Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste
Vol. XXXI, 49–60 (1999)

Existence de Valeurs Propres Principales pour un Problème Elliptique en Dimension 2

A. Djellit and N. Benouhiba (*)

Summary. - *The purpose of the present paper is to investigate the existence of principal eigenvalues for linear elliptic problems in* IR^2 *(eigenvalues having positive eigenfunctions).*

1. Introduction

On étudie ici l'existence des valeurs propres principales du problème

$$\begin{cases} Lu = -\triangle u + q(x)u = \lambda g(x)u, \quad x \in IR^2 \\ u \underset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \tag{1}$$

q et g deux fonctions mesurables, qui décroissent vers zéro à l'infini. q est positive ou nulle, g est de signe non constant dans IR^2. On appelle valeur propre principale du Problème (1), toute valeur du paramètre λ pour laquelle il existe une solution $u(x) \geq 0$ et $u(x) \not\equiv 0$ dans IR^2. Dans ce cas u est appelée fonction propre principale.

L' étude de tels problèmes intervient dans l'investigation des solutions des équations non linéaires telles que

---

(*) Authors' Address: A. Djellit, Université de Annaba, Institut de Mathématiques BP 12, 23000 Annaba, Algerie
N. Benouhiba, Université de Annaba, Institut de Mathématiques BP 12, 23000 Annaba, Algerie
Classification AMS: 35P15
Mots clés: espace de Sobolev à poids, problème elliptique, valeur propre principale, principe du Min-Max.

$$\begin{cases} Lu = -\triangle u + q(x)u = \lambda g(x)u + f(\lambda, x, u), \quad x \in IR^2 \\ u \underset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \tag{2}$$

Sous certaines conditions sur q, g et f une branche de solutions positives du Problème (1) peut bifurquer à partir de la solution nulle, précisément, quand λ est une valeur propre principale du problème linéaire associé.
Une première étude a été élaborée par A.S.Bonnet [6] quand $q \equiv 0$ et g à support compact. Des résultats sur la non existence de valeurs propres principales positives figurent dans le travail de K.J.Brown-C.Cosner-J. Fleckinger [12] quand $q \equiv 0$ et $\int_{IR^2} gdx > 0$. Nous avons considéré dans A.Djellit [8] le cas où $\int_{IR^2} gdx \gtrless 0$ et $q \equiv 0$. Nous avons montré que le Problème (1) admet un spectre discret ; nous avons rencontré des difficultés techniques quand $\int_{IR^2} gdx = 0$. Dans la première section de ce travail, nous considérons le cas $q \equiv 0$, nous montrons que le spectre du Problème (1) est purement ponctuel sans aucune considération sur le signe de la quantité $\int_{IR^2} gdx$. Nous donnons ensuite un résultat d'existence d'une seule valeur propre principale de ce problème.
Dans la seconde section, nous considérons le cas $q \geq 0$, nous montrons que le Problème (1) admet exactement deux valeurs propres principales distinctes en faisant usage essentiellement de l'identité de Picone.

Notation

Nous introduisons les notations suivantes. Soit h une fonction réelle mesurable, on note $h^{\pm} = \max(\pm h, o)$ la partie positive et négative de h, i.e $h = h^+ - h^-$.
Nous introduisons aussi les fonctions définies sur IR^2

$$\rho(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

pour $\alpha > 0$ fixé, on note

$$p_\alpha(x) = \rho^{2\alpha}(x)(1 + \log\sqrt{1 + |x|^2})^{-2}. \tag{4}$$

On définit les espaces

$$V = \left\{ u \in D'(IR^2); (p_1)^{\frac{1}{2}} u \in L^2(IR^2), |\nabla u| \in L^2(IR^2) \right\} \tag{5}$$

V muni de la norme

$$\|u\|_V = \left(\int_{IR^2} (|\nabla u|^2 + p_1 |u|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est un space de Hilbert (voir Hanouzet [4] p.230).

$$L^2_p(IR^2) = \left\{ u, \quad p^{\frac{1}{2}} u \in L^2(IR^2) \right\}, \tag{6}$$

p étant une fonction positive définie sur IR^2.

$$V_{\pm} = \left\{ u \in V : \int_{IR^2} g\, |u|^2 \, dx \gtrless 0 \right\}. \tag{7}$$

$$B_{\mathrm{R}} = \left\{ x \in IR^2 : |x| < \mathrm{R} \right\} \tag{8}$$

DÉFINITION 1.1. *On appelle solution du Problème (1) tout couple $(u, \lambda) \in V \times IR$ qui vérifie (1). λ est dit valeur propre du Problème (1) s'il existe un vecteur $u \in V$ non nul qui vérifie (1). u est alors appelé fonction propre associée à λ.*

Hypothèses

Nous considérons aussi les hypothèses suivantes

i) g et q sont deux fonctions mesurables, g est de signe non constant sur IR^2, telles que $\exists \alpha > 1$, $\exists \beta \geq 1$, $\exists K > 0, \exists C > 0$ satisfaisant

$$|g(x)| \leq K p_\alpha(x) \text{ et } \ q\,(x) \leq c p_\beta(x)$$

ii) $\Omega_0 = \left\{ x \in IR^2 \mid g\,(x) = 0 \right\}$ est de mesure nulle, i.e $|\Omega_0| = 0$

2. CAS $q \equiv 0$

Nous commençons par donner deux remarques.

REMARQUE 2.1. *La fonction constante appartient à V et par conséquent la forme bilinéaire*
${}_{IR^2}\int \nabla u \nabla v dx$ *ne peut pas définir un produit scalaire sur V.*

REMARQUE 2.2. *On voit bien que $\lambda = 0$ est valeur propre du Problème (1) associée à la fonction unité, nous cherchons alors les autres fonctions propres correspondantes à des valeurs propres non nulles, si elles existent, sur l'orthogonal dans V de la fonction unité.*
Compte tenu des deux remarques précédentes, nous considérons le problème complètement défini dépendant d'un paramètre $\tau > 0$ de la forme

$$\begin{cases} -\triangle u + \tau g_-(x)u = \lambda g_+(x)u, \quad x \in IR^2 \\ u \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \tag{9}$$

Notons $a(u,v) =_{IR^2} \nabla u \nabla v + \tau g_- uvdx$ et $b(u,v) =_{IR^2} g_+ uvdx$.
Une formulation variationnelle du problème (9) est donnée par

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u,\lambda) \in V \times IR^*, \ u \neq 0 \text{ tels que} \\ \qquad a(u,v) = \ \lambda\, b(u,v) \end{cases} \tag{10}$$

Il est évident que la forme bilinéaire $a(u,v)$ est continue sur V. Nous montrons à l'aide d'un raisonnement par l'absurde qu'elle est aussi coercive sur V. Nous supposons donc qu'il existe une suite $(u_n)_n$ de V telle que

a) $\int_{IR^2} |\nabla u_n|^2 + \tau g_- u_n^2 dx < \frac{1}{n}$

b) $\| u_n \|_V = 1$

Comme la suite $(u_n)_n$ est bornée dans V nous pouvons extraire une sous suite, notée encore $(u_n)_n$, qui converge faiblement vers un élément u de V.
En vertu de (a) $|\nabla u_n| \to 0$ dans $L^2(IR^2)$ alors $|\nabla u| = 0$ et par conséquent u est une constante.
D'autre part, la restriction de la suite $(u_n)_n$ sur le support de g_- ,

noté Ω_{g_-}, *est une suite fortement convergente vers zéro. En effet, nous avons*

$$|\nabla u_n| \to 0 \ \textit{dans} \ L^2(\Omega_{g_-}) \ \textit{et} \ u_n \to 0 \ \textit{dans} \ L^2(\Omega_{g_-})$$

par suite $u_n \to 0$ *dans* $L^2_{p_1}(\Omega_{g_-})$.
En vertu de l'unicité de la limite, la restriction de u *sur* Ω_{g_-} *est identiquement nulle. Il en résulte donc que* u *est identiquement nulle sur* IR^2 *(puisque* u *est constant). Ceci est en contradiction avec (b).*

Par conséquent la forme bilinéaire $a\,(u,v)$ *définit un produit scalaire sur* V *équivalent au produit scalaire usuel. Comme la forme bilinéaire* $b(u,v)$ *est continue sur* V, *il existe d'après le théorème de représentation de Riesz, un opérateur linéaire* T *continu dans* V *tel que*

$$a(Tu,v) = \ b(u,v), \ \ \forall u, v \in V.$$

Les valeurs propres du Problème (10) sont exactement les inverses des valeurs propres de T, *associées aux mêmes fonctions propres.*

Proposition 2.3. *L'opérateur* T *est compact.*

Démonstration. Soit $(u_n)_n$ une suite bornée dans V, alors $(u_n)_n$ reste bornée sur $H^1(B_R)$, mais comme l'injection de $H^1(B_R)$ dans $L^2(B_R)$ est compacte, alors $(u_n)_n$ est de Cauchy dans $L^2(B_R)$. Pour tout m, n on a

$$\begin{aligned} \|T(u_n - u_m)\|_V^2 &\le \gamma a\left(T(u_n - u_m), T(u_n - u_m)\right) \\ &\le \gamma' \int_{IR^2} p_\alpha \left|(u_n - u_m)\right| \left|T(u_n - u_m)\right| dx \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy on obtient

$$\begin{aligned} &\|T(u_n - u_m)\|_V^2 \le \gamma'^2 \int_{IR^2} p_{2\alpha-1} \left|(u_n - u_m)\right|^2 dx \\ &\le \gamma_1 \|u_n - u_m\|_{L^2(B_R)} + \gamma_2 \frac{1}{(1+R^2)^{2(\alpha-1)}} \|u_n - u_m\|_V^2 \end{aligned}$$

La première quantité du membre de droite tend vers zéro. Par hypothèse $\|u_n - u_m\|_V$ est bornée et $\frac{1}{(1+R^2)^{2(\alpha-1)}}$ tend vers zéro quand R tend vers l'infini. Par conséquent la suite $(Tu_n)_n$ est de Cauchy dans V et y converge. On peut alors appliquer à T les résultats de la théorie spectrale classique des opérateurs autoadjoints compacts. $\square$

PROPOSITION 2.4. *Le Problème (9) admet une infinité dénombrable de valeurs propres positives tendant vers l'infini*

$$0 < \lambda_1^+(\tau) \le \lambda_2^+(\tau) \le \cdots \le \lambda_j^+(\tau) \le \cdots$$

Ces valeurs propres sont caractérisées par le principe du Min-Max

$$\lambda_j^+(\tau) = \inf_{A\in V_j} \sup_{\substack{u\in A\\ u\neq 0}} \frac{a(u,u)}{b(u,u)}$$

où V_j désigne la famille des sous espaces de V de dimension j.

Nous nous intéressons maintenant aux points fixes de $\lambda_j^+(\tau)$. Il est évident que si $\lambda_j^+(\tau)$ admet un point fixe τ_j^+, alors τ_j^+ est valeur propre du Problème (1). Au point fixe $\tau = \lambda(\tau)$ la fonction propre associée $\phi(\tau)$ est dans V_+.
En vertu de sa caractérisation, $\lambda_j^+(\tau)$ est continue et croissante en τ. De plus, quand τ tend vers zéro, $\lambda_j^+(\tau)$ tend vers la j$^{\text{éme}}$ valeur propre μ_j du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu g_+ u \\ u \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

(voir A.Djellit [8]) qui est strictement positive pour $j \ge 1$.
Montrons que $\lambda_j^+(\tau)$ admet un point fixe c'est à dire que $\lambda_j^+(\tau)$ coupe la première bissectrice. D'après le principe du Min-Max on a

$$\lambda_j^+(\tau) = \inf_{A\in V_j} \sup_{\substack{u\in A\\ u\neq 0}} \left\{ \frac{\int_{IR^2} |\nabla u|^2\, dx}{\int_{IR^2} g_+ u^2 dx} + \tau \frac{\int_{IR^2} g_- u^2 dx}{\int_{IR^2} g_+ u^2 dx} \right\}$$

On cherche dans V_+ j fonctions linéairement indépendantes et deux à deux orthogonales. Pour cela, on considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + p_1(x) u = \mu g(x) u, \quad x \in IR^2 \\ u \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \tag{11}$$

On sait que le Problème (11) admet une double suite dénombrable de valeurs propres (voir A.Djellit [8]). On note par $\left(\mu_i^+\right)_{i=1,\,j}$les j premières valeurs propres positives distinctes du Problème (2.3) et par $(\psi_i)_{i=1,\ j}$ leurs fonctions propres correspondantes.
Pour $i \neq k$, $1 \leq i$, $k \leq j$

$$\mu_i^+ \int_{IR^2} g\psi_i\psi_k dx = \int_{IR^2} (\nabla\psi_i.\nabla\psi_k + p_1\psi_i\psi_k)dx = \mu_k^+ \int_{IR^2} g\psi_k\psi_i dx$$

par conséquent

$$\int_{IR^2} (\nabla\psi_i.\nabla\psi_k + p_1\psi_i\psi_k)dx = \int_{IR^2} g\psi_k\psi_i dx = 0$$

Posons A_j l'espace engendré par $(\psi_i)_{i=1,\ j}$ et $A_j^* = A_j - \{0\}$.
On a $A_j^* \subset V_+$. En effet, soit $u \in A_j^*$ alors il existe $(\alpha_i)_{i=1,\ j} \in IR$ tels que $u = \sum_{i=1,j} \alpha_i\psi_i$.

$$\int_{IR^2} gu^2 dx = \sum_{i=1,j}\sum_{k=1,j} \alpha_i\alpha_k \int_{IR^2} g\psi_i\psi_k dx = \sum_{i=1,j} \alpha_i^2 int_{IR^2} g\psi_i^2 dx > 0$$

donc $u \in V_+$. Alors

$$\begin{aligned}
\lambda_j^+ &\leq \left\{\sup_{u\in A_j^*} \frac{\int_{IR^2}|\nabla u|^2 dx}{\int_{IR^2} g_+u^2 dx}\right\} + \tau\left\{\sup_{u\in A_j^*} \frac{\int_{IR^2} g_-u^2 dx}{\int_{IR^2} g_+u^2 dx}\right\} \\
&\leq \left\{\sup_{u\in A_j^*} \frac{\int_{IR^2}(|\nabla u|^2 + p_1u^2) dx}{\int_{IR^2} gu^2 dx}\right\} + \tau\left\{\sup_{u\in A_j^*} \frac{\int_{IR^2} g_-u^2 dx}{\int_{IR^2} g_+u^2 dx}\right\} \\
&= \mu_j^+ + \tau a_j
\end{aligned}$$

Pour tout $u \in A_j^*$ on a $\int_{IR^2} gu^2 dx > 0$ donc$\int_{IR^2} g_+u^2 dx > \int_{IR^2} g_-u^2 dx$. Ce qui implique que $a_j < 1$.
$\lambda_j^+(\tau)$ est borné par la droite $\lambda = a_j\tau + \mu_j$ qui a une pente inferieure à 1.
Par conséquent $\lambda_j^+(\tau)$ coupe obligatoirement la bissectrice. Si τ_0 est un point fixe alors $\left(\lambda_j^+\right)'(\tau_0) < 1$.
En effet, soient $\lambda_j^+(\tau), \lambda_j^+(\tau_0)$ des valeurs propres associées aux fonctions propres $\phi(\tau), \phi(\tau_0)$ respectivement. Alors

$$(\lambda_j^+(\tau) - \lambda_j^+(\tau_0)) \int_{IR^2} g_+\phi(\tau)\phi(\tau_0)dx = (\tau - \tau_0) \int_{IR^2} g_-\phi(\tau)\phi(\tau_0)dx$$

Puisque les fonctions et les valeurs propres sont continues en τ on obtient

$$\left(\lambda_j^+\right)'(\tau_0) = \lim_{\tau\to\tau_0} \frac{\lambda_j^+(\tau) - \lambda_j^+(\tau_0)}{\tau - \tau_0} = \frac{\int_{IR^2} g_-\phi^2(\tau_0)dx}{\int_{IR^2} g_+\phi^2(\tau_0)dx} < 1$$

car $\phi(\tau_0)$ est supposée dans V_+. Par conséquent τ_0 est unique.

THÉORÈME 2.5. *Le Problème (1) admet une suite de valeurs propres positives croissante vers plus l'infini*

$$0 < \tau_1^+ \leq \tau_2^+ \leq \ldots \leq \tau_j^+ \leq \ldots$$

THÉORÈME 2.6. *Le Problème (1) admet une suite de valeurs propres négatives décroissante vers moins l'infini*

$$\ldots \tau_j^- \leq \ldots \leq \tau_2^- \leq \tau_1^- < 0$$

Nous montrons de manière analogue que les valeurs propres du Problème paramétrisé

$$\begin{cases} -\Delta u + \tau g_+ u = \lambda(\tau) g_- u, & \text{dans } IR^2 \\ u \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

admettent des points fixes qui ne sont autres que les valeurs propres négatives du Problème (1)

REMARQUE 2.7. *Compte tenu de la remarque 2.2, toute fonction propre du Problème (1) correspondante à une valeur propre non nulle doit changer de signe. Par suite, zéro est la seule valeur propre principale du Problème (1).*

3. CAS $q \geq 0$ et $q \not\equiv 0$

Nous considèrons le Problème (au sens faible)

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda g(x)u, & x \in IR^2; \lambda \in IR \\ u \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \tag{12}$$

Le Problème (12) admet une double infinité dénombrable de valeurs propres l'une positive et tend vers $+\infty$ et l'autre négative et tend vers -∞ (voir [8]).

$$\begin{aligned} \lambda_j^+ &= \inf_{A\in V_j} \sup_{u\in A\cap V_+} \left\{ \frac{\int_{IR^2}\left(|\nabla u|^2+qu^2\right)dx}{\int_{IR^2} gu^2dx} \right\} \\ \lambda_j^- &= \sup_{A\in V_j} \inf_{u\in A\cap V_-} \left\{ \frac{\int_{IR^2}\left(|\nabla u|^2+qu^2\right)dx}{\int_{IR^2} gu^2dx} \right\} \end{aligned} \tag{13}$$

PROPOSITION 3.1. *Les deux premières valeurs propres λ_1^+ et λ_1^- sont les uniques valeurs propres principales du Problème (12). De plus, elles sont simples.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que si λ est valeur propre du Problème(3.1) avec le poids g alors $(-\lambda)$ est valeur propre du Problème (3.1) avec le poids $(-g)$. De ce fait, il suffit de montrer que λ_1^+ est principale.
D'après la caractérisation variationnelle de λ_1^+ on a

$$\lambda_1^+ = \inf\left\{ \frac{\int_{IR^2}\left(|\nabla u|^2+qu^2\right)dx}{\int_{IR^2} gu^2dx}, u\in V, \int_{IR^2} gu^2dx>0 \right\}$$

Soit ϕ la fonction propre associée à λ_1^+, donc ϕ réalise le minimum, i.e.

$$\lambda_1^+ = \frac{\int_{IR^2}\left(|\nabla \phi|^2+q\phi^2\right)dx}{\int_{IR^2} g\phi^2dx}$$

Supposons que ϕ change de signe, alors $\phi=\phi^+-\phi^-$. Posons

$$\begin{aligned} J(\phi,\phi) &= \textstyle\int_{IR^2}\left(|\nabla \phi|^2+q\phi^2\right)dx \\ G(\phi,\phi) &= \textstyle\int_{IR^2} g\phi^2\,dx \end{aligned}$$

Puisque les supports de ϕ^+ et ϕ^- sont disjoints on a

$$\begin{aligned} J(\phi,\phi) &= J(\phi^+,\phi^+)+J(\phi^-,\phi^-) \\ G(\phi,\phi) &= G(\phi^+,\phi^+)+G(\phi^-,\phi^-) \end{aligned}$$

Il est clair qu'au moins l'une des fonctions ϕ^+ ou ϕ^- appartient à V_+ car $\phi \in V_+$. On peut alors distinguer deux cas

$$G(\phi^+,\phi^+).G(\phi^-,\phi^-) > 0$$

ou

$$G(\phi^+,\phi^+).G(\phi^-,\phi^-) \leq 0$$

Le premier cas implique que ϕ^+ ainsi que ϕ^- sont dans V_+ et donc

$$\lambda_1^+ \leq \min\left\{\frac{J(\phi^+,\phi^+)}{G(\phi^+,\phi^+)}, \frac{J(\phi^-,\phi^-)}{G(\phi^-,\phi^-)}\right\} \leq \frac{J(\phi,\phi)}{G(\phi,\phi)} = \lambda_1^+$$

ce qui implique que

$$\lambda_1^+ = \frac{J(\phi^+,\phi^+)}{G(\phi^+,\phi^+)} = \frac{J(\phi^-,\phi^-)}{G(\phi^-,\phi^-)}$$

Cette dernière équation prouve que ϕ^+ et ϕ^- sont toutes les deux des fonctions propres associées à λ_1^+.
Dans le deuxième cas on obtient

$$\lambda_1^+ \leq \max\left\{\frac{J(\phi^+,\phi^+)}{G(\phi^+,\phi^+)}, \frac{J(\phi^-,\phi^-)}{G(\phi^-,\phi^-)}\right\} \leq \frac{J(\phi,\phi)}{G(\phi,\phi)}$$

donc

$$\lambda_1^+ = \max\left\{\frac{J(\phi^+,\phi^+)}{G(\phi^+,\phi^+)}, \frac{J(\phi^-,\phi^-)}{G(\phi^-,\phi^-)}\right\}$$

Ceci veut dire que l'une des fonctions ϕ^+ou ϕ^-est fonction propre associée à λ_1^+. Sans restriction de la généralité, supposons que ϕ^+ est fonction propre associée à λ_1^+. Appliquons l'identité de Picone à ϕ, ϕ^+(voir [2], [3])

$$\begin{aligned}\int_{IR^2} |\phi|^2 \left|\nabla\left(\frac{\phi^+}{\phi}\right)\right|^2 dx &= \int_{IR^2} \left|\nabla\phi^+\right|^2 dx + \int_{IR^2} (\phi^+)^2 \frac{\Delta\phi}{\phi} dx \\ &= \int_{IR^2} (\lambda_1^+ g - q)(\phi^+)^2 dx + \int_{IR^2} (q - \lambda_1^+ g)(\phi^+)^2 dx = 0\end{aligned}$$

ce qui implique que $\phi = c\phi^+$.
Montrons que λ_1^+ est la seule valeur propre principale positive du Problème (3.1). Soit λ une valeur propre positive du Problème (3.1) et soit φ la fonction propre associée à λ_1^+. Supposons que λ est principale c'est à dire que φ est strictement positive. En appliquant l'identité de Picone à φ et ϕ on trouve

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{IR^2} \varphi^2 \left|\nabla\left(\frac{\phi}{\varphi}\right)\right|^2 dx &= \textstyle\int_{IR^2} |\nabla\phi|^2\, dx + \int_{IR^2} \phi^2 \frac{\Delta\varphi}{\varphi} dx \\ &= (\lambda_1^+ - \lambda) \textstyle\int_{IR^2} g\phi^2 dx \end{aligned} \tag{14}$$

Comme λ est valeur propre positive du Problème (3.1) on a nécessairement
$\lambda_1^+ \leq \lambda$ (d'après le principe du Min-Max). De l'égalité (3.3) on obtient

$$\int_{IR^2} \varphi^2 \left|\nabla\left(\frac{\phi}{\varphi}\right)\right|^2 dx = (\lambda_1^+ - \lambda) \int_{IR^2} g\phi^2 dx = 0$$

ce qui implique que $\varphi = c\phi$ et $\lambda = \lambda_1^+$.
Enfin, montrons que λ_1^+ est simple. Pour cela on suppose l'existence de deux fonctions propres u, v associées à λ_1^+. En appliquant l'identité de Picone à u, v on obtient

$$\int_{IR^2} u^2 \left|\nabla\left(\frac{u}{v}\right)\right|^2 dx = 0$$

d'où $v = cu$. □

Références

[1] A.Djellit and J. Fleckinger, *Valeurs propres de problèmes elliptiques*, B.U.M.I **7** (1993), 857–874.

[2] W. Allegretto, *Principal eigenvalues for indefinite weight elliptic problems in IR*, To appear in Amer.Math.Soc.

[3] W. Allegretto and B. Mingarelli, *On the non-existence of positive solutions for a Schrödinger equation with an indefinite weight function*, C.C.MATH. Rep.Acad.Sci. Canada **VII** (1986), no. 1.

[4] B.Hanouzet, *Espaces de Sobolev avec poids. Application au problème de Dirichlet dans un demi-espace*, Rend.Sem.Mat Univ. Padova **56** (1971), 227–272.

[5] J. Bochenk, *On some linear eigenvalue problems with an indefinite weight function*, Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica **Fasciculus XXVII** (1988).

[6] A.S. Bonnet, *Analyse mathématique de la propagation des modes guidés dans les fibres optiques*, 1988, Rapport de Recherche 229.

[7] W.D.Evans D.E.Edmunds and J.Fleckinger, *On the spectrum and the distribution of singular values of Schrödinger operators with a complex potentia*, Proc.R.Soc.Lond. **A 388** (1983), 195–218.

[8] A. Djellit, *Valeurs propres de problèmes elliptiques "indé-finis" sur des ouverts non bornés de IR^n*, Ph.D. thesis, Univ.Toulouse III, 17 Juin 1992.

[9] D.G.de Figueiredo, *Positive solutions of semi-linear elliptic problems*, lectures note in maths **957**, 36–87.

[10] J.Fleckinger-Pellé and A.B.Mingarelli, *On the eigenvalue of non definite elliptic operators*, Math Studies **92** (1983), 219–222.

[11] K.J.Brown and S.S.Lin, *On the existence of positive eigenfunction an eigenvalue problem with indefinite weight function*, J. Math. Anal. Appl. **75** (1980), 112–120.

[12] K.J.Brown-C.Cosner and J.Fleckinger, *Principal eigenvalue for problems with indefinite weight functions on IR^n*, Proc. A.M.S. **109** (1990), no. 1, 147–155.

[13] P.Gossez and E.Lami dozo, *On the principal eigenvalue of a second order linear elliptic problem with indefinite weight function*, Arch. Ratio.Mech.Anal. **89** (1985), no. 2, 169–175.

[14] P.Hess, *On the principal eigenvalue of a second order linear elliptic problem with an indefinite weight function*, Math. Zeitschrift. **179** (1982), 237–239.

Received July 15, 1998.