Analisi di Fourier in piú variabili complesse

IRENE SABADINI and DANIELE C. STRUPPA (*)

SOMMARIO. - *Il lavoro fornisce una descrizione dello stato dell'arte per quanto riguarda l'Analisi di Fourier in piú variabili complesse. Partendo dai fondamentali lavori di Ehrenpreis degli anni sessanta, il lavoro descrive in che modo l'Analisi di Fourier delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali di ordine infinito (e piú in generale di equazioni di convoluzione) puó essere ora applicata per risolvere interessanti problemi, che erano stati sollevati da Ehrenpreis, e che riguardano proprietá di lacunaritá, rappresentazioni di funzioni theta ed estensioni di questa analisi alle funzioni regolari di variabili quaternioniche. Il lavoro termina con una sezione completamente dedicata a problemi aperti nel settore.*

SUMMARY. - *This paper provides an update on Fourier Analysis in Several Complex Variables. We begin with the fundamental works of Ehrenpreis and we describe how Fourier Analysis of solutions of systems of infinite order differential equations (and more generally convolution equations) can be applied to a variety of problems. Among these we discuss lacunary series, theta functions representations and the extensions of this analysis to regular functions of quaternionic variables. The paper ends with a section on open problems in the area.*

1. Introduzione

Il titolo di questo lavoro è, naturalmente, la traduzione di uno dei piú importanti libri apparsi negli ultimi trenta anni nel campo delle equa-

(*) Indirizzo degli Autori: I. Sabadini: Dipartimento di Matematica, Universitá degli Studi di Milano, Via C. Saldini 50, 20133 Milano (Italy). D. C. Struppa: Department of Mathematical Sciences, George Mason University, Fairfax, VA 22030 (U.S.A.).

zioni differenziali lineari a coefficienti costanti [37]. Questa scelta ha un duplice significato: da un lato [37] è stato, negli ultimi 15 anni, la “bibbia” di uno di noi, e certamente il libro che più lo ha formato, e questo lavoro è quindi un tributo a [37] e, in particolare, a Leon Ehrenpreis. D'altra parte, quello che speriamo di dimostrare con questo lavoro, è il fatto che oggi siamo in grado di spingere l'Analisi di Fourier in $\mathbb{C}^n$ verso obiettivi che Ehrenpreis si era posto, anche se senza successo; questo è invece oggi possibile grazie ai contributi di vari matematici, tra i quali vogliamo ricordare C.A. Berenstein, B.A. Taylor, M. Sato, T. Kawai e (almeno parzialente) gli scriventi. Un tributo, dunque, e per certi versi una sfida verso altri problemi che ancora sfuggono al nostro controllo (si veda ad esempio il paragrafo 7). In questo lavoro esamineremo solamente (anche se in dettaglio) un aspetto specifico dell'Analisi di Fourier in $\mathbb{C}^n$; in realtá, molti altri problemi di Analisi Complessa sono intimamente legati a quelli che verranno qui descritti, e per una panoramica piú ampia (anche se necessariamente meno dettagliata), il lettore è invitato ad utilizzare [16], che contiene, tra l'altro, una bibliografia di piú di 600 voci sull'argomento.

Nei prossimi paragrafi cercheremo di illustrare due possibili approcci al problema generale dell'Analisi di Fourier in piú variabili complesse (paragrafi 2 e 3), ed illustreremo alcune possibili applicazioni nei paragrafi 4, 5, 6. L'ultima, breve, sezione è dedicata ad alcuni dei molti problemi che rimangono aperti in questa direzione.

Ringraziamenti. Vorremmo esprimere la nostra gratitudine a Carlos Berenstein, che nel 1979 ha iniziato D.C. Struppa ai lavori di Ehrenpreis e che, con pazienza degna di miglior allievo, ha cercato di farne un matematico. A Leon Ehrenpreis siamo debitori di numerose conversazioni, ricche di idee e suggerimenti che non sempre siamo riusciti a fare nostri. Un debito di riconoscenza vogliamo esprimere verso Takahiro Kawai, con il quale D.C. Struppa collabora ormai da sette anni, e che tanto gli ha insegnato di Analisi Algebrica Microlocale.

2. L'approccio di Ehrenpreis

Il libro [37] è forse la piú chiara espressione del punto di vista che Ehrenpreis aveva deciso di assumere riguardo al problema (o ai problemi) dell'Analisi di Fourier in $\mathbb{C}^n$. In questo paragrafo, pertanto, ci limiteremo a descrivere la "filosofia" di questo approccio, rimandando a [37] il lettore interessato ai dettagli.

Vorremmo ora iniziare spiegando in che senso il termine "Analisi di Fourier" debba essere inteso, quando si pensi ai lavori di Ehrenpreis, ed agli sviluppi che ad essi sono seguiti; è appena necessario sottolineare che la descrizione che presenteremo è personale e fortemente influenzata dalla nostra attivitá di ricerca.

Classicamente, il problema chiave della teoria degli integrali di Fourier, era quello di rappresentare una "funzione" f definita su $\mathbb{R}^n$ attraverso integrali convergenti di esponenziali a frequenze reali (dato α in $\mathbb{R}^n$, e considerata la funzione esponenziale $g(x) = \exp(\alpha \cdot x)$, con x variabile in $\mathbb{R}^n$, si dice che α è la *frequenza* di g); osserviamo che la parola "funzione" è usata in maniera impropria, poiché il problema si pone anche per oggetti molto piú generali (distribuzioni, ultradistribuzioni, iperfunzioni ed altre funzioni generalizzate). Questa teoria ha attraversato, per cosí dire, tre fasi centrali. In un primo momento (la fase eroica della teoria), le funzioni per le quali si proponevano rappresentazioni integrali di Fourier dovevano essere "piccole" all'infinito tanto che si richiedeva, ad esempio, che esse appartenessero a $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$. In un secondo momento (pensiamo allo sviluppo iniziato con i pionieristici lavori di L. Wiener [95], e culminato con la teoria delle distribuzioni di L. Schwartz [87]) si riuscí ad estendere la teoria degli integrali di Fourier al caso in cui le "funzioni" considerate avevano crescita polinomiale all'infinito. A questo proposito vale forse la pena di ricordare la teoria della trasformazione di Fourier–Carleman sviluppata in [29] (per il caso di una variabile reale) e poi genialmente generalizzata da Martineau in [72], la quale, appunto, si proponeva di estendere la teoria degli integrali di Fourier a funzioni di crescita polinomiale. Come è stato osservato in [65] e, piú in dettaglio, in [92], questo tentativo è intimamente legato alla costruzione della teoria delle iperfunzioni nella quale (come vedremo) molti dei problemi posti da Ehrenpreis sfociano in maniera naturale.

Il passo piú significativo, tuttavia, consiste nel trattare funzioni la cui crescita sia "esponenziale" (tali funzioni si presentano in maniera assolutamente naturale in moltissimi problemi concernenti la teoria delle equazioni alle derivate parziali). Per poter affrontare questo problema è naturale il ricorso all'uso di esponenziali $\exp(ix \cdot z)$ con frequenze *complesse* (a differenza di quanto accadeva per funzioni in

L^p, si allarga la scelta dei valori di z a tutto il piano complesso $\mathbb{C}$ o, addirittura, a $\mathbb{C}^n$).

Questo approccio, malgrado la sua ragionevolezza, comporta immediatamente un problema non marginale, e cioè la perdita dell'*unicitá* nella rappresentazione integrale di Fourier; ogni esponenziale, infatti, ammette infinite rappresentazioni integrali, come conseguenza della formula integrale di Cauchy:

$$\exp(ix \cdot z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\gamma \frac{\exp(ix \cdot z)}{z - z_0} dz, \tag{1}$$

dove γ è una qualsiasi curva liscia che circonda z_0 una sola volta, ed in senso antiorario. Questa difficoltá ci porta allora alla formulazione concreta di un problema generale al quale vogliamo dedicare qualche pagina. Consideriamo uno spazio X di "funzioni" in n variabili: il problema consiste nell'individuare dei sottoinsiemi S di $\mathbb{C}^n$ che assicurino l'*esistenza* di una *rappresentazione integrale* per le funzioni di X con frequenze in S. Un insieme S siffatto si dirá essere un *insieme sufficiente* per X.

Tra gli spazi per i quali è sensato porre questo problema, ricordiamo lo spazio $\mathcal{E}$ (funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$), $\mathcal{D}'$ (distribuzioni alla Schwartz), $\mathcal{H}$ (funzioni olomorfe), $\mathcal{E}_\omega$ (funzioni ultradifferenziabili di Beurling), $\mathcal{D}'_\omega$ (ultradistribuzioni di Beurling), $\mathcal{B}$ (iperfunzioni), etc.

In alcuni di questi casi, naturalmente, l'espressione

$$f(x) = \int_S \exp(ix \cdot z) d\mu(z), \tag{2}$$

dove $d\mu$ è una misura di Borel, ha solo un significato simbolico; questa è certamente la situazione se, per esempio, f appartiene a $\mathcal{D}'$. In questo caso, infatti, la rappresentazione (2) significa semplicemente che, per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}$, si ha

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_S \hat{\varphi}(z) d\mu(z), \tag{3}$$

dove $\hat{\varphi}$ denota la trasformata di Fourier di φ.

In molti casi classici, l'esistenza e l'importanza di questi insiemi sufficienti è ben nota. A titolo esemplificativo, ricordiamo che una (tutt'altro che ovvia) conseguenza del teorema di Ehrenpreis–Martineau (*la trasformazione di Fourier–Borel fornisce un isomorfismo topologico tra lo spazio $\mathcal{H}'(\mathbb{C}^n)$ dei funzionali analitici, e lo spazio*

$Exp(\mathbb{C}^n)$ delle funzioni intere di tipo esponenziale [71]), è il seguente risultato (che formuliamo per $n = 1$, ma che si estende immediatamente al caso di piú variabili):

TEOREMA 2.1. *Un insieme sufficiente per lo spazio $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ delle funzioni intere in una variabile è dato dall'insieme*

$$S = \{z \in \mathbb{C} | \Re e z = 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} | \Im m z = 0\},$$

cioè: ogni funzione $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ si puó rappresentare come

$$f(w) = \int \exp(iwz) \frac{d\mu_1(z)}{k_1(z)} + \int \exp(iwz) \frac{d\mu_2(z)}{k_2(z)},$$

dove k_1 e k_2 sono funzioni continue, positive, monotone, la cui crescita domina ogni esponenziale lineare (cioè $\exp(t|z|)/k_i(z) \longrightarrow 0$ quando $|z| \longrightarrow \infty$, per ogni $t > 0$ e $i = 1, 2$) e dove μ_1 e μ_2 sono misure di Radon tali che tali che supp $\mu_1 \subseteq \{z | \Re e z = 0\}$ e supp $\mu_2 \subseteq \{z | \Im m z = 0\}$.

Il lettore interessato puó trovare la dimostrazione di questo risultato in [37]. Molti altri risultati in questa direzione sono stati ottenuti, ad esempio da Berenstein, Dostal e Taylor ma l'attenzione verso questo problema specifico è andata scemando, e si è quindi assistito ad una evoluzione molto significativa.

Nei casi appena descritti, infatti, gli spazi sui quali l'attenzione si concentra sono spazi definiti da condizioni di crescita e/o di regolaritá. Si puó allora pensare di restringere tali spazi imponendo ulteriori condizioni, di natura apparentemente diversa, e cercare poi nuovi insiemi sufficienti per tali spazi.

Il problema, posto in questi termini, rischia di apparire astratto e poco motivato, ma possiamo subito citare un esempio classico che chiarisce il tipo di risultato che abbiamo in mente. Consideriamo infatti il famoso *Principio Fondamentale di Eulero per le equazioni differenziali ordinarie* (cfr. [39]): si consideri un polinomio

$$P(z) = (z - \alpha_1)^{m_1} \dots (z - \alpha_r)^{m_r}, \quad z \in \mathbb{C}, \alpha_i \in \mathbb{C}(\alpha_i \neq \alpha_j, i \neq j), \quad m_i \geq 1,$$

in una variabile complessa, sia $D = \frac{d}{dx}$, $x \in \mathbb{R}$, e sia f una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ su $\mathbb{R}$. Allora f soddisfa l'equazione differenziale omogenea

$$P(D) f = 0$$

se e solo se

$$f(x) = c_1(x)\exp(\alpha_1 x) + \cdots + c_r(x)\exp(\alpha_r x), \tag{4}$$

con $c_j(x)$ $(j = 1, \ldots, r)$ polinomi di grado minore o uguale ad $m_j - 1$ $(j = 1, \ldots, r)$.

Questo risultato, che oggi gli studenti imparano nel loro primo anno di universitá, si puó esattamente collocare nell'ambito sopra descritto. Infatti, non è affatto vero che ogni funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ si puó rappresentare come un integrale di Fourier con un numero finito di frequenze (questo è quello che accade in (4)), e quindi non è affatto vero che esistono insiemi sufficienti di cardinalitá finita per lo spazio $\mathcal{E}(\mathbb{R})$; tuttavia se lo spazio è rimpiazzato dal suo sottospazio

$$\mathcal{E}^P(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) | P(D)f = 0\},$$

allora il Principio Fondamentale di Eulero stabilisce che l'*insieme algebrico*

$$\{z \in \mathbb{C} | P(z) = 0\}$$

è, in realtá, un insieme sufficiente per $\mathcal{E}^P$. Di grande interesse è il fatto che un analogo risultato puó essere enunciato e dimostrato se al posto di equazioni differenziali ordinarie si considerano equazioni differenziali alle derivate parziali (o persino sistemi di tali equazioni, purché lineari e con coefficienti costanti!). Questo fatto è il contenuto del fondamentale risultato di Ehrenpreis e Palamodov noto come *Principio Fondamentale di Ehrenpreis (o di Ehrenpreis–Palamodov) per sistemi di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali*, che Ehrenpreis annunció nel 1960 [35] e al cui prima dimostrazione completa apparve in [37], [77].

Enunciamo questo importante risultato in un caso molto particolare (si vedano [13], [20], [26], [37], [64], [77], [88] e [89] per trattazioni piú generali). Sia $P(z) = P(z_1, \ldots, z_n)$ un polinomio in n variabili complesse, e denotiamo con D la n–upla

$$D = (-i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -i\frac{\partial}{\partial x_n}),$$

dove $x = (x_1, \ldots, x_n)$ è la variabile in $\mathbb{R}^n$. È possibile dimostrare il seguente raffinamento del celebre *Nullstellensatz* di Hilbert: esistono delle varietá algebriche $V_j \subseteq \{z \in \mathbb{C}^n | P(z) = 0\}$, $j = 1, \ldots, r$, e degli operatori differenziali $\partial_1, \dots, \partial_r$ (a coefficienti costanti) tali che, per ogni funzione intera $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, si ha che F appartiene all'ideale

$$I_{\mathcal{H}}(P) = \{P \cdot G | G \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)\},$$

se e solo se

$$\partial_j F_{|V_j} = 0, \text{per ogni} j = 1, \dots, r.$$

Il Principio Fondamentale di Ehrenpreis–Palamodov si puó allora enunciare come segue:

TEOREMA 2.2. *Una funzione $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ è soluzione dell'equazione differenziale $P(D)f = 0$ se, e solo se, essa ammette una rappresentazione integrale*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{r} \int_{V_j} \partial_j(\exp(-ix \cdot z)) d\mu_j(z), \tag{5}$$

dove le μ_j sono misure di Borel, tali da rendere convergenti gli integrali.

Dunque, per usare le notazioni introdotte in precedenza, si puó affermare che la *varietá algebrica*

$$\{z \in \mathbb{C}^n | \ P(z) = 0\}$$

è, ancora una volta, un insieme sufficiente per lo spazio

$$\mathcal{E}^P(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) | P(D)f = 0\},$$

mentre tale insieme non è certamente sufficiente per $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Notiamo, incidentalmente, che se $P = (P_1, \dots, P_m)$ è una m-upla di polinomi e se

$$\mathcal{E}^P(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) | P_1(D)f = \dots = P_m(D)f = 0\},$$

allora il Principio Fondamentale di Ehrenpreis–Palamodov puó essere esteso per dimostrare che un insieme sufficiente per $\mathcal{E}^P$ è dato da

$$\{z \in \mathbb{C}^n \ \ | \ \ P_1(z) = \dots = P_m(z) = 0\}.$$

Si ha infatti un risultato analogo al Teorema 2.2, con una rappresentazione integrale analoga a quella espressa dalla (5), con la sostanziale differenza che gli operatori ∂_j che compaiono devono ora essere presi (in generale) con coefficienti polinomiali.

Questi due esempi fondamentali ci permettono di riformulare il problema posto prima in termini piú precisi:

Problema. Consideriamo una funzione f soddisfacente le seguenti condizioni:

- f ammette una rappresentazione di Fourier nella quale le frequenze sono ristrette a qualche sottoinsieme S di $\mathbb{C}^n$ che, in generale, non è sufficiente;
- f soddisfa certe condizioni di regolaritá e/o di crescita.

Cosa è possibile dedurre su f? In particolare:

- Esistono sottoinsiemi dello spazio della variabile x, $(f = f(x))$ che determinano f?
- possiamo concludere ulteriori proprietá di crescita e/o di regolaritá sulla f?

Il lettore non avrá difficoltá a riconoscere che, in questo schema generale, si possono far rientrare molti problemi classici della teoria delle equazioni differenziali quali:

1. teoremi di unicitá del tipo Holmgren;
2. la teoria delle classi quasianalitiche di funzioni;
3. teoremi di ellitticitá, iperbolicitá, quasi–iperbolicitá, etc.;
4. teoremi di rimozione di singolaritá e di propagazione di regolaritá.

Se ora torniamo per un attimo al libro [37], possiamo osservare che, nella prima metá, Ehrenpreis si dedica essenzialmente alla costruzione della elaborata struttura tecnica necessaria alla dimostrazione del suo Principio Fondamentale; tale risultato, come abbiamo visto, dimostra lo speciale ruolo che le varietá algebriche giocano nello studio di spazi di soluzioni di sistemi di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali. È pertanto naturale che, nel suo approccio, Ehrenpreis consideri come insieme S una varietá algebrica (o algebroide, cfr. [37]). Lo schema "operativo", in questo caso, consiste nel considerare una funzione f, dotata di una rappresentazione di Fourier su un insieme algebrico; questa rappresentazione viene utilizzata per mostrare che f è soluzione di un opportuno sistema di equazioni differenziali ed ora, studiando tale sistema, è possibile inferire ulteriori proprietá di crescita e/o regolaritá su f. Piú spesso, peró, proprio utilizzando il Principio Fondamentale, Ehrenpreis puó invertire il processo ora descritto, e dedurre importanti proprietá di soluzioni di opportune equazioni differenziali, utilizzando la loro rappresentazione di Fourier.

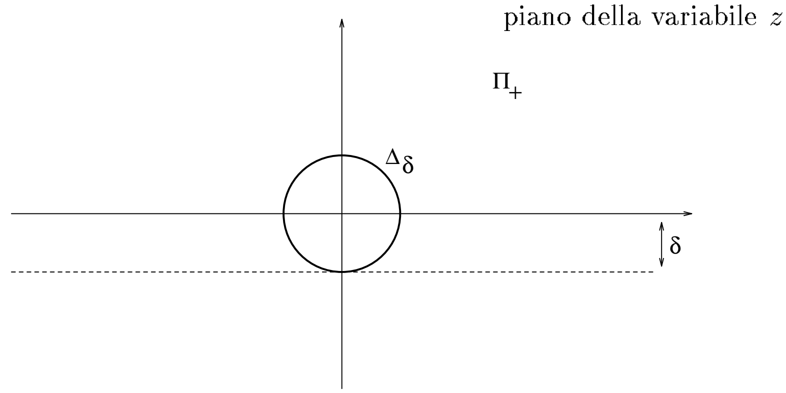
Il problema che Ehrenpreis si trova a dover affrontare è il fatto che, in molti casi concreti e significativi dell'analisi classica, ci si trova di fronte a funzioni che ammettono rappresentazioni di Fourier nelle quali gli insiemi delle frequenze non sono algebrici. Dai molti esempi che Ehrenpreis discute nel suo libro, vogliamo citare un caso particolarmente significativo perché, nei prossimi paragrafi, saremo in grado di utilizzarlo per discutere i nostri progressi piú recenti.

Il seguente risultato è un classico ([34], [63]) teorema, noto come Teorema delle lacune di Fabry (anche se nella sua versione originale viene enunciato per serie di potenze, invece che per serie di esponenziali):

Teorema 2.3. *Siano* $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \Im m z > 0\}$, $\Delta_\delta = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < \delta\}$ *e* $\{c_j\}$ *una successione di numeri complessi. Consideriamo la serie* $\sum c_j \exp(ijz)$ *e supponiamo che questa converga, uniformemente sui compatti di* Π_+*, ad una funzione* $f(z)$*, che si estende olomorficamente a* Δ_δ*, per qualche* $\delta > 0$*. Supponiamo infine che la successione* $\{c_j\}$ *sia lacunaria, nel senso che*

$$card\{j \ : \ c_j \neq 0, \ j \leq N\} = o(N), per N \to \infty.$$

Allora è possibile dedurre che la serie $\sum c_j \exp(ijz)$ *converge uniformemente ad* f *sui compatti di* $\Pi_+ - i\delta$.



OSSERVAZIONE 2.4. *i) Il lettore avrá notato che il teorema 2.3 è un classico teorema di "overconvergenza" (questo risulta ancora piú evidente se si considera la sua formulazione originale in termini di serie di potenze), e non si capisce, a priori, in che modo si possa collegare alla teoria generale delle equazioni differenziali.*

ii) L'insieme S delle frequenze che appaiono nella rappresentazione di Fourier di f è un sottoinsieme numerabile di $\mathbb{N}$ e quindi, in particolare, non è algebrico!

iii) Cosí come è stato enunciato il Teorema 2.3 presenta alcune peculiaritá che appaiono poco motivate, e quindi si puó pensare che, se inserito in un contesto piú appropriato, tale teorema dovrebbe essere suscettibile di notevoli generalizzazioni. Cosí per esempio, non si vede perché S dovrebbe essere un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ quando, probabilmente, un qualsiasi sottoinsieme sparso di $\mathbb{C}$ potrebbe andare bene; cosí pure, la richiesta che f sia olomorfa su $\Pi_+ \cup \Delta_\delta$ è, in qualche senso, una richiesta sulla crescita di f, e si potrebbero quindi cercare altre possibili crescite da considerare. Infine, ci si puó porre la questione della validitá di un risultato analogo, quando si considerino serie in $\mathbb{C}^n$ con $n > 1$.

Ma vediamo ora in che modo Ehrenpreis riesca a collegare la sua teoria generale delle equazioni differenziali, con un teorema che, come abbiamo osservato, sembra avere poco in comune con questa teoria.

Il punto di partenza in [37] consiste nell'osservare che ogni funzione esponenziale

$$f_j(z) = \exp(ijz)$$

è soluzione della particolare equazione differenziale

$$\frac{df_j}{dz}(z) - ijf_j(z) = 0,$$

e possiamo quindi pensare di sostituire alla successione $\{c_j\}$ ed agli esponenziali $\exp(ijz)$ una successione $\{P_j(D)\}$ di operatori differenziali, ed una successione $\{f_j\}$ di soluzioni di

$$P_j(D)f_j = 0,$$

cosí che il teorema di Fabry dovrebbe essere formulato per serie del tipo

$$\sum_{j=1}^{+\infty} f_j(z), \qquad con\ P_j(D)f_j = 0.$$

Da questo punto di vista, l'insieme S delle frequenze risulta ora essere una unione numerabile di varietá algebriche. È chiaro inoltre che se si riuscisse ad ottenere un teorema per siffatte serie, sotto opportune condizioni sulle successioni $\{P_j(D)\}$ ed $\{f_j\}$ allora le generalizzazioni di cui all'osservazione 2.4, verrebbero automaticamente trattate.

Non è possibile entrare qui nei dettagli, per i quali rimandiamo il lettore a [16], [37], ma è necessario osservare che un siffatto teorema è stato ottenuto da Ehrenpreis, nel dodicesimo capitolo di [37]. Questo risultato è estremamente generale (vale per un numero qualsiasi di variabili, e si puó formulare per molti spazi diversi, e non solo per il caso di funzioni olomorfe) ma, d'altra parte, le condizioni che devono essere imposte sulle successioni $\{P_j(D)\}$ ed $\{f_j\}$ sono estremamente complicate, e questo rende il risultato di Ehrenpreis di scarsa applicabilitá, e di interesse per lo piú teorico. Per questo motivo, qualche anno fa, alcuni matematici si convinsero che era possibile fare di piú, ma che per questo era necessario un approccio completamente nuovo al problema. Ancora una volta, l'idea di partenza è dovuta ad Ehrenpreis che, in una osservazione contenuta in [37], sostiene che si dovrebbe cercare di vedere queste serie come soluzioni di equazioni piú generali di quelle da lui studiate, e precisamente come soluzioni di equazioni di convoluzione.

Questo nuovo approccio si è dimostrato perfettamente adeguato, ed i successi in questa direzione non sono mancati. Nel prossimo paragrafo, descriviamo appunto quali risultati della teoria delle equazioni di convoluzione sono necessari per i nostri scopi, ed infine, nei paragrafi successivi, mostreremo come questi possano essere applicati alla soluzione di vari problemi concreti.

3. Equazioni differenziali di ordine infinito ed equazioni di convoluzione

Nel paragrafo precedente abbiamo illustrato come Ehrenpreis trattasse le serie di esponenziali come casi particolari di serie di soluzioni di opportune equazioni differenziali. Questo metodo permetteva di considerare sottoinsiemi numerabili di $\mathbb{C}$ come "unioni" numerabili di varietá algebriche, un punto di vista che era poi possibile estendere a varietá algebriche (non necessariamente discrete) in $\mathbb{C}^n$.

In questo paragrafo vogliamo invece illustrare un nuovo approccio, legato essenzialmente ai nomi di T. Kawai, C.A. Berenstein, D.C. Struppa (si vedano a questo proposito i lavori [14], [15], [16], [18], [53], [54], [90]). L'idea centrale di questo nuovo approccio consiste nel rimpiazzare le equazioni differenziali (le cui varietá caratteristiche sono necessariamente algebriche) con equazioni di convoluzione (le cui varietá caratteristiche sono, invece, varietá analitiche).

Vediamo di descrivere brevemente in che modo tali equazioni di convoluzione sono definite, e come possono essere utilizzate per i nostri scopi. Consideriamo, per semplicitá, una funzione intera f in $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, ed un funzionale analitico μ in $\mathcal{H}'(\mathbb{C}^n)$, il duale topologico di $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$. Si puó allora definire la convoluzione tra f e μ utilizzando la dualitá che intercorre tra $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$, come segue:

$$\mu * f(z) := < \mu, \xi \longrightarrow f(z+\xi) > . \tag{6}$$

Non è difficile mostrare, cfr. ad esempio [75], che $\mu * f$ è ancora una funzione intera, e si ha quindi un'applicazione lineare e continua

$$\mu * \ : \ \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C}^n). \tag{7}$$

Le equazioni di convoluzione alle quali noi siamo interessati sono dunque del tipo

$$\mu * f = 0,$$

(ci interessa cioé studiare il nucleo dell'applicazione (7)).

Osserviamo che, naturalmente, le equazioni lineari alle derivate parziali e con coefficienti costanti, sono un caso particolare di equazioni di convoluzione, ed appaiono quando μ è data da una combinazione lineare (finita) della δ e delle sue derivate; la definizione che abbiamo dato per il caso di funzioni intere, è inoltre immediatamente generalizzabile ad altri spazi ($\mathcal{H}(\Omega)$, con Ω aperto convesso di $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}(\Omega)$, con Ω un aperto convesso di $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, etc.).

Il fatto chiave che rende interessanti tali equazioni (almeno dal nostro punto di vista) è che è possibile dimostrare un Principio Fondamentale per equazioni di convoluzione, nello stesso spirito di quello dimostrato da Ehrenpreis. Questo fatto cruciale, e non banale, appare per la prima volta in [20], per gli spazi $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, ed è poi esteso a sistemi rettangolari di equazioni e ad altri spazi in [13], [15], [18], [75], [89]. Se, in particolare, si considera l'equazione

$$\mu * f = 0,$$

o il sistema

$$\mu_1 * f = \cdots = \mu_m * f = 0,$$

allora le rappresentazioni integrali per le soluzioni hanno frequenze contenute, rispettivamente, nelle varietá analitiche

$$\{z \in \mathbb{C}^n \mid \hat{\mu}(z) = 0\}$$

e

$$\{z \in \mathbb{C}^n \mid \hat{\mu}_1(z) = \cdots = \hat{\mu}_m(z) = 0\},$$

dove $\hat{\mu}$ e $\hat{\mu}_j$ indicano, rispettivamente, le trasformate di Fourier–Borel dei funzionali analitici μ, μ_j, definite da

$$\hat{\mu}(z) = < \mu, \xi \longrightarrow \exp(iz \cdot \xi) >;$$

vale la pena di ricordare che, se $\mu \in \mathcal{H}'(\mathbb{C}^n)$, la sua trasformata $\hat{\mu}$ è una funzione intera di tipo esponenziale (teorema di Borel–Polya–Ehrenpreis–Martineau), e cioé esistono costanti positive A, B tali che

$$|\hat{\mu}(z)| \leq A \exp((B|z|), \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}^n.$$

Formuliamo dunque ora un teorema di rappresentazione per funzioni olomorfe (non necessariamente intere) soluzioni di opportuni sistemi di equazioni di convoluzione; premettiamo qualche nozione che ci sará necessaria nel seguito. Come è noto, un funzionale analitico $\mu \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ si dice supportato [1] da un compatto convesso K se, per ogni intorno aperto Ω di K, esiste una costante positiva C_Ω, tale che, per ogni funzione f olomorfa in Ω,

$$| < \mu, f > | \leq C_\Omega \sup_K |f|.$$

Si dice allora che K è un supporto di μ; notiamo che tale supporto non è, in generale, unico e non esiste sempre un minimo supporto. Osserviamo infine che, in vista della (7), se Ω è un aperto convesso, e se K è un supporto di $\mu \in \mathcal{H}'(\mathbb{C}^n)$, allora

$$\mu * \ : \ \mathcal{H}(\Omega + K) \longrightarrow \mathcal{H}(\Omega).$$

Un famoso controesempio di Gurevich [40], mostra che non ci si puó attendere, in generale, un Principio Fondamentale per sistemi di equazioni di convoluzione, se non si richiede qualche ipotesi aggiuntiva sui convolutori impiegati. In [20], il tipo di ipotesi che è sufficiente (e, sostanzialmente, necessario) è finalmente esplicitato ed una m–upla $(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ che soddisfi tali ipotesi è detta *lentamente decrescente* (slowly decreasing). La definizione precisa è troppo complessa per essere qui riportata (anche perché varia a seconda degli spazi che si considerano), ma richiede (grosso modo), che l'insieme dei punti di $\mathbb{C}^n$ nei quali le funzioni $|\hat{\mu}_1|, \ldots, |\hat{\mu}_m|$ $(1 \leq m \leq n)$ sono simultaneamente piccole sia, a sua volta, abbastanza piccolo (cfr. [75] per la nozione precisa che interessa a noi). Passiamo dunque al teorema di rappresentazione (cfr. [75]), che formuliamo nel caso $m = n$:

TEOREMA 3.1. *Sia Ω un aperto convesso di $\mathbb{C}^n$ e siano $\mu_1, \ldots, \mu_n$ dei funzionali analitici tali che, per qualche compatto convesso K in $\mathbb{C}^n$, si abbia*

$$ch(supp\ \mu_j) = K \quad j = 1, \ldots, n.$$

Allora una funzione $f \in \mathcal{H}(\Omega + K)$ è soluzione del sistema

$$\mu_1 * f = \cdots = \mu_n * f = 0$$

---

1 In inglese, si usa qui la parola "carried" invece di "supported", per motivi che verranno spiegati in breve.

se, e solo se, f ammette una rappresentazione, convergente in $\Omega + K$,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\sum_{j=1}^{J_k} c_j(z) \exp(i\alpha_j \cdot z) \Big), \tag{8}$$

dove i c_j sono polinomi, le frequenze α_j appartengono alla varietá caratteristica

$$V_j = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \hat{\mu}_1(z) = \ldots = \hat{\mu}_n(z) = 0\},$$

e gli insiemi J_k sono insiemi di cardinalitá finita.

Per certi versi puó essere piú importante riformulare tale risultato in forma meno esplicita (il cosiddetto Principio Fondamentale, per l'appunto); a tale scopo introduciamo alcune notazioni: con Ω e K come sopra, $\mathcal{H}'(\Omega)$, $\mathcal{H}'(\Omega + K)$ sono, rispettivamente, gli spazi duali di $\mathcal{H}(\Omega)$ e di $\mathcal{H}(\Omega + K)$, mentre $\widehat{\mathcal{H}}'(\Omega)$, $\widehat{\mathcal{H}}'(\Omega + K)$ denotano gli spazi delle funzioni intere che sono trasformate di Fourier Borel di elementi in $\mathcal{H}'(\Omega)$ ed in $\mathcal{H}'(\Omega + K)$. Una versione piú precisa del teorema di Borel–Polya–Ehrenpreis–Martineau ci dice che tali spazi si possono caratterizzare in termini di precise condizioni di crescita: si ha infatti che, se U è un aperto convesso di $\mathbb{C}^n$, una funzione F intera appartiene a $\widehat{\mathcal{H}}'(U)$ se, e solo se, esiste un compatto convesso $T \subset U$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una costante A_ε positiva tale che

$$|F(z)| \leq A_\varepsilon \exp(H_T(z) + \epsilon|z|),$$

dove $H_T(z) = \sup_T Re(z \cdot \xi)$ è la funzione supporto di T. Se V è una varietá analitica in $\mathbb{C}^n$, si puó allora considerare la restrizione $\rho_V(F)$ a V di una funzione intera F e si definisce [2] $\hat{\mathcal{H}}'_U(V)$ lo spazio $\rho_V(\hat{\mathcal{H}}'(U))$; è necessario tuttavia ricordare che la restrizione ρ_V in questo caso, tiene conto della *molteplicitá* della varietá V (cioé dell'ideale generato da $\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_n$ ed associato alla varietá V).

Teorema 3.2. *Con le ipotesi e le notazioni precedenti, si ha la seguente catena di isomorfismi topologici:*

$$\{f \in \mathcal{H}(\Omega + K) \mid \mu_1 * f = \ldots = \mu_n * f = 0\}$$

---

2 Anche qui, come nel caso delle funzioni a lenta decrescenza, rimandiamo a [14], [75] il lettore che desideri una definizione precisa.

$$\cong \left\{ \frac{\widehat{\mathcal{H}}'(\Omega+K)}{\hat{\mu}_1 \cdot \hat{\mathcal{H}}'(\Omega) + \cdots + \hat{\mu}_n \cdot \hat{\mathcal{H}}'(\Omega)} \right\}'$$
$$\cong \left\{ \widehat{\mathcal{H}}'_{\Omega+K}(V) \right\}'.$$

Osserviamo che, in realtá, il Teorema 3.1 segue dal Teorema 3.2 e dal teorema di dualitá di Riesz, una volta che lo spazio $\widehat{\mathcal{H}}'_{\Omega+K}(V)$ sia stato descritto in maniera esplicita come uno spazio di funzioni olomorfe.

I risultati che abbiamo appena citato ci mostrano in che modo si possano finalmente considerare le serie di esponenziali come casi particolari di soluzioni di equazioni di convoluzione, e non piú come serie di soluzioni di equazioni differenziali. Il teorema 3.2, in particolare, ci mostra come tutta la struttura dello spazio delle soluzioni di un dato sistema di equazioni di convoluzione sia *concentrata* sulla varietá V (un analogo risultato, per il caso di equazioni differenziali con coefficienti variabili, è il contenuto del famoso teorema fondamentale di Sato [16]), [56], [49]).

Prima di passare ai paragrafi successivi nei quali mostreremo alcune applicazioni concrete di queste idee, concludiamo con un caso particolare, ma molto significativo di equazioni di convoluzione.

Consideriamo un funzionale analitico $\mu \in \mathcal{H}'(\mathbb{C}^n)$, e supponiamo che μ sia supportato dall'origine $\{0\}$ di $\mathbb{C}^n$; si puó allora mostrare che $\hat{\mu}(z)$ è una funzione intera di tipo infraesponenziale, e cioé tale che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una costante $A_\varepsilon > 0$, tale che

$$|\hat{\mu}(z)| \leq A_\varepsilon \exp(\varepsilon|z|). \tag{9}$$

L'operatore di convoluzione $\mu*$ é ora suscettibile di una interpretazione molto particolare; sia infatti (consideriamo, per semplicitá, il caso $n = 1$)

$$\hat{\mu}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n;$$

allora i coefficienti $\{a_n\}$ soddisfano alcune condizioni specifiche (conseguenza della (9)) che implicano che se f è una funzione intera, allora

$$\mu * f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f^{(n)}(z) \tag{10}$$

è, pure, una funzione intera. Per questo motivo, tali operatori di convoluzione sono anche noti con il nome di operatori differenziali di ordine infinito.

Osserviamo incidentalmente che una costruzione analoga sarebbe priva di senso nel caso di convoluzioni di distribuzioni in $\mathbb{R}^n$; infatti se $\mu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ è una distribuzione a supporto compatto, e se tale supporto è l'origine, allora μ è una combinazione lineare finita della δ e delle sue derivate, e quindi $\mu *$ non è altro che un classico operatore differenziale di ordine finito (lineare a coefficienti costanti).

Gli operatori descritti dalla (10), d'altro canto, giocano un ruolo non irrilevante nello studio della cosiddetta *Infinite Analysis*, la cui creazione, in uno spirito che risale ai lavori di Eulero, è stata energicamente intrapresa dalla scuola giapponese di Sato, Kashiwara, Kawai (si veda, ad esempio [56]). Tra i motivi dell'importanza di tali operatori, deve essere notato il fatto che essi agiscono come *omomorfismi di fasci* sui fasci $\mathcal{O}$, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dei germi di funzioni olomorfe, analitiche reali e di iperfunzioni (nulla di analogo, come è noto, vale per il caso di $\mathcal{E}$ e di $\mathcal{D}'$).

4. Teoremi di Fabry e serie di Dirichlet

In questo paragrafo descriviamo alcune applicazioni degli operatori differenziali di ordine infinito allo studio dei fenomeni di overconvergenza menzionati in precedenza. Iniziamo dunque con il Teorema di Fabry; come è stato provato in [75] da Meril e Struppa, se $\mu \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ è lentamente decrescente e se $f \in \mathcal{H}(\Pi_+)$ soddisfa l'equazione $\mu * f = 0$, allora f ammette una rappresentazione integrale come in (8); incidentalmente, si puó osservare che, se considerata con attenzione, la richiesta che μ sia lentamente decrescente è equivalente ad una condizione di *lacunaritá* sulla successione $\{z \in \mathbb{C} \mid \hat{\mu}(z) = 0\}$.

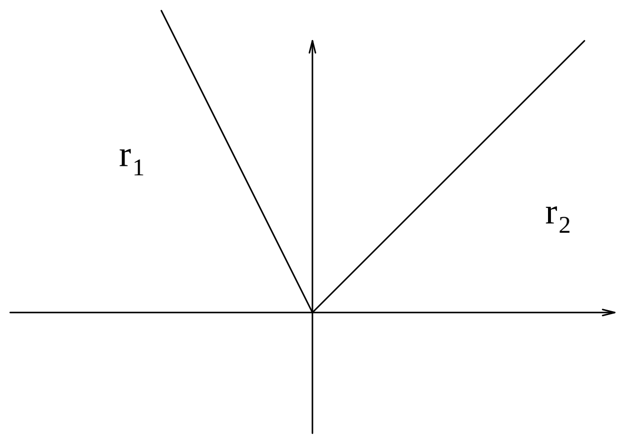
Ecco dunque che possiamo formulare l'idea che ci permetterá di estendere il lavoro di Ehrenpreis: consideriamo una funzione f in $\mathcal{H}(\Pi_+)$, dotata di una rappresentazione

$$f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} (\sum_{j=1}^{J_k} c_j(z) \exp(i\alpha_j \cdot z))$$

(le serie che appaiono nel Teorema di Fabry sono un caso molto particolare di questa serie, con $J_k = 1$ per ogni k, e con i polinomi

$c_j(z)$ costanti). Associamo ora alla successione $\{\alpha_j\}$, un funzionale $\mu \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$, per il quale $\{\alpha_j\}$ sia la successione degli zeri di $\hat{\mu}(z)$, considerata con le opportune molteplicitá, e tale quindi che $\mu * f = 0$. A questo punto il problema consiste nello studiare sotto quali condizioni la funzione f ammetta un prolungamento analitico, soluzione della stessa equazione.

Il primo caso che, naturalmente, si è portati a considerare, è quello in cui il funzionale analitico μ è supportato dall'origine (e quindi l'equazione di convoluzione non è altro che un'equazione differenziale di ordine infinito). In questa situazione Kawai, [16], [53], [54], consideró una serie di esponenziali $\sum c_j \exp(i\alpha_j \cdot z)$ convergente ad una funzione olomorfa f in un cono Γ come in figura:



Nell'ipotesi in cui sia possibile estendere f in maniera olomorfa ad un intorno dell'origine, Kawai cercó delle condizioni per estendere f ad un nuovo cono $\Gamma - i\delta$, per qualche $\delta > 0$. Il punto di vista di Kawai, appunto, fu quello di richiedere che gli α_j fossero gli zeri di una funzione intera di tipo infraesponenziale, in maniera che valesse

$$P(D)f = 0,$$

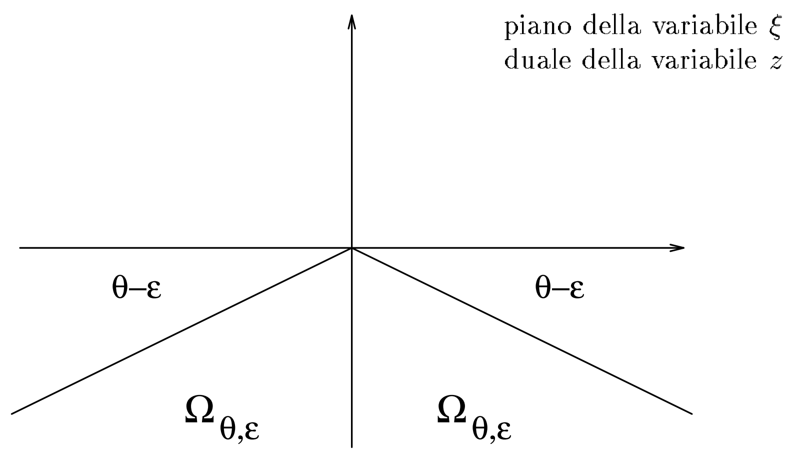
con $P(D)$ un operatore differenziale di ordine infinito. A questo punto, sfruttando la teoria generale sviluppata sostanzialmente da Kashiwara e da Schapira in [48], e richiedendo che gli α_j rendessero le direzioni r_1 e r_2 non caratteristiche per $P(D)$, Kawai fu in grado di ottenere l'estensione richiesta. Questo risultato è di grande interesse perché fornisce un primo, significativo miglioramento delle idee di

Ehrenpreis e poiché dimostra la grande forza dell'Analisi Microlocale in questo tipo di problemi. La maggiore limitazione di questo lavoro (intrinsecamente legata ai metodi utilizzati) consiste peró nel fatto che l'operatore di convoluzione considerato è di un tipo molto particolare, e non esistendo una trattazione generale delle equazioni di convoluzione alla Kashiwara–Schapira, non appare chiaro come questa limitazione possa essere superata. Nel lavoro [14], finalmente, il processo di estensione è trattato per un generico operatore di convoluzione (purché lentamente decrescente), utilizzando proprio il teorema 3.2, ed una precisa rappresentazione topologica di $\hat{\mathcal{H}}'_{\Pi_+}(V)$.

Si puó infatti osservare che se Γ_θ è il cono $\Gamma_\theta = \{\xi : \frac{\pi}{2}\theta < \xi < \frac{\pi}{2} + \theta\}$, e se $V = \{z \in \mathbb{C} \mid \hat{\mu}(z) = 0\}$, allora la topologia degli spazi

$$\hat{\mathcal{H}}'_{\Pi_+}(V) \qquad \text{e} \qquad \hat{\mathcal{H}}'_{\Gamma_\theta}(V) \tag{11}$$

è molto simile. In particolare, i due spazi coincidono, e le due topologie sono equivalenti, se, per qualche $\varepsilon > 0$, la varietá V non interseca una "regione caratteristica" $\Omega_{\theta,\varepsilon} = \{\xi \mid \pi + \theta - \varepsilon \leq arg\xi \leq 2\pi - \theta + \varepsilon\}$.



Poiché gli spazi indicati in (11) sono, per il teorema 3.2, gli spazi delle soluzioni dell'equazione $\mu * f = 0$ in Π_+ e in Γ_θ, è possibile dimostrare il seguente risultato:

Teorema 4.1. *Sia $f \in \mathcal{H}(\Gamma_\theta)$, $\mu \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$, lentamente decrescente, tale che $\mu * f = 0$, e supponiamo che f si estenda olomorficamente ad un intorno dell'origine. Se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $V \cap \Omega_{\theta,\varepsilon} = \emptyset$,* *allora esiste* $\delta > 0$ *tale che* f *si estende ad una funzione olomorfa in* $\Pi_+ - i\delta$ *e tale estensione soddisfa la stessa equazione di convoluzione.*

Osservazione 4.2. i) Per come il teorema 4.1 è stato formulato, le serie di esponenziali non compaiono esplicitamente ma, come abbiamo visto con il teorema 3.1, il fatto che f soddisfi l'equazione $\mu * f = 0$ in realtá implica che f ha una siffatta rappresentazione di Fourier. In particolare, il teorema 4.1 ci permette di trattare serie come in (8), che sono molto piú generali di quelle che compaiono nel teorema di Fabry.
ii) Un secondo, importante, aspetto del teorema 4.1 è il fatto che, per il tipo di tecniche utilizzate, non c'è in realtá alcuna differenza sostanziale tra il caso di una variabile e quello di piú variabili. Questo significa che è possibile trattare serie di esponenziali in $\mathbb{C}^n$, a patto di considerarle come soluzioni di sistemi lentamente decrescenti di equazioni di convoluzione (genericamente, infatti, la varietá $V = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \hat{\mu}_1(z) = \ldots = \hat{\mu}_n(z) = 0\}$ è discreta, e lo è certamente se il sistema $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ è lentamente decrescente). Le difficoltá tecniche collegate a questa estensione sono risolte in [15], al quale rimandiamo il lettore interessato.
iii) La linea di ragionamento che abbiamo indicato per la dimostrazione del teorema 4.1 permette di prefigurare una teoria per la *propagazione della regolaritá* per soluzioni di equazioni di convoluzione, che permetta di estendere a queste equazioni, almeno parzialmente, la teoria di Kashiwara e Schapira. I primi risultati in questa direzione sono contenuti in [76]. Recentemente, in [58], Kawai e Struppa hanno mostrato come applicare dimostrazioni di questo tipo per fornire una nuova interpretazione dei fenomeni di "overconvergenza" descritti da Ostrowski e da Bernstein [21]. La necessitá di usare la convergenza con "groupings" nella (8) acquista ora una nuova rilevanza ed un nuovo significato.

Veniamo ora ad un secondo tema, al quale, pure, è possibile applicare queste tecniche. Vogliamo accennare qui alle cosiddette *classi quasi–analitiche di funzioni*. I nomi che spontaneamente si associano a questo termine sono quelli di Turán, Mandelbrojt, Beurling, Denjoy e Carleman ([28], [22], [23], [67], [8], [93]).

Il concetto generale sul quale queste classi si basano puó essere grossolanamente espresso come segue; sia X uno "spazio di funzioni",

e sia $\mathcal{P}$ una "condizione di annullamento": il "Teorema" che si vuole dimostrare è il seguente: *se* $f \in X$ *e soddisfa* $\mathcal{P}$*, allora* $f \equiv 0$.
Alcuni esempi classici chiariranno questa descrizione:

ESEMPIO 4.1. Sia X lo spazio $\mathcal{E}_B(\mathbb{R})$ delle funzioni ultradifferenziabili alla Beurling; questo significa che viene data una successione crescente di numeri positivi $B = \{b_j\}$, e le funzioni di $\mathcal{E}_B(\mathbb{R})$ sono funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ le cui derivate soddisfano precise condizioni di crescita determinate dalla successione B (il lettore è invitato a consultare [25], per una descrizione precisa di tali spazi). In questo caso, la proprietá $\mathcal{P}$ consiste nella richiesta che una funzione si annulli, insieme a tutte le sue derivate, nell'origine di $\mathbb{R}$. Si ha allora il famoso Teorema di Denjoy–Carleman, il quale risolve il problema della quasi–analiticitá dello spazio $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ come segue: *Ogni funzione* $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ *tale che* $f^{(j)}(0) = 0$ *per ogni* j *si annulla identicamente se e solo se* $\sum b_j^{-1/j} = \infty$.

ESEMPIO 4.2. In questo caso, studiato originariamente da Turán [93], lo spazio X è essenzialmente lo spazio $\mathcal{E}$, ed f soddisfa $\mathcal{P}$ se e solo se $f(x) = O(\exp(-|x|^{-p}))$, quando $x \to 0$. Turán dimostró che, per un opportuno sottospazio X di $\mathcal{E}$, si puó mostrare che se $f \in X$ e soddisfa $\mathcal{P}$, allora $f \equiv 0$. Il lettore familiare con le classi quasi–analitiche di Beurling noterá che l'esempio 4.1 è, in un certo senso, un caso particolare di questo esempio, poiché richiedere $f^{(j)}(0) = 0$ per ogni j è, in realtá, equivalente a richiedere $f(x) = O(x^j)$ per ogni j, quando x tende a zero.

ESEMPIO 4.3. Quest' ultimo esempio è dovuto a Mandelbrojt; in questo caso X è il sottospazio di $L^1[0, 2\pi]$ i cui elementi ammettono una rappresentazione del tipo

$$\sum_{j=0}^{+\infty} c_j \exp(i\alpha_j x),$$

mentre la proprietá $\mathcal{P}$ consiste nell'esistenza di un punto x_0 in $[0, 2\pi]$ nel quale f ha uno zero in media[3] di ordine esponenziale ρ. Mandelbrojt, in [67] dimostró che se $f \in X$ e soddisfa $\mathcal{P}$, e se esiste $\sigma < 1$, $\rho > \sigma/(1-\sigma)$, tale che, per ogni $\varepsilon > 0$

$$\sum a_j^{-\sigma-\varepsilon} < +\infty, \qquad \sum a_j^{-\sigma+\varepsilon} = +\infty$$

3 Definizioni e notazioni precise possono essere trovate in [67].

allora $f \equiv 0$.

Il lettore non avrá difficoltá ad osservare che tutti gli esempi precedenti possono essere inclusi nel nostro schema generale. Per chiarire ulteriormente questo punto, citiamo un teorema da [90], nel quale le notazioni sono quelle giá utilizzate per il Teorema 4.1.

TEOREMA 4.3. *Sia f una iperfunzione su $\mathbb{R}$, che possiamo rappresentare come differenza dei valori al bordo di due funzioni $F^+ \in \mathcal{H}(\Pi_+)$ ed $F^- \in \mathcal{H}(\Pi_-)$: $f = \partial^+ F^+ - \partial^- F^-$. Se esiste $\mu \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$ tale che*

$$\mu * F^+ = 0$$

e se, per qualche $\varepsilon > 0$ e $\theta \in (0, \pi/2)$,

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \hat{\mu}(z) = 0\} \cap \Omega_{\theta,\varepsilon} = \emptyset,$$

allora f è analitica reale in un intorno dell'origine di $\mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE 4.4. La dimostrazione di questo risultato è essenzialmente una conseguenza del Teorema 3.2 e delle tecniche illustrate per il Teorema 4.1.

Passiamo ora ad un terzo esempio che vorremmo descrivere in questo paragrafo e che, in un certo senso, è il piú significativo, anche in vista di ulteriori sviluppi. Intendiamo riferirci allo studio delle proprietá di convergenza e di crescita delle serie di Dirichlet (testi standard e classici in questa direzione sono quelli di V. Bernstein [21] e di S. Mandelbrojt [70]).

Consideriamo una serie del tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \exp(-\lambda_n z), \qquad z \in \mathbb{C} \tag{12}$$

come funzione della variabile complessa z. Come è noto, si dice che la successione $\{\lambda_n\}$ ha *densitá finita* $D \geq 0$ se esiste una funzione intera g tale che $\{\lambda_n\} = \{z \in \mathbb{C} \mid g(z) = 0\}$ e D è il piú piccolo numero non negativo tale che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $A_\varepsilon > 0$ tale che

$$|g(z)| \leq A_\varepsilon \exp((D + \varepsilon)|z|).$$

OSSERVAZIONE 4.5. Il caso in cui $D = 0$ ci porta a considerare una funzione g di tipo infraesponenziale, e si ha allora che la serie di Dirichlet (12) appare come soluzione di un'equazione differenziale di ordine infinito. Piú in generale, e cioé per $D > 0$, si ha che g è (in virtú del Teorema di Polya) la trasformata di Fourier–Borel di un funzionale analitico in $\mathcal{H}'(\mathbb{C})$; si vede dunque che, in questo caso, lo studio delle proprietá di convergenza delle serie di Dirichlet puó essere visto come un caso particolare della generalizzazione del Teorema di Fabry che abbiamo discusso in precedenza.

È tuttavia noto che lo studio delle serie di Dirichlet con successione delle frequenze a densitá finita è ormai abbastanza completo, mentre i casi piú significativi ed interessanti si presentano quando la successione $\{\lambda_n\}$ è di densitá infinita (cioé quando è la successione degli zeri di una funzione intera a crescita piú che esponenziale).

L'esempio forse piú significativo è quello che si ottiene prendendo $\lambda_n = \ln(n)$. In questo caso si possono considerare varie serie, tra le quali la funzione ζ di Riemann (scegliamo qui la s come variabile complessa, per rispetto della tradizione)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s},$$

nella quale, appunto, la successione λ_n delle frequenze ($n^{-s} = \exp(-s\,(\ln n))$ non puó essere (si veda ad esempio [62]) la successione degli zeri di una funzione in Exp ($\mathbb{C}$); si puó, in particolare, vedere che una funzione la cui successione degli zeri sia $\lambda_n = \ln n$ ha crescita del tipo $\exp(\exp(|z|))$.

Prima di esaminare con maggiore attenzione il caso della ζ di Riemann, poniamo il problema di come si possano studiare, in generale, queste serie collegate a funzioni di crescita rapida. L'idea piú naturale consiste nel rimpiazzare $\mathcal{H}(\Pi_+)$ e $\mathcal{H}(\Gamma)$ con spazi di funzioni olomorfe soddisfacenti opportune condizioni di crescita. Se allora $p(z)$ è una *funzione peso* in $\mathbb{C}$ (cioé una funzione subarmonica soddisfacente alcune condizioni tecniche [47]), si puó considerare, per un dato cono Γ in $\mathbb{C}$ con vertice nell'origine, lo spazio

$$\mathcal{H}_p(\Gamma) := \{f \in \mathcal{H}(\Gamma) \mid \ \forall \Gamma' \subset\subset \Gamma, \forall \varepsilon > 0, \exists C_{\varepsilon,\Gamma'} > 0 \\ \text{tale che} |f(z)| \leq C_{\varepsilon,\Gamma'} \exp(\varepsilon p(z))\};$$

esempi significativi di pesi si hanno prendendo $p(z) = |z|$, $|z|^\rho$ o, infine, $\exp(|z|)$.

Poiché $\mathcal{H}_p(\Gamma)$ è un sottospazio denso di $\mathcal{H}(\Gamma)$, si possono considerare i duali $\mathcal{H}'(\Gamma)$ e $\mathcal{H}'_p(\Gamma)$ per i quali vale quindi l'iniezione

$$\mathcal{H}'(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{H}'_p(\Gamma).$$

Si puó allora pensare agli oggetti di $\mathcal{H}'_p(\Gamma)$ come ad una generalizzazione dei funzionali analitici al caso in cui questi non abbiano necessariamente supporti compatti. Possiamo dunque studiare nuovi sistemi di equazioni di convoluzione del tipo

$$\mu * f = 0$$

o

$$\mu_1 * f = \ldots = \mu_n * f = 0,$$

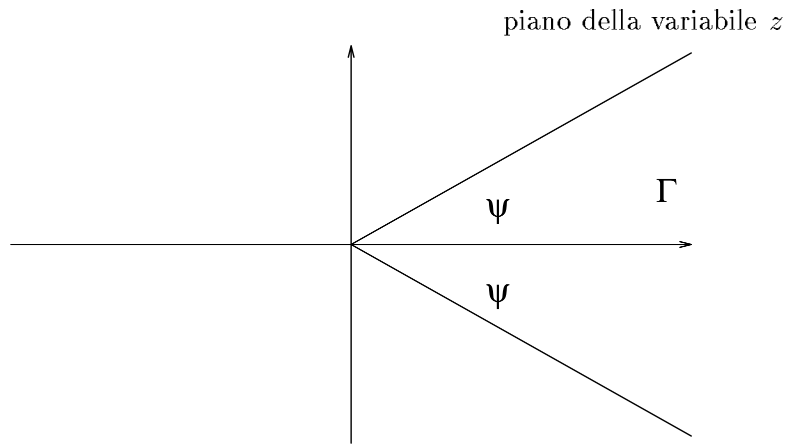
dove ora i convolutori appartengono a $\mathcal{H}'_p(\Gamma)$ e f deve essere presa in $\mathcal{H}_p(\Gamma)$. Quello che qui interessa è il fatto che, per i "funzionali" in $\mathcal{H}'_p(\Gamma)$, è possibile definire una trasformazione di Fourier in modo che se $\mu \in \mathcal{H}'_p(\Gamma)$, allora $\hat{\mu}$ è una funzione intera che soddisfa precise condizioni di crescita, essenzialmente determinate dal peso $p(z)$, e dal cono Γ.

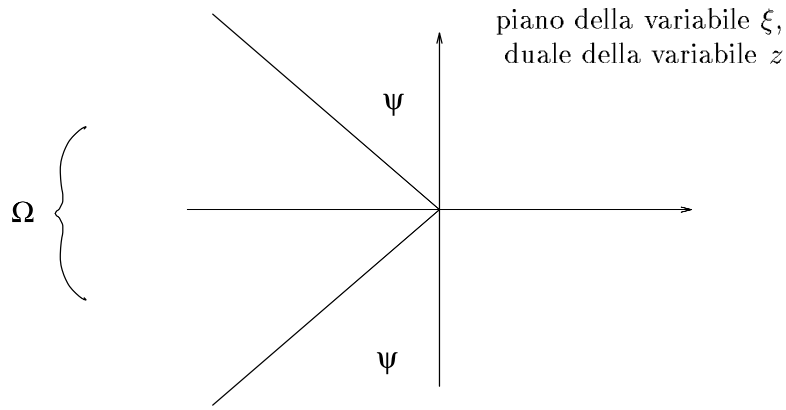
Tutta la teoria necessaria al trattamento di questi problemi, è sviluppata in [15], sotto l'importante ipotesi tecnica che si abbia $p(2z) = O(p(z))$ (ipotesi che ovviamente limita la crescita di $p(z)$).

In particolare, si è in grado di ricostruire, per questi spazi, una teoria dell'interpolazione piuttosto completa e, come conseguenza, una teoria delle equazioni di convoluzione in questi spazi. Gli argomenti descritti in precedenza, permettono infine di ottenere vari risultati nello spirito di un *Teorema di Fabry con condizioni di crescita.*

Per comunicare al lettore lo spirito di questi risultati, concludiamo questo paragrafo citandone due, che valgono, ad esempio, per $p(z) = |z|^\rho$, $\rho > 1$.

TEOREMA 4.6. *Siano* Γ *e* Ω *le regioni di* $\mathbb{C}$ *indicate in figura:*





consideriamo la serie di Dirichlet generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m_n} c_{n,j}(z)\exp(-\lambda_n z)\right),$$

nella quale i $c_{n,j}$ *sono polinomi ed i* λ_n *sono gli zeri della trasformata di Fourier–Borel di un funzionale* $\mu \in \mathcal{H}'_p(\Gamma)$. *Allora, se* $\{\lambda_n\} \cap \Omega$ *ha cardinalitá finita, la serie converge in* $\mathcal{H}_p(\mathbb{C})$.

TEOREMA 4.7. *Sia* $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re ez > 0\}$ *e sia* $\mu \in \mathcal{H}'_p(\Pi^+)$ *tale che la successione* $\{\lambda_n\}$ *degli zeri di* $\hat{\mu}$ *sia interpolante*[4] *per* (Π^+, p). *Allora se la serie di Dirichlet*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \exp(-\lambda_n z)$$

converge, uniformemente sui compatti di Π^+, *ad una funzione* f *che si estende ad una funzione intera in* $\mathcal{H}_p(\mathbb{C})$, *allora, per ogni* $B > 0$, *si ha che*

$$c_n = O(\exp(-B|\lambda_n|^\sigma)),$$

dove σ *soddisfa l'equazione* $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\sigma} = 1$.

Vi sono, in realtá, molti problemi che rimangono aperti in questa direzione; il primo riguarda le serie di Dirichlet la cui crescita è controllata da funzioni peso $p(z)$ che non soddisfano la restrizione

$$p(2z) = O(p(z)). \tag{13}$$

Come abbiamo visto, la stessa funzione ζ di Riemann ci porta a considerare pesi del tipo $\exp(|z|)$, che chiaramente sfuggono alla (13). Per questi pesi una teoria dell'interpolazione non è ancora stata completata, anche se degli studi sono stati avviati; ma vediamo ora quali specifici risultati ci si possa attendere in questa direzione.

La prima osservazione consiste nel notare che la funzione $\zeta(s)$ non puó, cosí come è definita, rientrare nel nostro ambito di studio, poiché

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$$

presenta, in realtá, un polo per $s = 1$. Si puó allora considerare la nuova serie

$$\zeta_1(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^{-s} = (1 - 2^{1-s}) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s).$$

Si ha dunque una serie $\sum(-1)^n n^{-s}$ che converge solo in $\{s \in \mathbb{C} \mid \Re es$

4 Si veda [15] per la definizione precisa; si deve notare inoltre che in entrambi i teoremi, un'ipotesi di lenta decrescenza è necessaria su μ.

$> 1\}$, ma che si estende ad una funzione intera $\zeta_1(s)$.

D'altro canto, utilizzando l'equazione funzionale soddisfatta dalla $\zeta(s)$, si ottiene che la crescita di $\zeta_1(s)$, nel semipiano $\{s \in \mathbb{C} \mid \Re es > 1\}$, è limitata da $\exp(|s| \ln |s|)$. Si puó allora dimostrare [37], che vale il seguente risultato:

TEOREMA 4.8. *Si consideri una serie di Dirichlet del tipo $\sum a_n n^{-s}$, convergente in qualche semipiano ad una funzione $f(s)$ che puó essere continuata analiticamente a tutto $\mathbb{C}$ e che soddisfa, per qualche $\beta < 1$ sufficientemente piccolo*

$$|f(s)| \leq \exp(\beta |s| \ln |s|). \tag{14}$$

Allora, per qualche B positivo, si ha

$$a_n = O(\exp(-Bn)) = O(\exp(-\exp(B \ln n))).$$

OSSERVAZIONE 4.9. i) Si noti che la stima che si ottiene con questo teorema è, in realtá, una stima con doppio esponenziale, poiché le frequenze λ_n che compaiono nella serie sono i logaritmi degli interi naturali. ii) Teoremi di questo tipo possono certamente essere ottenuti con i nostri metodi, come è suggerito dal teorema 4.4.
iii) Il teorema precedente mostra, in realtá, che la ζ di Riemann puó essere caratterizzata da una proprietá di estremalitá, rispetto alla crescita che essa soddisfa.

Dal teorema 4.8 seguono naturalmente alcune domande, la cui risposta potrebbe fornire ulteriori informazioni sul comportamento della ζ. In particolare potrebbe essere interessante sostituire alla costante β che appare nella (14) una funzione $\beta = \beta(s)$ che converge in maniera monotona a 1. Questo problema, che se risolto porterebbe ad un raffinamento del risultato del teorema 4.8 , è probabilmente alla nostra portata, se si segue l'approccio indicato usando dei pesi opportuni.

Ancora piú interessante, come lo stesso Ehrenpreis ha recentemente suggerito, sarebbe lo studio di analoghi problemi qualora si considerino, invece delle serie di Dirichlet, le L–serie e le corrispondenti funzioni ζ. Tali funzioni soddisfano le cosiddette equazioni funzionali di Hecke, ed è possibile congetturare che, per pesi maggiori, tali serie soddisfino analoghe proprietá di estremalitá. (si veda ad esempio [37]). In questo caso, naturalmente, non è pensabile che si possano ottenere risultati, senza sfruttare le profonde relazioni che legano queste serie con la teoria dei numeri e, d'altro canto, è ragionevole sperare che i risultati ottenuti possano essere applicati a problemi aperti in teoria dei numeri (per un cenno ai risultati in questa direzione si veda [45]). Ci si puó infine spingere a considerare alcuni classici risultati di Hamburger [41] e di Beurling [24] sulla caratterizzazione della ζ, in base alla equazione funzionale che essa soddisfa, ed alle sue proprietá di crescita. Rinviamo il lettore interessato a [37], [18].

In questo momento, siamo impegnati nello sviluppo di nuovi metodi che ci permettano, appunto, di attaccare questi problemi nei quali appaiono pesi di rapida crescita. In questa direzione, una strada promettente sembra consistere nello sviluppo di una teoria per fasci di funzioni olomorfe soddisfacenti opportune condizioni di crescita. Tali fasci, naturalmente, non possono essere definiti su $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$, ma è necessario considerare opportune compattificazioni (toroidali, coniche, etc.) di tali spazi (si veda, a questo proposito, [18] e [30]). È poi possibile dimostrare (seguendo idee originariamente sviluppate da Kawai in [50]) come la coomologia di tali fasci sia, per opportuni aperti, banale, e come questo si possa utilizzare per studiare equazioni di convoluzione in questi spazi. Recentemente, in [9] abbiamo dimostrato come questi fasci possano essere utilizzati per la costruzione di una nuova teoria quantistica dei campi.

In questo momento non è possibile garantire il successo di questi metodi, ma sembra che la strada seguita sia promettente, e speriamo quindi di tornare presto sull'argomento.

5. Analisi di Fourier del sistema di Cauchy–Fueter

Nell'introduzione abbiamo accennato al fatto che problemi di rimozione delle singolaritá e di propagazione della regolaritá sono studiabili in maniera naturale con i mezzi propri dell'Analisi di Fourier.

In questo paragrafo mostreremo come si possa risolvere il problema dell'eliminazione delle singolaritá compatte di una funzione regolare di piú variabili quaternioniche, e quindi dimostrare un teorema analogo a quello di Hartogs (per le funzioni olomorfe di piú variabili). Piú in generale mostreremo come affrontare il problema dell'Analisi di Fourier di un sistema di equazioni differenziali con coefficienti costanti. Osserviamo in particolare che il teorema di Hartogs nel caso quaternionico era giá stato provato da Pertici in [79] con tecniche simili a quelle del caso complesso. Nel nostro caso il teorema è un immediato corollario di un risultato di caratterizzazione di un'ampia classe di sistemi di equazioni differenziali le cui soluzioni hanno singolaritá compatte eliminabili.

Il punto di partenza per studi di questo tipo è stato il lavoro di Bochner, [27], in cui, per la prima volta, si suggerisce il fatto che il teorema di Hartogs puó essere visto nell'ambito dei sistemi sovradeterminati di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali. É di Ehrenpreis (si veda [36]), l'estensione dei risultati di Bochner, validi solo per particolari sistemi ellittici, al caso di sistemi generici, sovradeterminati, in una sola funzione incognita.

Vale la pena illustrare brevemente la dimostrazione di Ehrenpreis per mettere in evidenza quali sono stati i punti cruciali del ragionamento seguito e quali possono essere le possibili generalizzazioni.

Le ipotesi di Ehrenpreis sugli aperti in gioco sono abbastanza complicate quindi ci accontenteremo di una descrizione sommaria delle sole richieste necessarie per il seguito del nostro discorso. Siano quindi Ω_1 e Ω_2 due aperti relativamente compatti di $\mathbb{R}^n$ tali che $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$, $\Omega_0 = \Omega_2 \backslash \Omega_1$. Siano $P_1, \ldots, P_r$, $r \leq 2$, dei polinomi in $\mathbb{C}^n$ e

$$D = \left(-i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -i\frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

dove $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{P}(D) = (P_1(D), \ldots, P_r(D))$. L'espressione $\vec{P}(D)f = 0$ indica quindi il sistema di equazioni $P_1(D)f = P_2(D)f = \ldots$
$= P_r(D)f = 0$.

Teorema 5.1. *Se i polinomi $P_1, \ldots, P_r$ non hanno fattori in comune allora ogni $f \in \mathcal{E}(\Omega_0)$ soddisfacente $\vec{P}(D)f = 0$ ha un'unica estensione $\tilde{f} \in \mathcal{E}(\Omega_2)$ con $\vec{P}(D)f = 0$ su Ω_2 e $f = \tilde{f}$ in $\Omega_2 \backslash (\Omega_1)_\varepsilon$, dove $(\Omega_1)_\varepsilon$ è un ε–intorno di Ω_1 e ε é piccolo a piacere.*

La dimostrazione si basa sul ragionamento seguente: sia $g \in \mathcal{E}(\Omega_2)$ una estensione qualsiasi di f. Posto $g_j = P_j(D)f$ si ha che per ogni coppia j, k

$$P_k(D)g_j = P_j(D)g_k\,; \tag{15}$$

infatti entrambi i membri uguagliano $P_k(D)P_j(D)g$ in Ω_0 e sono nulli altrove. Passando alle trasformate di Fourier si ha

$$P_k \hat{g}_j = P_j \hat{g}_k.$$

La funzione $H = \hat{g}_k / P_k$, che è indipendente da k, ha singolaritá nei punti che sono zeri comuni dei polinomi P_k. L'ipotesi del teorema implica che codim$\{z \in \mathbb{C}^n \ : \ P_1(D)f = \ldots = P_r(D)f = 0\} \geq 2$ e quindi H è intera; in virtú del lemma di Malgrange, si ha poi che H è la trasformata di Fourier di una funzione h di classe $\mathcal{C}^\infty$ avente supporto compatto. È chiaro che $P_k(D)h = g_k$, per ogni k. Posto $\tilde{f} = g - h$ si ha che questa è la richiesta estensione di f.

La tecnica di considerare una funzione $g \in \mathcal{E}(\Omega_2)$ e poi di "correggerla" mediante una funzione h in modo che $\vec{P}(D)(g-h) = 0$, nasconde in realtá un teorema di annullamento in coomologia. Infatti, utilizzando le notazioni precedenti, se $\tilde{g} = (g_1, \ldots, g_r)$ e se $P^*(D)$ è una matrice $s \times r$ di operatori differenziali le cui righe generano il modulo delle relazioni di $(P_1(D), \ldots, P_r(D))$, allora

$$P^*(D)\tilde{g} = 0,$$

che è esattamente la condizione (15). Il vettore $\tilde{g}$ puó essere pensato come un elemento di $H^1_c(\Omega_1, \mathcal{E}^{\vec{P}(D)})$ che, a sua volta, puó essere identificato con

$$\frac{Ker\{P^*(D) \ : \ \mathcal{D}^r(\Omega_1) \longrightarrow \mathcal{D}^s(\Omega_1)\}}{Im\{\vec{P}(D) \ : \ \mathcal{D}(\Omega_1) \longrightarrow \mathcal{D}^r(\Omega_1)\}}.$$

L'annullarsi di $H^1_c(\Omega_1, \mathcal{E}^{\vec{P}(D)})$ implica l'esistenza di $h \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ tale che $\tilde{g} = \vec{P}(D)h$ e l'estensione cercata è, come prima, $\tilde{f} = g - h$.

Tale annullamento é un fatto ovvio nel caso del sistema di Cauchy–Riemann, ovvero quando $\vec{P}(D) = \bar{\partial}$.

La trattazione coomologica (o meglio, algebrica) del teorema di Hartogs, almeno nel caso in cui $\vec{P}(D)$ è un vettore, é stata ulteriormente sviluppata da vari autori, tra cui citiamo Kaneko, Kawai e Palamodov (si veda [76] per una bibliografia piú completa). Il problema generale da essi trattato è il seguente:

> Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e $K \subset \Omega$ un compatto. Sia f una funzione (anche generalizzata) definita

> su $\Omega \backslash K$ che sia soluzione di un sistema sovradeterminato di equazioni
>
> $$T_1(f) = \ldots = T_r(f) = 0, \tag{16}$$
>
> dove i T_i sono opportuni operatori lineari e continui.
>
> Problema. Assegnare delle condizioni su $T_1, \ldots, T_r$ affinché f possa essere estesa ad una funzione (generalizzata) $\tilde{f}$ definita su Ω e soddisfacente lo stesso sistema.

Il problema è stato risolto nel caso in cui f sia una funzione $\mathcal{C}^\infty$, una (ultra)distribuzione, un'iperfunzione e gli operatori T_i siano operatori differenziali (anche di ordine infinito) o di convoluzione.

La naturale generalizzazione del problema precedente è quella di considerare il caso in cui il vettore $\vec{P}(D)$ venga sostituito da una matrice $r \times s$ di operatori differenziali $P(D)$ e la funzione f con vettore $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_s)$. Si puó provare che la seguente condizione (EXT), dovuta a Malgrange, permette di dedurre l'esistenza di un vettore $\vec{H}$ di funzioni intere tali che $\hat{\vec{g}} = [P_{ij}(z)] \cdot \vec{H}(z)$ e quindi generalizza l'ipotesi del Teorema 5.1.

> (EXT) Per ogni matrice $[P^*_{h,k}]$ che genera il modulo delle relazioni delle righe di $[P_{ij}]$, $[P_{ij}]$ genera il modulo delle relazioni di $[P^*_{h,k}]$.

L'articolo [76] è uno dei primi lavori in questa direzione, ed è senz'altro quello che assegna condizioni soddisfacenti ai fini di garantire la validitá di un'ipotesi che sia operativa e che generalizzi la (α). Proprio in [76] si sottolinea il fatto che, in generale, non è necessario richiedere la validitá della condizione (EXT), in quanto basta l'esistenza di una matrice B di tipo $t \times q$ tale che la successione

$$\mathbb{C}[X]^s \xrightarrow{\hat{P}} \mathbb{C}[X]^r \xrightarrow{\hat{B}} \mathbb{C}[X]^t \tag{17}$$

sia esatta. Si noti che la condizione (EXT) è equivalente all'esattezza della (17) quando $\hat{B}$ è la matrice che genera il modulo delle relazioni di $\hat{P}$.

Con queste premesse arriviamo al caso delle funzioni regolari di variabile quaternionica. Indichiamo con $\mathbb{H}$ l'algebra non commutativa dei quaternioni, munita della base standard $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$. Denoteremo con $q = x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = \sum x_ie_i$ un elemento di $\mathbb{H}$ e con $q = (q_1, \ldots, q_n)$ un elemento di $\mathbb{H}^n$, dove $q_t = \sum_{j=0}^{3} x_{it} e_i$. Sia $U \subset \mathbb{H}^n$ un aperto e $f : U \longrightarrow \mathbb{H}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$. La funzione f è detta *regolare (a sinistra)* se è regolare rispetto a ciascuna variabile q_t, ovvero

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_t} = \frac{\partial f}{\partial x_{0t}} + e_1 \frac{\partial f}{\partial x_{1t}} + e_2 \frac{\partial f}{\partial x_{2t}} + e_3 \frac{\partial f}{\partial x_{3t}} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

L'operatore $(\partial/\partial \bar{q}_1, \ldots, \partial/\partial \bar{q}_n)$, il cui nucleo è costituito dalle funzioni regolari, è detto operatore di Cauchy–Fueter. Lo spazio delle funzioni regolari (a sinistra) sull'aperto U è indicato con $\mathcal{R}(U)$. Il teorema 5.1 non è direttamente applicabile, in questo caso, in quanto la (15) non è valida, data la non commutativitá degli operatori $\partial/\partial \bar{q}_i$ e $\partial/\partial \bar{q}_j$. Riscriviamo allora il sistema di Cauchy–Fueter, sostituendo gli operatori $\partial/\partial \bar{q}_i$ con le loro controparti reali. Il sistema si potrá allora riscrivere nella forma

$$P\vec{f} = 0$$

dove $\vec{f} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$,

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix},$$

e

$$P_t = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_{0t} & -\partial/\partial x_{1t} & -\partial/\partial x_{2t} & -\partial/\partial x_{3t} \\ \partial/\partial x_{1t} & \partial/\partial x_{0t} & -\partial/\partial x_{3t} & \partial/\partial x_{2t} \\ \partial/\partial x_{2t} & \partial/\partial x_{3t} & \partial/\partial x_{0t} & -\partial/\partial x_{1t} \\ \partial/\partial x_{3t} & -\partial/\partial x_{2t} & \partial/\partial x_{1t} & \partial/\partial x_{0t} \end{bmatrix}.$$

P è una matrice $4n \times 4$ che mappa $[\mathcal{E}(\mathbb{R}^{4n})]^4$ in $[\mathcal{E}(\mathbb{R}^{4n})]^{4n}$. Consideriamo la trasformata di Fourier di P e la mappa indotta da

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}.$$

La verifica della non validitá della condizioni sufficiente per l'eliminazione delle singolaritá compatte citata in [76], è stata effettuata utilizzando il package di computer algebra CoCoA,[5] attraverso cui è stata verificata la non regolaritá di opportuni minori estratti da $\hat{P}$ giá nel caso $n = 2$.

Come abbiamo giá accennato, si puó indebolire l'ipotesi (EXT) richiedendo l'esattezza di (17) senza che $\hat{B}$ sia la matrice che genera il modulo delle relazioni di $\hat{P}$, come richiederebbe (EXT). Una notevole caratterizzazione delle matrici P come richiesto in (17) è stata data in [5] da Andreotti e Nacinovich:

PROPOSIZIONE 5.2. Data una matrice $\hat{P}$, esiste $\hat{B}$ tale che la (17) è esatta se e solo se il conucleo della mappa indotta da $\hat{P}$ non ha torsione.

Il problema di caratterizzare le matrici $\hat{P}$ tali che coker$(\hat{P})$ è privo di torsione è stato risolto, per matrici di rango massimo, in [1] dove è stata assegnata una condizione di facile verifica.
Sia dunque A una matrice $r \times s$ con $r \geq s$ su un dominio a fattorizzazione unica R. Vale il

TEOREMA 5.3. *Sia A di rango massimo. Allora coker(A) non ha torsione se e solo se i minori $s \times s$ estratti da A sono relativamente primi.*

Questo risultato è una buona generalizzazione dell'ipotesi del teorema 5.1 in quanto permette di dimostrare il seguente teorema di eliminazione delle singolaritá compatte:

TEOREMA 5.4. *Sia $P = [P_{ij}]$ una matrice $r \times s$ di polinomi in $\mathbb{C}^n$ con $1 \leq s \leq r$, $r \geq 2$, tale che coker (P) sia privo di torsione. Sia $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_r)$ un vettore di iperfunzioni su $\mathbb{R}^n$ tale che*

$$\sum_{j=1}^{s} P_{ij}(D) f_j = 0, \qquad i = 1, \ldots, r$$

(dove $D = (-i\partial/\partial x_1, \ldots, -i\partial/\partial x_n)$) su $\mathbb{R}^n \backslash K$, con K compatto di $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathbb{R}^n$ sia connesso. Allora esiste una s-upla $\vec{f^*} = (f_1^*, \ldots, f_s^*)$ di iperfunzioni su $\mathbb{R}^n$ tale che

$$f^*_{j|\mathbb{R}^n\backslash K} = f_j, \qquad j = 1, \ldots, s$$

5 CoCoA è un programma specifico per calcoli di Algebra Commutativa, ideato da un gruppo di ricercatori dell'Universitá di Genova.

e

$$\sum_{j=1}^{s} P_{ij}(D) f_j^* = 0, \qquad i = 1, \ldots, r$$

su tutto $\mathbb{R}^n$.

Il teorema di Hartogs per funzioni regolari di piú variabili quaternioniche (ma non solo!) puó essere allora ottenuto dal Principio Fondamentale di Ehrenpreis utilizzando il teorema 5.3.

TEOREMA 5.5. *Sia K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{H}^n$, $n > 1$ tale che $\mathbb{H}^n \setminus K$ sia connesso. Se $f \in \mathcal{R}(\mathbb{H}^n \setminus K)$ allora esiste $\tilde{f} \in \mathcal{R}(\mathbb{H}^n)$ tale che $\tilde{f}_{|\mathbb{H}^n \setminus K} = f$.*

Dimostrazione. Poiché P é un operatore ellittico si ha che $\mathcal{R} = \mathcal{B}^P$. Il risultato è dunque un corollario del teorema 5.4 in quanto la matrice $\hat{P}$ è tale che coker$(\hat{P})$ non ha torsione. Infatti $\hat{P}$ ha rango massimo e i minori 4×4 da essa estratti sono relativamente primi, in quanto coinvolgono insiemi diversi di variabili.

OSSERVAZIONE 5.6. Il carattere di generalitá dei risultati ottenuti ha permesso di provare altri risultati assolutamente nuovi. Ad esempio è stato possibile dimostrare, si veda [1], che il teorema di Hartogs vale anche nel caso di funzioni monogeniche di piú variabili in un'algebra di Clifford.
È assolutamente chiaro che il teorema di Hartogs non vale invece per funzioni di una sola variabile (complessa, quaternionica, o in un'algebra di Clifford) in quanto il sistema di Cauchy–Riemann e le sue generalizzazioni ai casi ipercomplessi non sono sovradeterminati, in questo caso. Accoppiando tali sistemi con un'equazione del tipo $p(\partial/\partial q)f = 0$, dove p è un polinomio non nullo a coefficienti complessi, si ottiene ancora un sistema sovradeterminato soddisfacente il teorema 5.3 (si veda [2]). Si puó concludere che le funzioni regolari (o monogeniche) di una sola variabile soddisfacenti una classe abbastanza ampia di equazioni differenziali non possono avere singolaritá compatte.

L'uso di CoCoA è stato indispensabile non solo per effettuare le laboriose verifiche di cui abbiamo giá parlato prima, ma anche perché, almeno nel caso bidimensionale, è stato possibile costruire non solo la matrice $\hat{B}$ che compare nella (17), ma addirittura una risoluzione finita della matrice $\hat{P}$ ed é stato quindi possibile completare l'analisi di Fourier del sistema. Posto $R = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_3, y_0, \ldots, y_3]$ si ha infatti

$$0 \longrightarrow R^4 \xrightarrow{\hat{P}} R^8 \xrightarrow{\hat{B}} R^8 \xrightarrow{\hat{C}} R^4 \longrightarrow 0 \tag{18}$$

dove $\hat{B}$ e $\hat{C}$ sono state calcolate esplicitamente (si vedano le appendici di [1]). Il risultato che si puó ottenere da tale risoluzione è la determinazione di una condizione necessaria e sufficiente perché il sistema di Cauchy–Fueter non omogeneo

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \tag{19}$$

ammetta soluzione $f \in \mathcal{C}^\infty$ date g_1, g_2 anch'esse di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Ancora una volta è un risultato di Ehrenpreis (si veda [43]) quello che stabilisce che, essendo $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ uno spazio LAU, l'immagine dell'operatore $P(D)$ consiste esattamente degli elementi (g_1, g_2) tali che

$$B \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{20}$$

con B matrice che generi il modulo delle relazioni di $P(D)$. Si ha dunque il seguente

TEOREMA 5.7. *Sia Ω un aperto convesso in $\mathbb{H}^2$. Allora il sistema (19) ammette una soluzione $\mathcal{C}^\infty$ se e solo se vale la (20), dove B è la matrice 8×8 che ha per trasformata di Fourier $\hat{B}$.*

Terminiamo questo paragrafo, con un cenno a risultati di grande importanza che sono stati ottenuti proprio a partire dall'Analisi di Fourier del sistema di Cauchy–Fueter, ma che tuttavia esulano da questa trattazione, per cui rimandiamo il lettore interessato a [1], [3], [80] per una trattazione piú dettagliata.

Dalla risoluzione (18) si ricava che Im $\hat{P}$= Ker $\hat{B}$ e Im $\hat{B}$= Ker $\hat{C}$. Una conseguenza immediata di questi fatti è l'annullarsi di $\mathrm{Ext}^i(M, R)$ per $i = 0, 1$, dove $M = R^4/\hat{P}^t R^8$. L'uso di CoCoA ha permesso inoltre di provare, fatto inaspettato, che anche $\mathrm{Ext}^2(M, R)$ è nullo. Un teorema di dualitá simile a quello provato da Komatsu in

[61] permette di determinare uno spazio candidato ad essere lo spazio delle iperfunzioni in due variabili quaternioniche. Proprio questo risultato ha portato alla congettura sulla possibile definizione dello spazio delle iperfunzioni quaternioniche in piú variabili. Il problema è tutt'altro che banale e apre la strada ad altre questioni, come vedremo nell'ultimo paragrafo.

Osserviamo, per inciso, che una descrizione esplicita delle funzioni regolari di una variabile quaternionica é ben nota, in termini di serie di potenze di opportuni polinomi omogenei regolari. La cosa non é cosí semplice nel caso di piú variabili quaternioniche, ed infatti la letteratura non contiene esempi di funzioni regolari in $\mathcal{H}^n$. Tuttavia, il Principio Fondamentale di Ehrenpreis puó essere utilizzato per mostrare che é possibile rappresentare esplicitamente tali funzioni come segue

TEOREMA 5.8. *Sia V la varietá caratteristica del sistema di Cauchy–Fueter in $\mathbb{H}^2$ e sia A la matrice di operatori noetheriani normali associati al sottomodulo generato dal sistema di Cauchy–Fueter. Ogni funzione F regolare in $\mathbb{H}^2$ si puó rappresentare in forma integrale come segue*

$$\begin{aligned} F(q_1, q_2) &= F(x_0, \dots x_3, y_0, \dots y_3) \\ &= \int_V A(z, w) \exp(-i(x, y)(z, w)) d(z, w) \end{aligned}$$

dove (z, w) sono rispettivamente le variabili duali di (x, y), e la misura d é scelta in maniera tale da rendere l'integrale convergente nello spazio delle funzioni differenziabili (questa condizione puó essere resa esplicita in termini di condizioni di crescita sulla misura.)

OSSERVAZIONE 5.9. É importante osservare che in virtú della Proposizione 4.4.3.1 di [78] , é possibile assegnare una descrizione esplicita puramente algebrica della matrice A che infatti é una qualsiasi matrice tale che $\mathrm{Im}P^t = \mathrm{Ker}A^t$.

6. Il Principio Fondamentale e le funzioni Theta di Riemann

Prima di passare all'esame di alcuni problemi aperti, vogliamo descrivere in che modo sia possibile applicare gli strumenti descritti in precedenza per fornire una analisi microlocale delle funzioni theta (theta–zerovalue). Il problema di studiare queste funzioni da un punto di vista microlocale fu dapprima sollevato da Sato in [83] (ma si veda il nostro [11] per ulteriori referenze bibliografiche). È infatti possibile mostrare come sia possibile caratterizzare la funzione theta di Riemann attraverso un sistema di equazioni differenziali di ordine infinito. Per poter descrivere il problema in maniera comprensibile (ci limitiamo al caso di due variabili per motivi di chiarezza), è necessario introdurre alcune notazioni (mentre rinviamo il lettore a [59] per quanto riguarda il background del problema). Sia X lo spazio delle matrici 2×2 complesse e simmetriche $(t_{jk})_{1\leq j,k\leq 2}$ e ∂_{jk} il campo vettoriale $2\pi i(\partial/\partial t_{jk} + \partial/\partial t_{kj})$ su X: valgono le relazioni

$$\partial_{jk}t_{lk} = 2\pi i(\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl}) \quad (1 \leq j,k,l,m \leq 2)$$

dove δ_{jl} è la delta di Kronecker. Le seguenti matrici di operatori differenziali su X hanno un ruolo centrale in quanto segue. Poniamo

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & t_{11} & t_{12} \\ 2\pi i + t_{11}\partial_{11} + t_{12}\partial_{12} & 0 & 0 \\ t_{11}\partial_{12} + t_{12}\partial_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & t_{12} & t_{22} \\ t_{12}\partial_{11} + t_{22}\partial_{12} & 0 & 0 \\ 2\pi i + t_{12}\partial_{12} + t_{22}\partial_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \partial_{11} & 0 & 0 \\ \partial_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \partial_{12} & 0 & 0 \\ \partial_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_0 := [Q_2, Q_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{12} & -\partial_{11} \\ 0 & \partial_{22} & -\partial_{12} \end{bmatrix},$$

$$R_1 := [Q_1, R_0] = \begin{bmatrix} 0 & \partial_{12} & -\partial_{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ \partial_{12}^2 - \partial_{11}\partial_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_2 := [Q_2, R_0] = \begin{bmatrix} 0 & \partial_{22} & -\partial_{12} \\ -(\partial_{12}^2 - \partial_{11}\partial_{22}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notiamo che valgono le seguenti relazioni

$$R_1 = \partial_{12}Q_1 - \partial_{11}Q_2, \tag{21}$$

$$R_2 = \partial_{22}Q_1 - \partial_{12}Q_2. \tag{22}$$

dunque possiamo affermare che $[Q_j, R_k]$ $(1 \leq j, k \leq 2)$ è un multiplo di R_0. Le relazioni (21), (22) sono particolarmente importanti perchè ci permettono di osservare che l'algebra di Lie generata da Q_1 e Q_2 si arresta al secondo ordine (in un recente lavoro [59] Kawai e Takei hanno utilizzato questo fatto per costruire una risoluzione alla Koszul del sistema determinato da Q_1 e Q_2; il loro approccio presenta un metodo alternativo per affrontare lo studio delle sizigie di operatori non commutativi). Se ora consideriamo il sistema di equazioni differenziali di ordine infinito dato da

$$\begin{cases} (\exp(Q_1 - I)U = 0 \\ (\exp Q_2 - I)U = 0 \\ R_0 U = 0 \\ R_1 U = 0 \\ R_2 U = 0, \end{cases} \tag{23}$$

non è difficile mostrare che vale il seguente teorema

Teorema 6.1. *Sia $U = [u_0, u_1, u_2]^t$ un vettore di funzioni olomorfe definite su un sottoisieme Ω di $\mathbb{C}^3$ aperto e convesso. Supponiamo che U soddisfi il sistema di equazioni differenziali lineari (23). Allora esistono delle costanti $c_{\mu,\nu}$, c_μ e $\tilde{c}_\nu$, con μ e ν interi, per cui vale*

$$U = \sum_{(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}^2} c_{\mu,\nu} e_{\mu,\nu} + \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} c_\mu f_\mu + \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \tilde{c}_\nu \tilde{f}_\nu, \tag{24}$$

dove $c_{\mu,\nu}$, c_μ, $\tilde{c}_\nu$ soddisfano le seguenti condizioni (25), (26) e $e_{\mu,\nu}$, f_μ e $\tilde{f}_\nu$ sono vettori di funzioni olomorfe che vengono assegnati nelle seguenti (27), (28), (29). Siano τ una matrice 2×2 simmetrica e

$$H_K(\tau) = \sup_{t\in K} \Re e(iTr(\tau t)) \qquad (= \sup_{t\in K}(-Tr((\Im m t)\tau)))$$

dove $K \subset X$ è un compatto; se $\tau_{\mu,\nu}$ indica la matrice

$$\begin{bmatrix} \mu^2 & \mu\nu \\ \mu\nu & \nu^2 \end{bmatrix}$$

allora:

> *Per ogni sottoinsieme compatto e convesso K di Ω esiste una costante C_K per cui si ha*
>
> $$\begin{aligned} |c_{\mu,\nu}| &\leq C_K \exp(-\pi H_K(\tau_{\mu,\nu})), \\ |c_\mu| &\leq C_K \exp(-\pi H_K(\tau_{\mu,0})), \\ |\tilde{c}_\nu| &\leq C_K \exp(-\pi H_K(\tau_{0,\nu})), \end{aligned} \tag{25}$$

$$c_\mu = -c_{-\mu}, \quad \tilde{c}_\nu = -\tilde{c}_{-\nu} \qquad (\mu, \nu \text{ interi}), \tag{26}$$

$$e_{\mu,\nu} = \begin{bmatrix} \exp \pi i(\mu^2 t_{11} + 2\mu\nu t_{12} + \nu^2 t_{22}) \\ 2\pi i\mu \exp \pi i(\mu^2 t_{11} + 2\mu\nu t_{12} + \nu^2 t_{22}) \\ 2\pi i\nu \exp \pi i(\mu^2 t_{11} + 2\mu\nu t_{12} + \nu^2 t_{22}) \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$f_\mu = \begin{bmatrix} \mu t_{12} \exp \pi i\mu^2 t_{11} \\ 2\pi i\mu^2 t_{12} \exp \pi i\mu^2 t_{11} \\ \exp \pi i\mu^2 t_{11} \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$\tilde{f}_\nu = \begin{bmatrix} \nu t_{12} \exp \pi i\nu^2 t_{22} \\ \exp \pi i\nu^2 t_{22} \\ 2\pi i\nu^2 t_{12} \exp \pi i\mu^2 t_{11} \end{bmatrix}. \tag{29}$$

La dimostrazione di questo teorema è, almeno in linea di principio, molto semplice. Infatti basta applicare il principio fondamentale per equazioni differenziali di ordine infinito (cfr. il paragrafo 3) al sistema

$$\begin{cases} (\exp Q_1 - I)U = 0 \\ (\exp Q_2 - I)U = 0. \end{cases}$$

Quanto si ottiene, è una rappresentazione esponenziale discreta di U, indiciata peró su una varietá che contiene propriamente la varietá descritta nell'enunciato del teorema 1.1. A questo punto, utilizzando le tre equazioni ausiliarie di (23) e sfruttando le proprietá geometriche delle loro varietá caratteristiche, si ottiene il risultato cercato. Come il lettore puó immediatamente osservare, peró, il teorema che abbiamo appena citato non fornisce ancora una caratterizzazione della funzione theta, poichè ci sono ancora troppe frequenze. Tuttavia, se si aggiungono delle ulteriori equazioni ausiliarie (che si ottengono essenzialmente utilizzando la trasformazione di Jacobi) si ottiene il seguente risultato

TEOREMA 6.2. *Sia Ω un aperto convesso in $\mathbb{C}^3$ su cui*

$$\Im m \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix}$$

è definita positiva. Se la soluzione U dell'equazione (23) soddisfa le equazioni

$$(\exp P_1 - I)U = 0$$

$$(\exp P_2 - I)U = 0,$$

allora U è una costante multipla di

$$\begin{bmatrix} \theta(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove $\theta(t) = \sum_{(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}^2} \exp \pi i(\mu^2 t_{11} + 2\mu\nu t_{12} + \nu^2 t_{22})$.

Senza entrare nei dettagli, è interessante osservare che il caso unidimensionale di questo risultato è una immediata conseguenza della classica trasformazione immaginaria di Jacobi. Il vantaggio della nostra analisi, naturalmente, è che permette di trattare direttamente il caso di dimensione arbitraria. Vale inoltre la pena di osservare che la nostra caratterizzazione locale delle funzioni theta puó essere vista come conseguenza diretta del teorema di ricostruzione per sistemi $\mathbb{R}$–olonomi, assieme all'invarianza per traslazione del complesso delle soluzioni del sistema $\mathbb{R}$–olonomo soddisfatto dalle funzioni theta (cfr. [11]).

7. Problemi aperti

Questa sezione finale è dedicata all'illustrazione di alcuni problemi aperti direttamente collegati ai risultati descritti nei paragrafi precedenti.

Con riferimento ai problemi relativi alle rappresentazioni integrali per soluzioni di sistemi di equazioni di convoluzione (Sezione 2), uno degli aspetti che ancora sfuggono al nostro controllo, è quanto accade quando si studiano equazioni di convoluzione tra spazi di funzioni definite su aperti convessi qualora i convolutori considerati abbiano supporti differenti. In questo caso la struttura algebrica generata dalle trasformate di Fourier dei convolutori non è più un ideale in un appropriato spazio di funzioni olomorfe con condizioni di crescita, e non siamo ancora riusciti a determinare le esatte condizioni che potranno garantire un teorema di divisione in quel caso. I teoremi di tipo "Principio Fondamentale" che abbiamo citato nel corso di questo lavoro, non si occupano infine dell'esistenza di inverse continue degli operatori di convoluzione. Anche in questo caso, si può vedere come le condizioni di decrescenza rapida siano rilevanti (si vedano ad esempio i lavori sull'argomento di Meise, Taylor e Vogt come citati in [21]), ma una analisi completa del problema non è ancora stata ultimata. Ancora in questa direzione, dobbiamo ricordare che non esiste, a tutt'oggi, una versione del Principio Fondamentale per operatori differenziali di ordine infinito e soluzioni iperfunzioni. Mentre un risultato di questo genere è stato ottenuto da Kaneko, già negli anni '70, nel caso di operatori differenziali di ordine finito, solo ora è in corso di studio un risultato analogo per il caso di operatori di ordine infinito, da parte di Berenstein, Kawai e Struppa.

Passando poi ai temi sollevati nella quarta sezione di questo lavoro, è chiaro come essi siano legati (specialmente in vista del nostro interesse per le proprietà della funzione zeta di Riemann) allo studio delle varietà interpolanti definite da funzioni olomorfe la cui crescita sia più rapida di quella descritta nei lavori citati fino ad ora. In particolare devono essere segnalati i primi tentativi di Hyman [46] e poi di Vidras [94], che nei loro lavori estendono i metodi introdotti da Berenstein e Taylor al caso di crescita doppiamente esponenziale. D'altro canto, un approccio più astratto e forse più promettente è stato tentato in [18], e poi ampliato da Cheah in [30]. L'interesse di questo approccio è nel tentativo di costruire una teoria di iperfunzioni come funzionali su spazi di funzioni olomorfe a crescita rapida; nelle intenzioni degli autori (che stanno attualmente lavorando su questo problema), se si riuscisse a restaurare una simile teoria per il caso della crescita doppiamente esponenziale, dovrebbe risultare possibile una analisi astratta delle equazioni di convoluzione in tali spazi. Finalmente, deve essere sottolineato che Grishin e Russakovskii hanno recentemente utilizzato strumenti classici di analisi, basati sull'uso di maggioranti subarmoniche e plurisubarmoniche per fornire una versione in qualche modo uniforme dei problemi di interpolazione. E' attualmente in corso di preparazione un lavoro congiunto di Berenstein, Russakovskii e Struppa, nel quale le varie tecniche di risoluzione dell'operatore di Cauchy-Riemann (Hormander, Berndtsson e, appunto, Grishin-Russakovskii) vengono utilizzate per fornire un'approccio unificato a tali problemi.

Passiamo ora alla quinta sezione dell'articolo. Le ricerche relative all'Analisi del sistema di Fourier del sistema di Cauchy–Fueter sembrano essere molto promettenti, almeno se si considerano i problemi aperti in questo settore (si veda [4]) che sono cosí numerosi da poterne riportare qui solamente una parte.

Partiamo quindi dal teorema di dualitá, giá menzionato nel paragrafo 5, (a cui ci riferiamo per le notazioni) che stabilisce il seguente isomorfismo

$$H^{2n-1}(\mathcal{H}^n, \mathcal{H}^n \backslash K; \mathcal{S}) \cong [H^0(K, \mathcal{R})]'. \tag{30}$$

In questo isomorfismo $\mathcal{S}$ è il fascio delle soluzioni distribuzioni di un opportuno sistema associato alla matrice che compare all'ultimo posto di una risoluzione di P. Abbiamo giá detto che lo spazio $H^{2n-1}(\mathcal{H}^n, \mathcal{H}^n \backslash K; \mathcal{S})$ é il piú naturale candidato ad essere lo spazio delle iperfunzioni a supporto compatto in $\mathcal{H}^n$ in quanto la (30) è la generalizzazione del famoso teorema di dualitá di Köthe, secondo cui il duale dello spazio $H^0(K, \mathcal{O})$ é lo spazio delle iperfunzioni (reali) supportate da K. Poiché la dimensione fiacca del fascio $\mathcal{R}$ risulta essere proprio $2n-1$ (si veda [3]), per avere effettivamente lo spazio delle iperfunzioni, é necessario individuare quale sia la varietá puramente $(2n-1)$–codimensionale su cui concentrare il fascio.

Il problema successivo é, naturalmente, l'estensione del fascio delle iperfunzioni (noto nel caso $n = 1$) al caso di piú variabili. Al di lá del valore intrinseco di tale risultato, sono da mettere in risalto le implicazioni fisiche che ne deriverebbero. Pare infatti che il caso 1–dimensionale possa fornire un'efficace descrizione degli elementi di alcune matrici di scattering (si veda [32] per altre motivazioni fisiche).

É ovvio che é stato possibile dimostare i risultati fino a qui esposti, perché il sistema di Cauchy–Fueter soddisfa la condizione algebrica del teorema 5.4. Il problema che sorge spontaneamente é allora quello di ricercare una condizione *analitica* equivalente, o (meglio ancora) che implichi quella assegnata in 5.4.

Altri problemi aperti, di carattere piú tecnico, sono quelli strettamente legati alla natura dei sistemi che si possono trattare con tecniche simili a quelle illustrate nel paragrafo 5. Se si vogliono infatti caratterizzare le funzioni theta come soluzioni sistemi di equazioni differenziali, é necessario sostituire i polinomi $P_1, \dots, P_r$ con matrici di polinomi. La situazione che si ottiene é certamente non commutativa e presenta una differenza sostanziale con la precedente, in quanto occorre determinare la risoluzione di un complesso a partire da piú di una matrice. Se si riuscisse a costruire una tale risoluzione, si potrebbero trattare allo stesso modo anche sistemi misti in cui una parte delle variabili compare in un sistema di tipo Cauchy–Riemann e un'altra parte in un sistema di De Rham parziale. Si noti che tali sistemi sono estremamente significativi, in virtú del teorema di struttura dei sistemi di equazioni differenziali (si veda, ad esempio [84]). In particolare, Kawai e Takei stanno tentando di applicare tecniche di questo tipo allo studio delle risoluzioni dei sistemi associati alle funzioni theta.

Bibliografia

[1] Adams W. W., Berenstein C. A., Loustaunau P., Sabadini I. and Struppa D. C., *Regular functions of several quaternionic variables and the Cauchy–Fueter complex*, in corso di stampa su J. Geom. Anal., 1997.

[2] Adams W. W., Berenstein C. A., Loustaunau P., Sabadini I. and Struppa D. C., *On compact singularities for regular functions of one quaternionic variable*, Compl. Var. **31** (1996), 259–270.

[3] Adams W. W., Loustaunau P., Palamodov V. P. and Struppa D. C., *Hartog's phenomenon and projective dimension of related modules*, in corso di stampa su Ann. Inst. Fourier, 1997.

[4] Adams W. W., Loustaunau P. and Struppa D. C., *Application of commutative and computational algebra to partial differential equations*, Proceedings of "Advances in Scientific Computing and Modelling", S.K. Dey and J.P. Ziebarth eds. (1996), 153–157.

[5] Andreotti A. and Nacinovich M., *Complexes of Partial Differential*

Operators, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (1976), 553–621.

[6] Aoki T., *Invertibility for microdifferential operators of finite order*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **18** (1982), 421–449.

[7] Aoki T., Kashiwara M. and Kawai T., *On a class of linear differential operators of infinite order with finite index*, Advances in Math. **62** (1986), 155–168.

[8] Bang T., *Om quasi-analytiske Funktioner* (thesis), Copenhagen, 1946.

[9] Berenstein C. A., Easley G., Napoletani D. and Struppa D. C., *A generalized hyperfunctions quantum field theory*, preprint.

[10] Berenstein C. A., Kawai T. and Struppa D. C., *Interpolating varieties and the Fabry-Ehrenpreis-Kawai Gap Theorem*, Adv. in Math. **122** (1997), 280–310.

[11] Berenstein C. A., Kawai T., Struppa D. C. and Takei Y., *Exponential representation of a holomorphic solution of a system of differential equations associated with the theta-zerovalue*, in "Structure of solutions of Differential Equations" (M. Morimoto e T. Kawai eds.) (1996), 89–102.

[12] Berenstein C. A., Roussakovskii A. and Struppa D. C., in preparation.

[13] Berenstein C. A., Struppa D. C., *Solutions of convolutions equations in convex sets*, Amer. J. Math. **109** (1987), 521–544.

[14] Berenstein C. A., Struppa D. C., *On the Fabry-Ehrenpreis-Kawai gap theorem*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **23** (1987), 565–574.

[15] Berenstein C. A., Struppa D. C., *Dirichlet series and Convolution equations*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **24** (1988), 783–810.

[16] Berenstein C. A., Struppa D. C., *Complex analysis and Mean Periodicity*, En. Math. Sciences (G. Henkin ed.), 54 Springer Verlag 1994, 8–110.

[17] Berenstein C. A., Struppa D. C., *Interpolation and Dirichlet series: a new approach*, Mediterranean Press, Cetraro, 1989.

[18] Berenstein C. A., Struppa D. C., *Sheaves of holomorphic functions with growth conditions* , W. de Gruyter, Berlin–New York, 1992.

[19] Berenstein C. A., Taylor B. A., *A new look of interpolation theory for entire functions of one variable*, Advances in Math. **33** (1979), 109–143.

[20] Berenstein C. A., Taylor B. A., *Interpolations problems in* $\mathbb{C}^n$ *and applications to harmonic analysis*, J. Anal. Math. **38** (1980), 188–254.

[21] Bernstein V. I., *Lecons sur les progres recents de la theorie des series de Dirichlet*, Gauthier–Villars, Paris, 1933.

[22] Beurling A., *Lectures on Quasi-Analytic Functions*, The Institute for Advenced Studies, Princeton, 1956–57.

[23] Beurling A., *Quasi-Analyticity and General Distributions*, AMS Sum-

mer Inst., Stanford, 1961.

[24] BEURLING A., *Notes on Dirichlet series*, J. Indiana Math. Soc. **27** (1963), 19–26.

[25] BJÖRK J., *Beurling Distributions and Linear Partial Differential Equations*, Ist. Alta Matematica, Roma, 1971.

[26] BJÖRK J. E., *Rings of differential Operators*, North Holland, Amsterdam, 1979.

[27] BOCHNER S., *Partial Differential Equations and Analytic Continuation*, Proc. Natl. Acad. Sci. **38** (1952), 227–230.

[28] CARLEMAN T., *Les fonctions quasi-analytiques*, Gauthiers–Villars, Paris, 1926.

[29] CARLEMAN T., *L'integrale de Fourier et question qui s'y rattachent*, Almqvist and Wiksells, Uppsala, 1944.

[30] CHEAH S.C., *Microfunctions for sheaves of holomorphic functions with growth conditions*, Ph.D. thesis, Univ. of Maryland, 1994.

[31] CHOU C. C., *Latransformation de Fourier complexe et l'equation de convolution*, Springer Lecture Notes in Mathematics 325, New York, 1973.

[32] COLOMBO F., LOUSTAUNAU P. and SABADINI I. and STRUPPA D. C., *Regular functions of biquaternionic variables and Maxwell's Equations*, preprint, George Mason University, 1996.

[33] CURLEY W., *On Beurling spaces* (tesi), Stevens Inst. of Tecnology, 1972.

[34] DIENES P., *Taylor series*, Dover, New York, 1957.

[35] EHRENPREIS L., *The Fundamental Principle for Linear Constant Coefficients Partial Differential Equations*, in Proc. Intern. Symp. Linear Spaces, Jerusalem, 1960, 161–174.

[36] EHRENPREIS L., *A New proof and an Extension of Hartog's Theorem*, Bull. Am. Math. Soc. **67** (1961), 507–509.

[37] EHRENPREIS L., *Fourier Analysis in Several Complex Variables*, Wiley Interscience, New York, 1970.

[38] EHRENPREIS L. and KAWAI T., *Poisson's summation formula and Hamburger's theorem*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **18** (1982), 833–846.

[39] EULER L., *De integratione aequationum differentialium altiorum graduum*, Misc. Berol. **7** (1743), 193–242.

[40] GUREVICH D. I., *Counterexamples to a problem of L. Schwartz*, Funct. Anal. Appl. **9** (1975), 116–120.

[41] HAMBURGER H., *Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ–Funktion*, Math. Z. **10** (1921), 240–254.

[42] HANSEN S., *On the Fundamental Principle of L. Ehrenpreis*, manoscritto.

[43] HANSEN S., *Localizable Analytically Uniform Spaces and the Funda-*

mental Principle, Trans. Amer. Math. Soc. **164** (1981), 235–250.

[44] HAVIN V.P., *The uncertainty principle in harmonic analysis*, Results in Math. and related areas **3**, 28 Springer Verlag (1994).

[45] HECKE E., *Vorlesungen über die Theorie der Algebraischen Zalhen*, New York, 1948.

[46] HYMAN R.E., *Interpolation of Entire Functions – Infinite Order*, Ph.D. thesis, Univ. of Maryland 1990.

[47] HÖRMANDER L., *Generators for some rings of analytic functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 943–949.

[48] KASHIWARA M. and SCHAPIRA P., *Micro–hyperbolic systems*, Acta Math. **142** (1979), 1–55.

[49] KATO G. and STRUPPA D. C., *Fundamentals of Microlocal Analysis*, Marcel Dekker Inc., New York, to appear, 1998.

[50] KAWAI T., *On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients*, J. Fac. Sci. Univ. Tokio **17** (1970), 467–517.

[51] KAWAI T., *An example of a complex of linear differential operators of infinite order*, Proc. Japan Acad. **59** (1983), 113–115.

[52] KAWAI T., *Systems of microdifferential equations of infinite order*, Taniguchi Symp. HERT Kyoto 1984, 143–154.

[53] KAWAI T., *The Fabry-Ehrenpreis gap theorem for Hyperfunctions*, Proc. Japan Acad. **60** (1984), 176–277.

[54] KAWAI T., *The Fabry–Ehrenpreis gap theorem and linear differential equations of infinite order*, Amer. J. Math., 109 (1987), 57–64.

[55] KAWAI T., *Systems of linear differential equations of infinite order: an aspect of infinite analysis*, Prepubl. RIMS 599 (1987).

[56] KAWAI T., M. Kashiwara, T. Kimura, *Foundations of Algebraic Analysis*, Princeton Univ. Press, 1986.

[57] KAWAI T., STRUPPA D. C., *On the existence of holomorphic solutions of systems of linear differential equations of infinite order and with constant coefficients*, Intern. J. Math. **1** (1990) n.1, 63–82.

[58] KAWAI T., STRUPPA D. C., in preparation.

[59] KAWAI T., TAKEI Y., *Fundamental Principle and θ–zerovalue*, Sukenkokyuroku **675**, R.I.M.S., Kyoto Univ., (1988), 79–86.

[60] KISELMAN C.O., *On entire functions of exponential type and indicators of analytic functonals*, Acta Math. **117** (1967), 1–35.

[61] KOMATSU H., *Relative cohomology of sheaves of solutions of differential equations*, Springer LNM **287** (1973), 192–261.

[62] LEVIN B.JA., *Distribution of zeros of entire functions*, Amer. Math. Soc., Providence, 1964.

[63] LEVINSON N., *Gap and Density Theorems*, Amer. Math. Soc., New York, 1940.

[64] Liess O., *On the Fundamental Principle of Ehrenpreis–Palamodov*, manoscritto.
[65] Lützen J., *The Prehistory of the Theory of Distributions*, Springer, New York, 1981.
[66] Malgrange B., *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **6** (1956), 271–355.
[67] Mandelbrojt S., *Séries de Fourier et classes quasianalytiques de fonctions*, Paris, 1935.
[68] Mandelbrojt S., *Séries lacunaries*, Hermann, Paris, 1936.
[69] Mandelbrojt B., *Séries adhérents, régularisation des suites, applications*, Hermann, Paris, 1952.
[70] Mandelbrojt B., *Dirichlet Series: Principles and Methods*, Reidel, Dordrecht, 1972.
[71] Martineau A., *Sur les fonctionnels analytiques et la transformation de Fourier–Borel*, J. Anl. Math. **11** (1963), 1–164.
[72] Martineau A., *Distributions et valeur au bord des fonctions holomorphes*, Theory of Distributions (Proc. Internat. Summer School, Lisbon, 1964), 195–326.
[73] Martineau A., *Les supports des fonctionnels analytiques*, Springer Lecture Notes in Mathematics **116** (1970), 175–195.
[74] Meril A., *Analytic functionals with unbounded carriers and mean periodic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **178** (1983), 115–136.
[75] Meril A. and Struppa D. C., *Convolutors in spaces of holomorphic functions*, Springer Lecture Notes in Mathematics **1276** (1987), 253–275.
[76] Meril A. and Struppa D. C., *Syzigies of modules and applications to propagation of regularity phenomena*, Publ. Math. **34** (1990), 349–377.
[77] Palamodov V. P., *Linear Differential Operators with Constant Coefficients*, Springer, Berlin 1970.
[78] Palamodov V. P., Comunicazione privata, 1996.
[79] Pertici D., *Funzioni regolari di piú variabili quaternioniche*, Ann. Mat. Pura e Appl., Serie IV, CLI (1988), 39–65.
[80] Sabadini I., *Verso una teoria delle iperfunzioni quaternioniche*, Tesi di dottorato, a.a. 94–95.
[81] Sabadini I. and Struppa D. C., *Topologies on quaternionic hyperfunctions and duality theorems*, Compl. Var. **30** (1996), 19–34.
[82] Sabury Y., *Vanishing theorems of cohomology groups with coefficients in sheaves of holomorphic functions with bounds*, Proc. Jap. Acad., 54 (1978), 274–278.
[83] Sato M., *Pseudo–differential equations and theta functions*, Astérisque 2–3 (1973), 286–291.

[84] SATO M., KAWAI T. and KASHIWARA M., *Microfunctions and Pseudo-Differential Equations*, Springer Lectures Notes in Mathematics **287** (1973), 265–529.

[85] SATO M., KAWAI T. and KASHIWARA M., *Linear differential equations of infinite order and theta functions*, Advances in Math. **47** (1983).

[86] SATO M., KAWAI T. and KASHIWARA M., *Microlocal analysis of theta functions*, Adv. Studies in Pure Math. **4** (1984), 267–289.

[87] SCHWARTZ L., *Théorie des distributions* vol. I, II, Hermann, Paris, 1950–51.

[88] STRUPPA D. C., *The extension of the fundamental principle to analytic varieties*, Ist. di Mat. Univ. di Milano, 1982.

[89] STRUPPA D. C., *The Fundamental Principle for systems of convolutions equations*, Mem. Amer. Math. Soc. **273** (1983).

[90] STRUPPA D. C., *A new look at the theory of quasianalytic classes*, Isr. J. Math. **54** (1986) n.1, 60–70.

[91] STRUPPA D. C., *Conferenza al Convegno G.N.S.A.G.A.*, Trieste, 8 ottobre 1988.

[92] STRUPPA D. C., C. Turrini *Hyperfunctions and boundary values of holomorphic functions*, Nieuw Arch. voor Wiksunde **4** (1986), 91–118.

[93] TURAN P., *Eine Neue Methode in der Analyse und deren Anwendungen*, Budapest, 1953.

[94] VIDRAS A., *Interpolation and Division Problems in Spaces of Entire Functions with growth Conditions and Their Applications*, Ph.D. Thesis, Univ. of Maryland, 1992.

[95] WIENER N., *The Fourier integral and some of its applications*, Cambridge, 1967 (1933).

Pervenuto in Redazione il 30 Ottobre 1996.