emptyset = \bigcap_{i=0}^{2} \pi_{\alpha_0}^{-1}(H(x_i)) \cap G_{ji}(x_i) \subset \bigcap_{i=0}^{2} \pi_{\alpha_0}^{-1}((x_i))$. Puisque $\mathcal{H}$ est d'ordre au plus un, deux des points x_0, x_1, x_2 coïncideraient, mais si, par exemple, $x_o = x_1$, alors $G_{j_0}(x_0) \cap G_{j_i}(x_0) = \emptyset$, d'où une absurdité. Ainsi, tout recouvrement ouvert de Z a un raffinement d'ordre au plus un, d'où l'inégalité $\dim Z \leq 1$. $\square$

LEMME 2. *Soient X un espace paracompact, Y un espace métrisable et $F : X \to \mathcal{A}^*(Y)$ une fonction semi-continue inférieurement. Si la famille $\{F(x)/x \in X\}$ est ELC^o, alors il existe une fonction continue $G : X \to \mathcal{A}^*(Y)$ telle que $G(x) \subset F(x)$ pour tout x.*

Démonstration. Soit $\psi : Z \to X$ comme dans le lemme 1. Puisque Z est de dimension au plus un et $\{F(x)/x \in X\}$ ELC^o, un théorème de Michael ([7, théorème A.5.13]), qui est applicable puisque les éléments de $\mathcal{A}^*(Y)$ sont fermés dans le complété de Y, nous fournit une sélection continue $f : Z \to Y$ de la fonction semi-continue inférieurement $F \circ \psi : Z \to \mathcal{A}^*(Y)$. Puisque ψ est propre et ouverte, $H(x) = f(\psi^{-1}(x))$ est un compact contenu dans $F(x)$ dépendant continûment de $x \in X$. Soit $G(x)$ le plus petit sous-continu de $F(x)$ contenant $H(x)$; c'est un élément de $\mathcal{A}^*(Y)$.

Si G n'était pas semi-continue supérieurement, il existerait un point x_0 de X et un ouvert U de Y contenant $G(x_0)$ tels que x_0

soit adhérent à $A = \{x \in X/G(x) \not\subset U\}$. Puisque $\{F(x)/x \in X\}$ est ELC^o, nous pouvons recouvrir $G(x_0)$ par une famille finie $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_k\}$ d'ouverts de Y rencontrant $G(x_0)$ de façon que

(1) quels que soient $x \in X$ et $1 \leq i, j \leq k$, si $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ et si b et c sont deux points de $F(x) \cap (V_i \cup V_j)$, alors le sous-arc de $f(x)$ d'extrémités b et c est contenu dans U.

En utilisant la semi-continuité inférieure de F et la continuité de H, nous pouvons trouver un voisinage O de x_0 dans X tel que, pour tout $x \in O$, on ait

(2) $F(x) \cap V_i \neq \emptyset$ pour tout i,
(3) $H(x) \subset \bigcup_{i=1}^{k} V_i$.

Soit x un point de $A \cap O$, et soit y un point de $G(x)\backslash U$. D'après (3), y n'appartient pas à $H(x)$, donc il existe des points a_1 et a_2 de $H(x)$ tels que y soit entre a_1 et a_2 sur $F(x)$. Le point y décompose $F(x)$ en deux sous-arcs F_1 et F_2 contenant respectivement a_1 et a_2. Pour $\alpha = 1, 2$, soit $\mathcal{V}_\alpha$ l'ensemble des éléments V_i de $\mathcal{V}$ tels que $V_i \cap F_\alpha \neq \emptyset$, et soit W_α la réunion des éléments de $\mathcal{V}_\alpha$. D'après (2), $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$, donc $G(x_0) \subset W_1 \cup W_2$. D'après (3), a_1 et a_2 sont contenus dans $\bigcup_{i=1}^{k} V_i$, donc $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont non vides; puisque tout élément de $\mathcal{V}$ rencontre $G(x_0)$, les ensembles $W_1 \cap G(x_0)$ et $W_2 \cap G(x_0)$ sont non vides. Enfin $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ car, dans le cas contraire, il existerait $V_{i_\alpha} \in \mathcal{V}_\alpha$ tels que $V_{i_1} \cap V_{i_2} \neq \emptyset$; si b est un point de $V_{i_\alpha} \cap F(x)$, alors l'arc de $F(x)$ d'extrémités b_1 et b_2 est, d'après (1), contenu dans U, ce qui est impossible car cet arc doit contenir le point y. Nous arrivons ainsi à une contradiction avec la connexité de $G(x_0)$.

Pour prouver que G est semi-continue inférieurement, nous devons montrer que, pour tout point x_0 de X et tout ouvert U de Y tel que $G(x_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage O de x_0 tel que $G(x) \cap U \neq \emptyset$ pour tout $x \in O$. Si $U \cap H(x_0) \neq \emptyset$, cela résulte de la continuité de H. Si $U \cap H(x_0) = \emptyset$, fixons un point y de $U \cap G(x_0)$. Il existe alors deux points c_1 et c_2 de $H(x)$ tels que y soit entre c_1 et c_2 dans $G(x_0)$. Prenons des ouverts V, W_1 et W_2 de Y de façon que $V \subset U$, $a_\alpha \in W_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$, $G(x_0) \subset V \cup W_1 \cup W_2$ et $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. En utilisant la continuité de H et la semi-continuité supérieure de G, nous pouvons trouver un voisinage O de x_0 tel que, pour tout $x \in O$, $H(x) \cap W_\alpha \neq \emptyset$ pour $\alpha = 1, 2$ et $G(x) \subset V \cup W_1 \cup W_2$. Alors, si $x \in O$

et si d_1 et d_2 sont des points de $H(x) \cap W_1$ et $H(x) \cap W_2$ resp., le sous-arc de $g(x)$ d'extrémités d_1 et d_2 est contenu dans $V \cup W_1 \cup W_2$ et rencontre les ouverts disjoints W_1 et W_2, donc il rencontre aussi $V \subset U$. □

LEMME 3. *Soient F, G deux fonctions de X dans $\mathcal{A}^*(Y)$ telles que $G(x) \subset F(x)$ pour tout x. Si la famille $\{F(x)/x \in X\}$ est ELC^o, il en est de même de la famille $\{G(x)/x \in X\}$.*

Démonstration. Soient $x_0 \in X$, y_0 un point de $G(x_0)$ et V un voisinage de y_0. Il existe un voisinage W de y_0 tel que, pour tout $x \in X$, si z et z' sont deux points de $W \cap F(x)$, alors V contient l'arc de $F(x)$ d'extrémités z et z'. Si z et z' appartiennent à $G(x)$, alors cet arc est ausi contenu dans $G(x)$. □

LEMME 4. *Soient X un espace topologique, Y un espace métrisable et $F : X \to \mathcal{A}(Y)$ une fonction continue telle que la famille $\{F(x)/x \in X\}$ est ELC^o. Alors tout point x_0 de X a un voisinage N tel que, pour tout sous-ensemble M de N, toute fonction continue $G : M \to \mathcal{A}^*(Y)$ vérifiant $G(x) \subset F(x)$ pour tout $x \in M$ admette une sélection continue.*

Démonstration. Montrons d'abord que si x est un point de X, a une extrémité de l'arc $F(x)$ et U un ouvert contenant a, alors il existe un voisinage O de x dans X tel que, pour tout $x' \in O$, U contienne l'une des extrémités de l'arc $F(x')$. Soit $b \neq a$ un point de $F(x)$ tel que l'arc de $f(x)$ d'extrémités a et b soit contenu dans U. Prenons des ouverts V_1, V_2, W_1, W_2 de Y vérifiant

(1) $b \in V_1 \subset V_2 \subset \overline{V_2} \subset U \backslash \{a\}$,

(2) $a \in W_1 \subset U$,

(3) $F(x) \subset V_1 \cup W_1 \cup W_2$,

(4) $W_1 \cap W_2 = \emptyset$,

(5) pour tout $x' \in X$, si z, z' sont deux points de $F(x') \cap V_1$, alors le sous-arc de $F(x')$ d'extrémités z et z' est contenu dans V_2.

La continuité de F nous permet de trouver un voisinage O de x tel que, pour tout $x' \in O$, on ait

(6) $F(x') \cap (W_1 \backslash \overline{V_2}) \neq \emptyset$,

(7) $F(x') \subset V_1 \cup W_1 \cup W_2$.

Alors, pour $x' \in O$, U contient l'une des extrémités de $F(x')$. En effet, supposons que non ; d'après (1), (2) et (7), les extrémités de $F(x')$ appartiennent à W_2. D'après (6), $W_1 \backslash \overline{V_2}$ contient un point y de $F(x')$, et les deux arcs F_1 et F_2 en lesquels y divise $F(x')$ rencontrent à la fois W_1 et W_2 ; d'après (4) et (7), ils rencontrent aussi V_1, mais si z_1 et z_2 sont des points de $F_1 \cap V_1$ et $F_2 \cap V_1$ respectivement, alors le sous-arc de $F(x')$ d'extrémités z_1 et z_2 contient y, ce qui contredit (5).

Soient a_1 et a_2 les extrémités de $F(x_0)$ et soient U_1 et U_2 des voisinages ouverts disjoints de a_1 et a_2 respectivement. D'après ce qui précède, il existe un voisinage N de x_0 tel que, pour tout $x \in N$, U_1 et U_2 contiennent chacun une extrémité de $F(x)$. Soit $f_1(x)$ (resp. $f_2(x)$) l'extrémité de $F(x)$ contenue dans U_1 (resp. U_2). Soient M un sous-ensemble de N et $G : M \to \mathcal{A}^*(Y)$ une fonction continue telle que $G(x) \subset F(x)$ pour tout $x \in M$. Si $G(x)$ ne contient qu'un point, soit $g_1(x)$ ce point ; si $G(x)$ contient plus d'un point, notons $g_1(x)$ celle des extrémités de $G(x)$ qui est la plus proche de $f_1(x)$ pour l'ordre de $F(x)$, et $g_2(x)$ l'autre extrémité de $G(x)$. Alors, $g_1 : M \to Y$ est une sélection de G.

Si $G(x)$ ne contient qu'un point, la continuité de g_1 en x résulte de celle de G. Si $G(x)$ contient plus d'un point, soit S_1 un voisinage ouvert de $g_1(x)$, assez petit pour qu'il existe un voisinage ouvert S_2 de $g_2(x)$ disjoint de S_1. Soit S un voisinage de $g_1(x)$ vérifiant

(8) pour tout $x' \in X$, si z, z' sont deux points de $F(x') \cap S$, alors le sous-arc de $F(x)$ d'extrémités z et z' est contenu dans S_1.

Quitte à diminuer S_2, nous pouvons supposer sa fermeture disjointe du sous-arc de $F(x)$ d'extrémités $f_1(x)$ et $g_1(x)$. Cela nous permet de recouvrir $F(x)$ par des ouverts T_1 et T_2 vérifiant

(9) $T_1 \cap T_2 \subset S$,

(10) $f_1(x) \in T_1$,

(11) $T_1 \cap S_2 = \emptyset$.

D'après le lemme 3, la famille $\{G(x')/x' \in M\}$ est ELC^o, donc la remarque faite pour F au début de cette démonstration s'applique aussi à G. Compte tenu de la définition de U_1, nous pouvons donc trouver un voisinage P de x dans M tel que, pour tout $x' \in P$,

(12) S et S_2 contiennent chacun une des extrémités de $G(x')$,

(13) $T_1 \cap U_1$ contient $f_1(x')$,

(14) $F(x') \subset T_1 \cup T_2$.

Pour prouver la continuité de g_1 en x, il suffit de montrer que $g_1(P) \subset S_1$. Supposons que $x' \in P$ et que $g_1(x') \notin S_1$. D'après (12), $g_1(x') \in S_2$ et $g_2(x') \in S$. D'après (11) et (13), le sous-arc F_1 de $F(x')$ d'extrémités $f_1(x')$ et $g_1(x')$ rencontre T_1 et T_2, et (14) entraîne qu'il rencontre $T_1 \cap T_2$. D'après (9), F_1 contient un point y de S ; comme le sous-arc de $f(x')$ d'extrémités y et $g_2(x')$ contient $g_1(x') \notin S_1$, nous obtenons une contradiction avec (8). $\square$

Démonstration du théorème. Le lemme 2 nous permet de supposer F continue, ce qui équivaut à dire qu'elle est continue lorsque $\mathcal{A}^*(Y)$ est muni de la distance de Hausdorff d_H. Comme $\mathcal{A}(Y)$ est d_H-ouvert dans $\mathcal{A}^*(Y)$, l'ensemble $Z = F^{-1}(\mathcal{A}(Y))$ est un F_σ-ouvert dans X ; en particulier, Z est paracompact ([3, théorème 5.1.28]). Nous allons construire une sélection continue de $F|Z$. Il existera alors une unique sélection f de F prolongeant g. La continuité de f en un point de l'ouvert Z résultera de celle de g, et sa continuité en un point de $X \backslash Z$ résultera de la semi-continuité supérieure de F.

Pour tout $x \in Z$, soit N_x le voisinage de x dans Z fourni par le lemme 4. Puisque Z est paracompact, il existe un recouvrement fermé localement fini $\{W_\alpha / \alpha \in A\}$ de Z tel que, pour tout $\alpha \in A$, W_α soit contenu dans l'un des N_x. Pour $B \subset A$, posons $W_B = \bigcup_{\alpha \in B} W_\alpha$; c'est un fermé de Z. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des couples (h, B) où B est contenu dans A et h est une sélection continue de $F|W_B$. Ordonnons $\mathcal{C}$ en convenant que $(h, B) < (h', B')$ si $B \subset B'$ et $h = h'|W_B$. Le lemme de Zorn nous fournit un élément maximal (g, B) de $\mathcal{C}$. Si $B \neq A$, prenons $\alpha_0 \in A \backslash B$ et définissons $H : W_{\alpha_0} \to \mathcal{A}^*(Y)$ par $H(x) = \{g(x)\}$ si $x \in W_B$ et $H(x) = F(x)$ sinon. H est semi-continue inférieurement ; d'après le lemme 2, il existe une fonction continue $G : W_{\alpha_0} \to \mathcal{A}^*(Y)$ telle que $G(x) \subset H(x)$ pour tout $x \in W_{\alpha_0}$. Puisque W_{α_0} est contenu dans l'un des N_x, G a une sélection continue $g_0 : W_{\alpha_0} \to Y$. Posant $B' = B \cup \alpha_0$ et définissant $g' : W_{B'} \to Y$ par $g'|W_B = g$ et $g'|W_{\alpha_0} = g_0$, nous obtenons un élément (g', B') de $\mathcal{C}$ strictement plus grand que (g, B), ce qui est absurde, donc $B = A$ et g est la sélection cherchée de $F|Z$. $\square$

Références

[1] P. S. Alexandroff and B. A. Pasynkov, *Introduction à la théorie de la dimension (en russe)*, Nauka, Moscou, 1973.

[2] J. M. Day and K. Kuratowski, *On the non-existence of a continuous selector for arcs lying in the plane*, Proc. Kon. Neder. Akad. Wet., ser. A, vol. 69, 1966, pp. 131–132.

[3] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[4] K. Nagami, *Dimension Theory*, Academic Press, New York, 1970.

[5] B. A. Pasynkov, *Applications ouvertes de dimension zéro augmentant la dimension (en russe)*, Usp. Math. Nauk. **18** (1963), no. 5, 183–190.

[6] B. A. Pasynkov, *Produits topologique partiels (en russe)*, Troudi Mosk. Math. Ob. **13** (1969), 136–245.

[7] D. Repovš and P. V. Semenov, *Continuous Selections of Multivalued Mappings*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

Received December 28, 1998.