Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste
Vol. XXXI, 61–78 (1999)

Sui Gruppi Semplicemente Connessi all'Infinito

Corrado Tanasi (*)

Summary. - *We obtain an extension of the simply connectivity at infinity to finitely presented groups*

1. Introduzione

Se si fa eccezione per lo spazio euclideo R^2, l'esempio tipico di spazio localmente compatto ma non semplicemente connesso all'infinito, è la nota varietá di Whitehead [7]. Oggi si sa che questo spazio non è rivestimento universale di alcuna varietá chiusa. L'esistenza o meno di rivestimenti universali di varietá chiuse che siano semplicemente connesse all'infinito è, di per se, una questione profonda e di grande interesse, nota come la congettura π_1^∞. In [3], [5] e [6], si prova che tale congettura vale per le 3-varietá chiuse che hanno il gruppo fondamentale soggetto ad alcune condizioni legate alla teoria dei gruppi di Gromov. La tappa successiva sará rimuovere le restrizioni imposte al gruppo fondamentale. Ora ogni 3-varietá chiusa è la somma connessa di fattori di tipo $K(\pi_1 M^3, 1)$ (cioé con rivestimento universale contraibile), o di tipo $S^2 \times S^1$ o di fattori aventi gruppo fondamentale finito, ció comporta che per le 3-varietá chiuse lo studio puó essere limitato a quelle di tipo $K(\pi_1 M^3, 1)$. Nel 1983 M. Davis [2] dimostra che si possono costruire in tutte le dimensioni $n \geq 4$, varietá chiuse M^n di tipo $K(\pi_1 M^n, 1)$ che *non* sono semplicemente connesse all'infinito, mostrando che le 3-varietá costituiscono un caso a parte.

Questo articolo affronta un aspetto diverso della semplice connessitá all' infinito. Vedremo che oltre a quello geometrico, la semplice

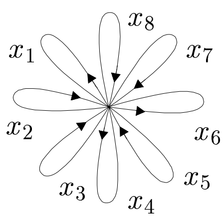
(*) Author's address: Universitá di Palermo, Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, 90123 Palermo, Italia

connessione all'infinito ha anche un carattere algebrico in senso gruppale, cosí come la stessa connessitá all'infinito ha un senso analogo veicolata dalla teoria dei capi di un gruppo.

La definizione geometrica della semplice connessitá all'infinito considera uno spazio X localmente compatto, semplicemente connesso e non compatto, ora se per ogni compatto $k \subset X$ esiste, in X, un altro compatto $K \supset k$, di modo che ogni cammino chiuso $\ell \subset X - K$ è omotopicamente nullo in $X - k$, siamo su uno spazio detto *semplicemente connesso all'infinito* (s.c.i.). Questa proprietá sará riassunta con la notazione $\pi_1^\infty X = 0$. Altrimenti scriveremo $\pi_1^\infty X \neq 0$.

2. Teoremi principali ed esempi.

L'obiettivo di questo lavoro sará dimostrare due teoremi mediante tre lemmi. Indicheremo con $P = (x_1, \ldots, x_n; R_1, \ldots, R_p)$ e $P' = (y_1, \ldots, y_m; Q_1, \ldots, Q_q)$ due presentazioni del gruppo G, ove i simboli $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_m$ denotano i generatori ed $R_1, \ldots, R_p$ e $Q_1, \ldots, Q_q$ i relatori delle presentazioni rispettive. Siano poi $\widetilde{K^2(P)}$ e $\widetilde{K^2(P')}$ i rivestimenti universali dei complessi simpliciali 2–dimensionali $K^2(P)$ e $K^2(P')$ associati, in modo standard, alle presentazioni P e P'. Il 2-complesso $K^2(P)$ associato ad un gruppo si costruisce nel modo che segue. Si parte da un bouquet di cerchi orientati come in figura



a ciascuna relazione si fa corrispondere un circuito chiuso del grafo e ogni circuito si consideri bordo di un disco singolare incollato sul grafo. Si ottiene un insieme compatto bidimensionale $K^2(P)$, dipendente solo dalla presentazione scelta. Il teorema di Van Kampen afferma poi $\pi_1(K^2(P)) = G$ e il gruppo G che agisce liberamente sul rivestimento universale $\widetilde{K^2(P)}$ del 2-complesso $K^2(P)$.

Il primo teorema, stabilisce una proprietá di invarianza della s.c.i. dei rivestimenti universali rispetto ad una qualunque presentazione del gruppo.

TEOREMA 2.1. *I rivestimenti universali dei 2-complessi simpliciali canonici $K^2(P)$ e $K^2(P')$ associati a due distinte presentazioni P e P' di un gruppo G, hanno la proprietá*

$$\pi_1^\infty \widetilde{K^2(P)} = \pi_1^\infty \widetilde{K^2(P')}.$$

L'affermazione del teorema 2.1 dará poi senso alla

DEFINIZIONE 2.2. *Un gruppo G si dirá semplicemente connesso all' infinito (in tal caso scriveremo $\pi_1^\infty G = 0$), se il rivestimento universale $\widetilde{K^2(P)}$ del 2-complesso simpliciale $K^2(P)$, è semplicemente connesso all'infinito. Ovvero se $\pi_1^\infty \widetilde{K^2(P)} = 0$, qualunque sia la presentazione P del gruppo G.*

Nel secondo teorema mostreremo come per qualunque gruppo G di presentazione finita, la proprietá di s.c.i. di un gruppo, si trasferisce al suo rivestimento universale.

TEOREMA 2.3. *Se X è un complesso simpliciale finito associato al gruppo G con gruppo fondamentale $\pi_1 X = G$, indicato con $\widetilde{X}$ il rivestimento universale del complesso X, vale l'uguaglianza*

$$\pi_1^\infty \widetilde{X} = \pi_1^\infty G.$$

Ora la semplice connessitá all'infinito di un gruppo si deduce anche da un' analoga proprietá di un suo sottogruppo di indice finito, perchè

COROLLARIO 2.4. *Se H è un sottogruppo di indice finito di G, allora*

$$\pi_1^\infty H = \pi_1^\infty G.$$

Dimostrazione. Si è giá osservato che per un complesso simpliciale finito X tale $\pi_1 X = G$ e con il rivestimento universale

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d] \\ X = \tilde{X}/G, \end{tikzcd}$$

il gruppo G agisce, mediante azione libera, sul suo rivestimento universale $\tilde{X}$. Si consideri la restrizione, ovvia, di questa azione di H su $\tilde{X}$. Allora lo spazio quoziente $X_1 = \tilde{X}/H$ è compatto (perché l'indice di H in G è finito). E il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d] \arrow[dr] & \\ X/G = X & \tilde{X}/H = X_1 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

mostra che i rivestimenti universali $\tilde{X}$ di X e $\tilde{X}_1$ di X_1 sono uguali e che il gruppo fondamentale di X_1 è proprio H. Allora $\pi_1^\infty H = \pi_1^\infty \tilde{X}_1 = \pi_1^\infty \tilde{X} = \pi_1^\infty G$. $\square$

Si possono portare due tipi di esempi.
Esempi di tipo I.

a) Un gruppo abeliano di presentazione finita, ove la sua parte libera ha un numero di generatori diverso da due, è *semplicemente connesso all'infinito.*

Se G è abeliano, esiste un suo sottogruppo $H \subset G$ di indice finito del tipo

$$H = \underbrace{Z + \cdots + Z}_{k\ \ volte}.$$

Data l'uguaglianza $\pi_1(\underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{k\ \ volte}) = \underbrace{Z + \cdots + Z}_{k\ \ volte}$, accade che il "$\pi_1^\infty$" di H coincide con il "π_1^∞" del rivestimento universale di $\underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{k\ \ volte}$ ovvero con lo spazio euclideo R^k che è manifestamente semplicemente connesso all'infinito solo se $k \geq 2$.

Per un gruppo abeliano G non libero, si osserva che esso contiene un sottogruppo libero di indice finito che è la sua parte libera. Si applica, in questo caso, il corollario 2.4.

b) Un gruppo libero di presentazione finita con un numero di generatori diverso da due, è *semplicemente connesso all'infinito.*

Se G è libero, allora G sará del tipo

$$G = \underbrace{Z * \cdots * Z}_{k \ \ volte}.$$

La somma connessa

$$X = S^1 \times S^2 \# \cdots \# S^1 \times S^2,$$

è tale che

$$\pi_1 X = \pi_1(S^1 \times S^2 \# \cdots \# S^1 \times S^2) = G.$$

Allora il suo rivestimento universale è semplicemente connesso all'infinito perché

$$\widetilde{X} = R^n - \{\text{un insieme di Cantor non selvaggio}\}.$$

Ricordiamo che un insieme di Cantor di una varietá differenziabile di dimensione $n \geq 1$, si dice non selvaggio se esiste un'immersione iniettiva (un embedding) che invia un Cantor in un arco liscio della varietá.
Esempi di tipo II.

I gruppi con tipologie geometriche comunemente dette *"nice"*, ovvero quelli

1. iperbolici,

2. quasi convessi (nozione dovuta a J.Cannon che contiene quella di iperbolicitá e di nilpotenza, estesa in [6] alla quasi debole convessitá),

3. automatici (secondo Cannon, Epstein, Thurston,..),

4. pettinabili secondo Lipschitz (nozione dovuta a Thurston, estesa successivamente in [5]),
   e se poi sono anche
5. gruppi fondamentali di varietá di dimensione tre,

allora essi sono *semplicemente connessi all'infinito.*

Bisogna sottolineare quest' ultima condizione. É necessario che i gruppi "nice" siano anche gruppi fondamentali di varietá di dimensione tre, infatti i gruppi iperbolici di Gromov sono quelli utilizzati nel lavoro di M. Davis, citati nell'introduzione, ed è allora possibile che un tale gruppo non sia semplicemente connesso all'infinito tranne che non sia anche gruppo fondamentale di una 3-varietá.

Aggiungiamo anche un risultato legato a queste idee. Se una varietá M^3 chiusa, geometrizzata nel senso delle otto geometrie di Thurston, ha gruppo fondamentale avente crescenza polinomiale, allora $\pi_1^\infty(\pi_1 M^3) = \pi_1^\infty \widetilde{M^3} = 0$. Questo vale perchè da una parte esiste un risultato dovuto a Gromov

TEOREMA 2.5. *(di Gromov). Un gruppo di tipo finito G ha crescenza polinomiale se e solamente se esiste un sottogruppo $H \subset G$ nilpotente e di indice finito.*

E poi, quando un gruppo fondamentale di una 3-varietá è *nil* nel senso delle otto geometrie di Thurston, il suo rivestimento universale è semplicemente connesso all'infinito, in quanto i gruppi *nil* sono quasi convessi. Si pensa che questo risultato sia indipendente dalla teoria di Thurston.

3. Trasformazioni di Tietze.

Sia G un gruppo di presentazione finita, con generatori $x_1, \ldots, x_n$ e relazioni $R_1, \ldots, R_m$, operiamo su G dei *movimenti di Tietze* che ci permetteranno di passare da una presentazione con generatori $x_1, \ldots, x_n$ e relazioni $R_1, \ldots, R_m$, ad un'altra presentazione con altri generatori $x'_1, \ldots, x'_{\bar{n}}$ ed altre relazioni $\bar{R}_1, \ldots, \bar{R}_{\bar{m}}$ dello stesso gruppo. Siamo interessati, essenzialmente, a due tipi di movimenti. Elenchiamo prima quelli che *non cambiano* nè il numero di generatori nè il numero di relazioni:

1) si opera una permutazione tre le $n!$, nel sistema di generatori $x_1, \ldots, x_n$ o una tra le $m!$ nel sistema di relazioni $R_1, \ldots, R_m$;

2) si passa dal sistema di generatori $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, al sistema $x_1, x_1x_2, x_3 \ldots, x_n$;

2') nel sistema di relazioni $R_1, R_2, \ldots, R_m$, il relatore R_1 si muta nel relatore coniugato $x_1 R_1 x_1^{-1}$;

2") nel sistema di generatori $x_1, x_2, \ldots, x_n$, uno qualunque di essi viene cambiato nel suo inverso $x_i \to x_i^{-1}$.

Movimenti che *cambiano* numero di generatori o/e relazioni:

3) si passa dai $x_1, x_2 \ldots, x_n$ ai generatori $x_1, x_2 \ldots, x_{n+1} = 1$ con la nuova relazione $x_{n+1} = 1$.

Movimenti di tipo **4**:

4) alle relazioni $R_1, \ldots, R_m$ si aggiunge la nuova relazione: la parola vuota;

4') nelle relazioni $R_1, R_2, \cdots, R_n$ si ripete la relazione R_1 : $R_1, R_1, R_2, \cdots, R_n$;

4") dalle relazioni $R_1, R_2, \cdots, R_n$ si passa al movimento con "memoria" $R_1, R_2, R_1R_2, \cdots, R_n$.

Se $\mathcal{R}$ indica l'insieme dei movimenti di Tietze diversi dai movimenti di tipo **4**, si dimostra facilmente che $\mathcal{R}$ + { movimento **4**} = $\mathcal{R}$ + { movimento **4'**} = $\mathcal{R}$ + { movimento **4"**}. Tutti i movimenti si possono interpretare geometricamente, valga per tutti gli esempi che seguono. Il prodotto x_2x_1 di due generatori x_2 e x_1, è uno scivolamento ("slide") di cammini (c.f. fig. 1).

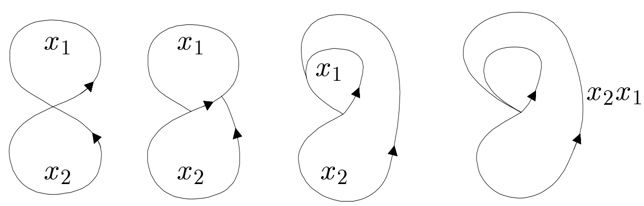


*Fig.*1

Il relatore prodotto R_2R_1, dei relatori R_1 ed R_2, è il risultato finale di una successione di scivolamenti bidimensionali illustrati in figura 2, in cui la pellicola R_2 scorre sulla pellicola R_1

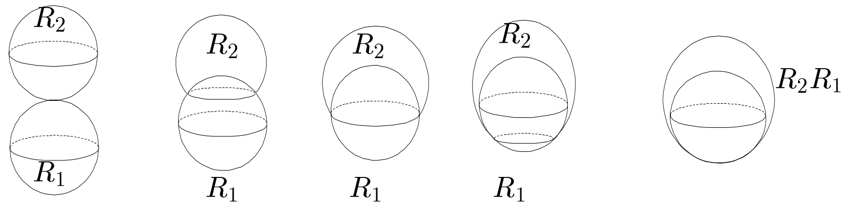


*Fig.*2

Non tutti i movimenti di Tietze, hanno un'azione banale sul tipo di omotopia della varietá. Il movimento di tipo 4, che aggiunge all'insieme di relatori la parola vuota, consiste, geometricamente, nell'aggiungere al bouquet di cerchi $x_1, \ldots, x_n$, una sfera S^2, si muta cosí il tipo di omotopia della varietá.

Ad una presentazione $P = (x_1 \ldots x_n; R_1, \ldots R_m)$ del gruppo G associamo, in modo standard, il 2-complesso simpliciale $K^2(P)$. Sia $N^n(K^2(P))$ un intorno regolare orientabile del 2-complesso simpliciale $K^2(P)$, badando che la costruzione avvenga in dimensione $n \geq 5$.

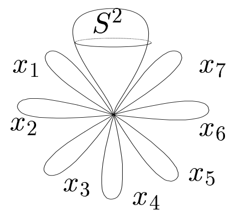
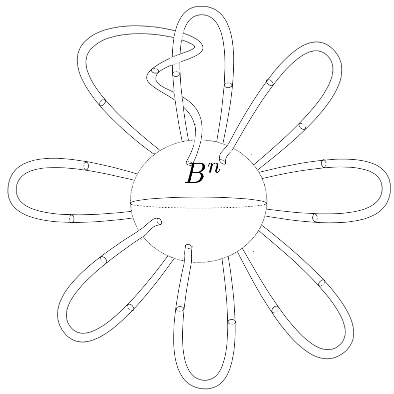


*Fig.*3

La varietá $N^n(K^2(P))$ sará differenziabile e compatta, rappresentabile da una n-palla B^n a cui si aggiungono sulla frontiera esattamente tanti manici orientabili di indice *uno*, quanti sono i generatori $x_1, \ldots, x_n$ del gruppo G. Per semplicitá di notazione questa varietá sará denotata con V^n o qualche volta con $V^n(P)$, per rimarcare la dipendenza di V^n dalla presentazione P del gruppo. Supporremo che la dimensione sia sempre $n \geq 5$.

I relatori $R_1, \ldots, R_m$ si interpretano come m curve differenziabili iniettivamente immersi sulla frontiera di V^n.

$V^n =$ 

L'attenzione piú volte sottolineata che la dimensione di V^n sia ≥ 5 è dovuta al fatto che in una dimensione grande, le classi di omotopia delle curve chiuse sulla frontiera di V^n sono uguali alle classi di isotopia di curve iniettivamente immerse (embedded).

Queste curve si possono utilizzare per aggiungere manici di indice due. L'aggiunta di manici di indice due comporta, per ciascuna curva, una scelta di una trivializzazione del fibrato normale che ha per base la curva data.

Per comprendere meglio quanto detto, portiamoci in una dimensione di meno, ovvero sulla frontiera di una 4-varietá. Consideriamo una curva ed un suo intorno tubolare (un toro pieno).

L'operazione preliminare all'aggiunta di un manico di indice due è di assegnare un diffeomorfismo (che è equivalente ad assegnare un framing) tra il toro pieno e la varietá prodotto $S^1 \times D^2$.

Si presentano, a questo punto, due problemi: il primo è come scegliere l'orientamento quando da $K^2(P)$ si passa a $N^n(K^2(P))$; il secondo è, fissato un orientamento, come poterlo estendere in un unico modo allorchè da una presentazione P si passa ad un'altra presentazione mediante i movimenti di Tietze. Una maniera naturale sará quella di scegliere una trivializzazione del fibrato tangente a $V^n(P_0) \subset R^n$, per una presentazione iniziale P_0 data, per passare poi ad una trivializzazione del fibrato tangente a $N^n(K^2(P))$ per ogni P. Questo passaggio si puó chiarire ricorrendo ad una struttura spin. Le strutture spin su V^n sono in tutto 2^h, tante quante sono le classi di coomologia $H^1(V^n, Z/2Z) = (Z/2Z)^h$, essendo h il numero di generatori. Quello che occorre è fissare una struttura spin, e poi estendela a tutte le altre varietá $N^n(K^2(P))$, che si ottengono con i movimenti Tietze. Data un' immersione iniettiva da $V^n(P_0)$ in R^n, cosa avviene della struttura spin quando a partire da P_0 si opera un movimento di Tietze? Si puó rispondere a questa domanda con un esempio. Un movimento puó essere quello di passare da $x_1, \cdots, x_m$ a $x_1, x_1x_2, \cdots, x_m$. Geometricamente questo vuol dire effettuare uno scivolamento di manici di indice uno, rimanendo sempre immersi iniettivamente in R^n ed è questa immersione iniettiva (embedding) in R^n che dota $V^n(P)$ della struttura spin. Visto che tutti i movimenti, compresi quelli di tipo 4, possono essere fatti restando sempre immersi iniettivamente in R^n, l'immersione iniettiva induce una struttura spin su tutti i $V^n(P)$ e su di esse lo spazio R^n a sua volta induce un orientamento, cosicché tutte queste varietá restano univocamente determinate.

Oltre ai movimenti di Tietze, che sono concettualmente operazioni gruppali, si possono eseguire movimenti detti di Whitehead, che sono essenzialmente operazioni su spazi. Essi consistono essenzialmente in dilatazioni e collapsing elementari di un complesso simpliciale, che richiamiamo brevemente al lettore. Sia A un complesso simpliciale, sia σ^p un simplesso e indichiamo con con σ^{p-1} una sua faccia propria. Si consideri l'embedding $\partial\sigma^p - \mathring{\sigma}^{p-1} \hookrightarrow A$, l'operazione $A \hookrightarrow B \cup \sigma^p$ eseguita lungo $\partial\sigma^p - \mathring{\sigma}^{p-1}$, è detta *dilatazione* elementare e si indica con il simbolo $\nearrow$. L'operazione inversa $\searrow$, che puó ritenersi una retrazione, $B \cup \sigma^p \searrow B$ è detta *collapsing* elementare.

Ricordiamo che:

- date due presentazioni di un gruppo, si puó passare dall' una all'altra mediante i movimenti di Tietze,
- tranne per i movimenti di tipo 4, i movimenti di Tietze si possono realizzare con movimenti di Whitehead.

Mettendo da parte, per il momento, i movimenti di Tietze, una prima impostazione è che se si passa da $K^2(P)$ a $K^2(P')$ con movimenti di Whitehead, per $n \geq 5$, allora un intorno regolare $N^nK^2(P)$, a trasformazione avvenuta, resta ancora un intorno regolare (con $K^2(P)$ sempre iniettivamente immerso).

Un altro tipo di impostazione è che (in dimensione $n \geq 5$) a ciascun movimento di Tietze si puó fare corrispondere un movimento conosciuto in topologia differenziale. Il passaggio dall'impostazione puramente topologica nel senso di effettuare scivolamenti di pellicole, corrisponde in topologia differenziale nell'aggiungere manici e operare scivolamenti di manici di indice uno e due (c.f. fig. 1 e 2). Una volta che queste trasformazioni sono interpretate come movimenti di manici, esse hanno il vantaggio che, con la sola eccezione dei movimenti di tipo 4, essi equivalgono ad una trasformazione differenziabile, che non cambia la struttura della varietá. Uno qualunque di questi movimenti corrisponde geometricamente, in base alla convenzione fatta sul framing, alla somma connessa $N^n K^2(P) \# S^2 \times B^{n-2}$. Quindi se P è la nuova e P_0 la vecchia presentazione del gruppo, in termini formali, si puó porre

$$N_1^n = N^n K^2(P_0) \# S^2 \times B^{n-2} \overset{diff}{=} N^n K^2(P).$$

Per cui i rivestimenti universali degli intorni regolari, per ogni movimento di Tietze di tipo $\mathcal{R}$, hanno la proprietá di invarianza della s.c.i.

LEMMA 3.1. *Per tutti quei movimenti che non siano di tipo* 4 *si puó affermare che*

$$\pi_1^\infty \tilde{N}_1^n = \pi_1^\infty N^n \widetilde{K^2}(P_1)$$

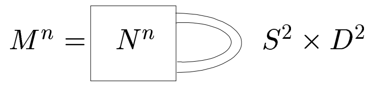
Dimostrazione. Ovvia. □

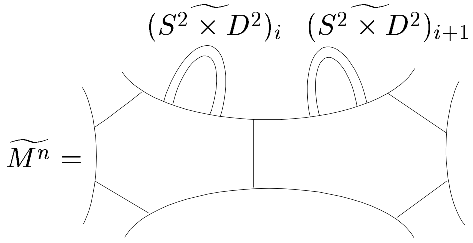
Anche i movimenti di tipo 4 ci fanno passare (non in senso diff) dalla varietá $N^n(K^2(P))$, alla varietá $M^n = N^n(K^2(P)) \# S^2 \times B^{n-2}$. Verifichiamo che anche in questo caso la nozione di semplice connessione all'infinito permane a livello di rivestimenti universali di $N^n = N^n(K^2(P))$ e di M^n.

LEMMA 3.2. *Per i movimenti di tipo* 4, *vale l'uguaglianza*

$$\pi_1^\infty \tilde{N}^n = \pi_1^\infty \tilde{M}^n.$$

Dimostrazione. Proviamo che $\pi_1^\infty \tilde{N}^n = 0$ se e solo se $\pi_1^\infty \tilde{M}^n = 0$





I sollevamenti $(\widetilde{S^2 \times D^2})_i$ di $S^2 \times D^2$ non si accumulano a distanza finita, ció comporta che un compatto k in $\tilde{M}^n$ puó toccare gli $(\widetilde{S^2 \times D^2})_i$ solo un numero finito di volte. Sia poi $k_1 = k \cup \{\, tutti\, i\, (\widetilde{S^2 \times D^2})_i\, toccati\, da\, k\}$. Poniamo $k_2 = k_1 \cap \tilde{N}^n$. Supponiamo che $\pi_1^\infty \tilde{N}^n = 0$, allora esiste un compatto K_2 (di $\tilde{N}^n$) che contiene k_2, tale che ogni laccetto $\ell \subset \tilde{N}^n - K_2$ è omotopo a zero in $\tilde{N} - k_2$. Il compatto $K = k_1 \cup K_2$ di $\tilde{M}^n$, che contiene k, sará quello per cui un laccetto $\ell \subset \tilde{M}^n - K$ è omotopicamente nullo in $\tilde{M}^n - k$. Infatti un $(\widetilde{S^2 \times D^2})_i$ o è contenuto in $k_1 \subset K$ o sará disgiunto da K_2. Un laccetto $\ell \subset \tilde{M}^n - K$ potrebbe toccare un numero finito di sottospazi $(\widetilde{S^2 \times D^2})_i$ di $\tilde{M}^n$. Per gli $(\widetilde{S^2 \times D^2})_i$ aventualmente toccati dal cammino chiuso, si puó operare una prima omotopia in $\tilde{M}^n - K$ in modo da distaccare il cammino ℓ da *ciascuno* di essi; rimanendo in $\tilde{M}^n - K$ si puó allora distaccare ℓ da ogni $(\widetilde{S^2 \times D^2})_i$ quindi tale cammino sará contenuto in $\tilde{N}^n$. Fuori da K_2, dunque in $\tilde{N}^n$, il laccetto ℓ è omotopo a zero in $\tilde{N}^n - k_2$ dunque ℓ è omotopo a zero in $\tilde{M} - k$.

Viceversa se $\pi_1^\infty \tilde{M}^n = 0$, allora $\pi_1^\infty \tilde{N} = 0$.

Ora N^n è, a meno di diffeomorfismi, identificabile alla varietá

$$M^n +$$

$$\{manici\ di\ indice\ tre\ che\ ammazzano\ la\ somma\ connessa\ \# S^2 \times D^2\}$$

Da qui mediante lo stesso ragionamento della prima parte della dimostrazione, si ottiene la tesi. □

Questo lemma prova inoltre che la semplice connessitá all'infinito non viene alterata se si "ammazzano" manici di indice tre. Possiamo anche affermare che, nelle condizioni del teorema 1, abbiamo

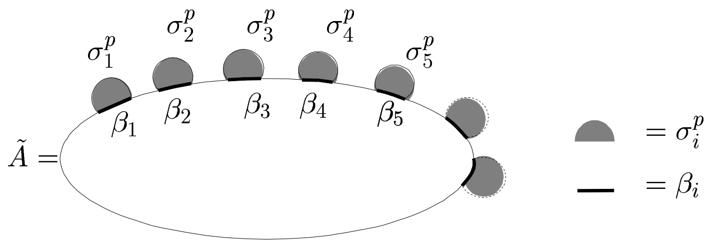
$$\pi_1^\infty N^n \widetilde{K^2}(P) = \pi_1^\infty N^n \widetilde{K^2}(P').$$

Per concludere la dimostrazione del teorema 2.1 resta da provare che il passaggio ad un intorno tubolare non altera la s.c.i.

LEMMA 3.3. *Sia A un complesso simpliciale finito, un collapsing elementare $A \searrow B$ non altera la semplice connessitá all'infinito, ovvero*

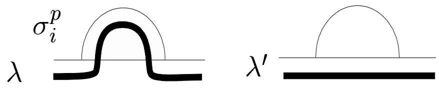
$$\pi_1^\infty \tilde{A} = \pi_1^\infty \tilde{B}.$$

Dimostrazione. Il complesso simpliciale $\beta = \partial\sigma^p - \overset{\circ}{\sigma}{}_1^{p-1} \hookrightarrow B$ è contraibile e dunque semplicemente connesso. Sul rivestimento universale $\tilde{B}$ esistono infinite di copie $\beta_1, \cdots, \beta_n \cdots$ del complesso simpliciale β e su ciascun sollevamento β_i incolliamo, in modo standard, un simplesso σ_i^p.



Il rivestimento $\tilde{A}$ di A si ottiene dal rivestimento $\tilde{B}$ di B mediante una infinitá di dilatazioni elementari. Questo sistema di dilatazioni elementari forma un sistema PROPRIO, nel senso che le dilatazioni elementari sono a due a due disgiunte e non si accumulano a distanza finita. In questa situazione dobbiamo provare che $\pi_1^\infty \tilde{B} = 0 \Longrightarrow \pi_1^\infty \tilde{A} = 0$. Se $k \subset \tilde{A}$ è un compatto di $\tilde{A}$, sia $k_1 = k \cap \tilde{B}$. Ma, per ipotesi, $\pi_1^\infty \tilde{B} = 0$, allora esisterá un compatto K_1 tale che $k_1 \subset K_1 \subset \tilde{B}$ per cui ogni laccetto $\ell \subset \tilde{B} - K_1$ è omotopo a zero in $\tilde{B} - k_1$. Sia $K = K_1 \cup \Sigma$, ove si indicato con Σ

tutti i σ_i^p toccati da K_1, che sono in numero finito. Sia λ un laccetto contenuto in $\tilde{A} - K$. Questo laccetto non tocca Σ, ma puó toccare altri σ_i^p.



Ma quei σ che toccano λ non sono toccati da K_1. Con una omotopia in $\tilde{A} - K$ si passa dal cammino λ al cammino λ' contenuto in $\tilde{B} - K$. Ora λ' è omotopo al cammino costante in $\tilde{B} - k_1$, dunque è omotopo a zero $\tilde{A} - k$.

Verifichiamo che è $\pi_1^\infty \tilde{A} = 0 \Longrightarrow \pi_1^\infty \tilde{B} = 0$.

Sappiamo che ogni compatto $k \subset \tilde{B}$ puó toccare solo un numero finito di σ_i^{p-1}. Per il compatto $k_1 = k \cup \{\sigma_i^{p-1}$ toccati da $k\}$ di $\tilde{A}$, esiste un compatto $K \supset k_1$ di $\tilde{A}$ tale che ogni laccetto $\lambda \subset \tilde{A} - K$ è omotopo a zero in $\tilde{A} - k_1$. Vogliamo dimostrare che ogni laccetto $\ell \subset \tilde{B} - K \cap \tilde{B}$ è omotopo a zero in $\tilde{B} - k$. Ció avviene perchè $\tilde{B} \subset \tilde{A}$ allora $\ell \subset \tilde{A} - K$ è omotopo a zero in $\tilde{A} - k_1$. □

Questo lemma dimostra allora che $\pi_1^\infty N^n(\widetilde{K^2}(P)) = \pi_1^\infty \widetilde{K^2(P)}$. Qui termina la dimostrazione del teorema 2.1.

L'affermazione che $\pi_1^\infty N^n(\widetilde{K^2}(P)) = \pi_1^\infty \widetilde{K^2(P)}$ puó essere anche provata in altro modo.

La retrazione ovvia

$$K^2(P)) \overset{r\swarrow}{\subset} N^n(K^2(P))$$

implica che, a livello del rivestimento universale, si ha

$$\widetilde{K^2(P)}) \overset{r'\swarrow}{\subset} N^n(\widetilde{K^2}(P))$$

le retrazioni r ed r' sono equivalenze di omotopia intese in senso PROPRIO. Alla esaustione compatta $L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset$ di $\widetilde{K^2(P)})$ corrisponde, a livello di rivestimento universale, un'altra esaustione compatta $r^{-1}L_1 \subset r^{-1}L_2 \subset \cdots \subset N^n(\widetilde{K^2}(P))$ dove la retrazione $L_i \overset{\swarrow}{\subset} r^{-1}L_i$ è un'equivalenza di omotopia e la retrazione $\widetilde{K^2(P)} - L_i \overset{\swarrow}{\subset} N^n(\widetilde{K^2}(P)) - r^{-1}L_i$ è un'equivalenza di omotopia PROPRIA. Ora il fatto che per ogni n ed N il diagramma

$$\begin{tikzcd}
N^n(\widetilde{K^2(P)}) - r^{-1}L_N \arrow[r, hook] \arrow[d, "r"] & N^n(\widetilde{K^2(P)} - r^{-1}L_n \arrow[d, "r"] \\
\widetilde{K^2(P)} - L_N \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \widetilde{K^2(P)} - L_n \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

commuta omotopicamente, esprime che la retrazione r è ben localizzata. Sappiamo che $\pi_1^\infty N^n(\widetilde{K^2(P)}) = 0$ ció implica, per definizione, che qualunque sia n esiste un N tale che ogni laccetto λ in $\widetilde{K^2(P)}) - L_N$ è omotopo a zero in $\widetilde{K^2(P)}) - L_n$. Dico che questo fatto implica che $\pi_1^\infty N^n(\widetilde{K^2(P)}) = 0$. Per mostrare questo considero la seguente parte del precedente diagramma

$$\begin{tikzcd}
N^n(\widetilde{K^2(P)}) - r^{-1}L_N \arrow[r, hook] \arrow[d, "r"] & N^n(\widetilde{K^2(P)} - r^{-1}L_n \arrow[d, "r"] \\
\widetilde{K^2(P)} - L_N \arrow[r, hook] & \widetilde{K^2(P)} - L_n
\end{tikzcd}$$

e sia Λ il cammino chiuso in $N^n(\widetilde{K^2(P)}) - r^{-1}L_N$ e $r\Lambda$ il corrispondente cammino retratto che esiste in $\widetilde{K^2(P)} - L_N$. In questo spazio $r\Lambda$ è omotopo a Λ (questa retrazione è un'equivalenza di omotopia), ma $r\Lambda$ è omotopo a zero in $\widetilde{K^2(P)} - L_n$ dunque Λ è omotopa a zero in $N^n(\widetilde{K^2(P)}) - r^{-1}L_n$.

La prova che da $\pi_1^\infty N^n(\widetilde{K^2(P)}) = 0$ si dimostra $\pi_1^\infty \widetilde{K^2(P)} = 0$, si ottiene dal diagramma

$$\begin{tikzcd}
N^n(\widetilde{K^2}(P)) - r^{-1}L_N \arrow[r, hook] & N^n(\widetilde{K^2}(P) - r^{-1}L_n \\
\widetilde{K^2(P)} - L_N \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \widetilde{K^2(P)} - L_n \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

con un ragionamento simile.

Dimostrazione del Teorema 2.3

Consideriamo un complesso simpliciale finito X e scegliamo un intero m sufficientemente grande (dipendente dalla dimensione di X); la dimostrazione del lemma 3.3 si estende immediatamente e ci dice che $\pi_1^\infty \widetilde{X} = \pi_1^\infty N^m(\tilde{X})$. La varietá compatta $N^m(\tilde{X})$ è composta dalla palla B^m piú manici di indice 1 + manici di indice 2 + manici di indice 3 etc.... .In particolare si puó ritenere che la varietá $N^m(\tilde{X})$ sia composta solamente (la semplice connessitá all'infinito "non vede" i manici di indice tre etc...) da

$$B^n + manici\ \ di\ indice\ 1 + manici\ di\ indice\ 2.$$

Denotiamo tale varietá con M^n. Un'attenta lettura della dimostrazione del lemma 3.2, ci porta ad affermare che a livello della semplice connessitá all'infinito, vale l'uguaglianza $\pi_1^\infty \tilde{M}^n = \pi_1^\infty \tilde{N}^m(X) = \pi_1^\infty \tilde{X}$. La varietá compatta $N^m(X)$ possiede uno "spine" bidimensionale che è il 2-scheletro del nostro X iniziale, il quale a sua volta è una palla + le anime dei manici di indice uno + le pellicole bidimensionali. Ma allora questo "spine" è una particolare presentazione del gruppo G ovvero il 2-complesso simpliciale $K^2(P)$ è lo scheletro bidimensionale di M^n, ne consegue che il lemma 3 conclude la dimostrazione.

(Ambito congetturale)

Sia G un gruppo di presentazione finita, con $b(G)$ il numero dei suoi capi. Se $b(G) = 0$, allora G è un gruppo finito. Per teorema di Hopf il numero di capi di un gruppo infinito puó essere $1, 2$ o ∞. Il caso piú complicato è quando $b(G) = 1$. Per $b(G) = 2$ il gruppo G o è il gruppo Z degli interi o il prodotto libero $Z/2Z * Z/2Z$. Il teorema di Stallings afferma che se $b(B)$ è infinito e se il gruppo G di tipo finito non ha torsione, allora G è un prodotto libero. Se si continua a rompere il prodotto libero in fattori liberi questi fattori o hanno 2 capi o hanno 1 capo e questa teoria si ferma.

La congettura seguente, per i gruppi con 1 capo, acquista un carattere del tutto generale.

Sia G un gruppo di presentazione finita con generatori $x_1, \cdots, x_n$ e relatori $R_1, \cdots, R_m$. Su questo gruppo si definisce la nozione di distanza $\|\cdots\|$, di palla e di sfera unitá nel modo consueto [5]. Sia X un compatto tale che $\pi_1 X = G$ e $\tilde{X}$ il suo rivestimento universale (unione di domini fondamentali). Scegliamo un dominio fondamentale Δ con un punto base $\star$ e poi, su questo rivestimento universale, si prenda la palla $B(n) = \bigcup_{\substack{x \in G \\ \|x\| \leq n}} x\Delta$ di raggio n. Poichè il numero dei capi è 1, il rivestimento universale $\tilde{X}$ è connesso all'infinito. Possiamo pensare che esiste una successione $n_1 < n_2 < \cdots < n_m < \cdots$ tale che i complementari $\tilde{X} - B(n_1), \tilde{X} - B(n_2), \cdots$ sono connessi. Scegliamo una geodetica g che parte da $\star$. Supponiamo anche che $(\tilde{X} - B(n_1)) \cap g$ sia connessa. Ha senso allora considerare il gruppo $\pi(\tilde{X} - B(n_i), g \cap (\tilde{X} - B(n_i)))$. I vari gruppi fondamentali di $X - B(n_i)$ con punto base variabile sulla geodetica connessa $(X - B(n_i) \cap g)$, sono tutti tra loro canonicamente isomorfi. Se $n_1 < n_2$, allora $B(n_1) \subset B(n_2)$, per cui $\tilde{X} - B(n_2) \subset \tilde{X} - B(n_1)$. Ha senso allora l'applicazione

$$\pi_1(\tilde{X} - B(n_2), g \cap (\tilde{X} - B(n_2))) \longrightarrow \pi_1(\tilde{X} - B(n_1), g \cap (\tilde{X} - B(n_1))).$$

Se passiamo al limite proiettivo di questa successione

$$\prod = \lim_{m \longleftarrow} (\pi_1((\tilde{X} - B(n_m)), g \cap (\tilde{X} - B(n_m))$$

otteniamo un gruppo topologico (difatti un progruppo) con una topologia molto complessa. Se i gruppi fondamentali $\pi_1((\tilde{X} - B(n_m)), g \cap (\tilde{X} - B(n_m))$ fossero finiti, il limite proiettivo sarebbe un insieme di Cantor.

Congettura 3.4. *Il limite proiettivo $\prod$ è indipendente sia dalla presentazione di G che dalla scelta della geodetica g.*

Se questa congettura fosse vera allora
a) $\prod = \pi_1^\infty G$.
b) Ad un gruppo con un solo capo si puó associare un invariante: il gruppo fondamentale all'infinito, (con struttura molto piú fine) che renderebbe distinguibili, tra loro, i gruppi. Un gruppo con un solo capo, congetturalmente, ha un gruppo fondamentale all'infinito. La condizione $\pi_1^\infty = 0$ o 1 corrisponderebbe al fatto che il gruppo sia o no l'identitá.

Riferimenti bibliografici

[1] M.F. Atiyah, *Topological quantum field theories*, Publ. Math. IHES **68** (1989).
[2] Davis, *Groups generated by reflections an aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Ann. Math. **117** (1983), 293–324.
[3] V. Poènaru, *Killing handles of index one stably and* π_1^∞, Duke Math. J. **73** (1991), 431–447.
[4] V. Poènaru, *Almost connex groups lipschitz combing, and* π_1^∞ *for universal covering spaces of closed 3-manifolds*, J. Diff. Geometry **35** (1995), 103–130.
[5] V. Poènaru and C. Tanasi, *Hausdorff combing of groups and* π_1^∞ *for universal covering spaces of closed 3-manifolds*, Annali Scol. Norm. Sup. di Pisa Serie IV vol. XX fasc. 3 (1993).
[6] V. Poènaru and C. Tanasi, *k-weakly almost convex groups and* π_1^∞, Geometria Dedicata **48** (1993), 57–81.
[7] J.H.C. Whitehead, *Simplicial spaces "nuclei and m-groups"*, Proc. London Math. Soc. **45** (1939), 243–327.

Received November 5, 1998.