SU ALCUNI PROBLEMI NELLA TOMOGRAFIA DEI CORPI OMOGENEI(*)

di ALJOŠA VOLČIČ (a Trieste)(**)

Alla Memoria di Ugo Barbuti

SOMMARIO.- *L'articolo presenta alcuni risultati relativi alla ricostruzione di insiemi misurabili piani da due proiezioni ortogonali. Vengono indicate delle possibili linee di ricerca attraverso alcuni problemi aperti.*

SUMMARY.- *The papers presents some results on the reconstruction of plane measurable sets from two orthogonal projections. Some hints for further research are indicated through several open problems.*

1. Introduzione

La tomografia è, nella matematica, un capitolo che ha avuto un notevole impulso negli ultimi vent'anni dalle applicazioni in medicina (da dove ha preso il nome), dalla geofisica, astronomia etc. I primi risultati risalgono però al secondo decennio di questo secolo con i lavori di Funk e Radon. Radon, in particolare, si interessò del seguente problema: Sia $f: R^2 \to R$ continua ed a supporto compatto. Della funzione f si conoscono tutti gli integrali di linea $\int_L f ds$, al variare di L tra tutte le rette del piano. Ci si chiede se questi dati permettono la ricostruzione (esplicita) di f. La risposta [11] è affermativa. Funk [3] considerò un analogo problema relativamente alla sfera ed agli integrali lungo cerchi massimi. Estensioni di questi risultati ad altre varietà e dimensioni si trovano ad esempio in [4].

Il risultato di Radon è stato più volte ripreso (e riscoperto). Un impulso notevole alla ricerca in questo campo della matematica è stato dato da Hounsfield [5] e da Cormack [2]. Essi hanno avuto, indipendentemente, l'idea di usare il risultato di Radon per la ricostruzione della densità del corpo umano da radiografie, osservando che dall'intensità di una radiografia in un punto si può ricavare la densità media del corpo lungo il raggio che ha impressionato la lastra in quel punto. Pertanto una

(*) Pervenuto in Redazione il 4 aprile 1990. Ricerca effettuata con i fondi MURST 40%.

(**) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Scienze Matematiche, Università degli Studi, Piazzale Europa 1, 34100 Trieste (Italy).

radiografia rappresenta una collezione di integrali di linea della densità incognita. Il testo di Natterer [10] fornisce un'ampia panoramica sugli sviluppi della teoria. Nelle applicazioni pratiche è possibile ottenere soltanto un numero finito di integrali di linea, perciò hanno avuto particolare sviluppo i metodi numerici. E' chiaro che se si dispone di informazioni aggiuntive sulla densità da ricostruire, gli stessi dati permettono una ricostruzione più accurata [6]. In letteratura si sono considerati vari tipi di informazione a priori. In questo articolo presenteremo una sintesi di risultati riguardanti i corpi omogenei, con qualche risultato nuovo ed una lista di problemi aperti.

Nella letteratura è stata considerata anche un'ulteriore restrizione agli insiemi da ricostruire: la convessità. In questo articolo ci occuperemo di questo argomento soltanto marginalmente. Per i risultati in questo ambito si veda [14] e la letteratura ivi citata.

2. Sulla ricostruzione di insiemi omogenei

DEFINIZIONE. Data una direzione D nel piano, chiameremo radiografia dell'insieme misurabile F nella direzione D la funzione che ad ogni retta L avente direzione D associa il valore dell'integrale $\int_L f\, ds$.

Vale il seguente risultato [16]:

TEOREMA 1. *Dati comunque un numero finito di direzioni D_1, D_2, ..., D_n nel piano, un convesso $K \subset R^2$ ed un altro convesso H contenuto nell'interno di K, per ogni $f \in L^1_+ (H)$, esiste un prolungamento $\bar{f} \geq 0$ di f a tutto K, integrabile su K, tale che K dotato di densità uniforme e K dotato delle densità $\bar{f}$ hanno le stesse radiografie nelle direzioni fissate.*

Il teorema precedente dice, in altre parole, che i convessi omogenei non possono essere distinti mediante un numero finito di radiografie da convessi non omogenei.

Occorre quindi porsi un obiettivo più limitato e precisamente quello di identificare gli insiemi misurabili omogenei nella classe degli insiemi misurabili omogenei.

In quest'ambito G.G. Lorentz [8] ha stabilito il seguente risultato negativo:

TEOREMA 2. *Dato comunque un numero finito di direzioni, esistono due insiemi misurabili omogenei disgiunti, aventi le stesse radiografie nelle direzioni fissate.*

Per contro, come ha dimostrato lo stesso Lorentz, ci sono insiemi misurabili univocamente determinati da due sole radiografie. Poiché l'uguaglianza delle radiografie è un invariante affine, possiamo sempre supporre che le due direzioni siano ortogonali.

Vari autori hanno caratterizzato la classe, che denoteremo con $\mathcal{U}$, degli insiemi piani misurabili univocamente determinati (si intende, a meno di insiemi di misure nulla) da due sole radiografie [8], [7], [12].

Premettiamo alcune definizioni.

Se $F \subset \mathbf{R}^2$ è un insieme misurabile, di misura finita, la funzione

$$f_y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1_F(x,y)\, dy$$

è definita per quasi ogni $x \in \mathbf{R}$ e si dice la proiezione o la radiografia di F nella direzione y. Si è denotato con 1_F la funzione caratteristica di F.

Analogamente si definisce la radiografia di F nella direzione x, che denoteremo con $f_x(y)$.

Poiché nel seguito parleremo anche di radiografie di corpi non omogenei, ricordiamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy$$

è la radiografia nella direzione dell'asse y di un corpo avente densità $f(x,y)$.

Poniamo $F_y = \{(x,y) : x \in \mathbf{R}, 0 \leq y \leq f_y(x)\}$ e $F_x = \{(x,y) : y \in \mathbf{R}, 0 \leq x \leq f_x(y)\}$.

Prendiamo ora la radiografia dei due insiemi F_y ed F_x nelle direzioni degli assi y ed x, rispettivamente, denotandole con f_{yx} e f_{xy}

$$f_{yx}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{F_y}(x,y)\, dx$$

$$f_{xy}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{F_y}(x,y)\, dy.$$

Poniamo infine

$$F_{yx} = \{(x,y) : y \in \mathbf{R}, 0 \leq x \leq f_{yx}(y)\}.$$

$$F_{xy} = \{(x,y) : y \in \mathbf{R}, 0 \leq y \leq f_{yx}(x)\}.$$

DEFINIZIONE 1. Un insieme misurabile di misura finita $F \subset R_2$ si dice additivo [12], se esistono due funzioni misurabili f_1, f_2 tali che

$$F = \{(x, y) : f_1(x) + f_2(y) \geq 0\}.$$

DEFINIZIONE 2. Un insieme misurabile di misura finita $F \subset R_2$ si dice unione incastrata di rettangoli [7], se esiste una famiglia di rettangoli $R_\alpha = X_\alpha \times Y_\alpha$, $\alpha \in I$, tale che

$$F = \bigcup_{\alpha \in I} R_\alpha$$

a meno di insiemi di misure nulla e se inoltre per ogni $\alpha, \beta \in I$ o $X_\alpha \supset X_\beta$, oppure $X_\alpha \subset X_\beta$, inoltre nel primo caso, $Y_\alpha \subset Y_\beta$ e, nel secondo, $Y_\alpha \supset Y_\beta$.

DEFINIZIONE 3. Si dice che un insieme misurabile $F \subset R^2$ ammette una componente scambiabile, [7], se esistono un insieme misurabile di misura positiva M, una traslazione orizzontale (t, o) ed una traslazione verticale (o, u), tali che, a meno di insiemi di misura nulla,

$$M \cup M_{(t,u)} \subset F$$

$$\text{e } M_{(t,\text{o})} \cup M_{(\text{o},u)} F = \emptyset.$$

Si è indicato con $M_{(a,b)}$ l'insieme $\{(x, y) : x = x' + a, y = y' + b, (x', y') \in M\}$.

Vale il seguente teorema:

TEOREMA 3. *Un insieme misurabile avente misura finita $F \subset R^2$ appartiene alla famiglia $\mathcal{U}$ degli insiemi univocamente determinati dalle due radiografie nelle direzioni degli assi x ed y, se e solo se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:*

a) $F_{xy} = F_{yx}$ *a meno di insiemi di misura nulla* [8]
b) *F è additivo* [12]
c) *F è unione incastrata di rettangoli* [7]
d) *F è unione numerabile incastrata di rettangoli* [7]
e) *F non ammette componente scambiabile* [7].

Vale inoltre per ogni $F \in \mathcal{U}$ la seguente formula ricostruttiva [7]:

$$F = \{(x, y) : f_y(x) \geq f_{xy}(f_x(y))\}$$

(*a meno di insiemi di misura nulla*).

La formula indica un modo naturale per associare ad un insieme di $\mathcal{U}$ la coppia di funzioni che compaiono nella definizione di additività: basta porre infatti

$$f_1(x) = f_y(x) \quad \text{e} \quad f_2(y) = -f_{xy}(f_x(y)).$$

Per motivi di simmetria è naturalmente (sempre a meno di insiemi di misura nulla) anche

$$F = \{(x, y) : f_x(y) \geq f_{yx}(f_y(x))\}.$$

Conseguentemente, $f_1(x) = -f_{yx}(f_y(x))$ e $f_2(y) = f_x(x)$ è un'altra scelta possibile per la coppia di funzioni che rendono additivo l'insieme F. In vista di un risultato di W. Carrington di cui parleremo più avanti, di cui abbiamo avuto notizia, ma che al momento attuale non risulta pubblicato, è interessante porre in evidenza il seguente risultato:

TEOREMA 4. *Se $F \in \mathcal{U}$, allora l'insieme*

$$F' = \{(x, y) : f_y(x) = f_{xy}(f_x(y))\}$$

ha misura nulla.

Dimostrazione: F' è misurabile ed essendo contenuto in F è di misura finita. Per il teorema di Fubini risulta

$$\lambda^2(F') = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^1(\{x : f_y(x) = f_{xy}(f_x(y))\})\, dy.$$

Dalla definizione di f_{yx} segue che
$\lambda^1(\{x : f_y(x) = f_{yx}(f_x(y))\}) > 0$ se e solo se $f_{yx}(y) > f_{yx}(y + 0)$, dove $y = f_y(x)$. Ma poiché f_{yx} è non decrescente, esiste al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità della f_{yx} e perciò l'integrale con cui si calcola $\lambda^2(F')$ è nullo.

3. Insiemi omogenei e insiemi a densità limitata

W. Carrington ha annunciato il seguente risultato:

TEOREMA 5. *Se $F \subset R^2$ è di misura finita e additivo, cioè $F = \{(x, y) : f_1(x) + f_2(y) \geq 0\}$ con f_1 e f_2 opportune funzioni misurabili, e se inoltre $\lambda^2\{(x, y) : f_1(x) + f_2(y) = 0\}) = 0$, allora F è* *univocamente determinato tra tutti gli insiemi aventi densità f tale che* $0 \leq f \leq 1$.

OSSERVAZIONI. 1. Per il teorema 4 l'ipotesi aggiuntiva $\lambda^2\{(x,y) : f_1(x) + f_2(y) = 0\}) = 0$ è superflua. La conclusione vale dunque per tutti gli insiemi $F \in \mathcal{U}$.

2. La conclusione del teorema è molto forte infatti F è l'unico oggetto avente quelle due radiografie in una classe molto più ampia di quella degli insiemi omogenei.

Del teorema 5 daremo qui una dimostrazione che utilizza la caratterizzazione c) del teorema 3 ed ha quindi un interesse indipendente.

Dimostrazione del teorema 5: Per la c) del teorema 3 risulta

$$F = \bigcup_{\alpha \in I} R_\alpha$$

dove R_α è una famiglia incastrata di rettangoli. Facciamo vedere che se G è un insieme misurabile avente le stesse due radiografie di F e se la sua densità g è tale che $0 \leq g \leq 1$, allora $g = 1$ quasi ovunque su ciascun R_α.

Sia dunque $R_\alpha = R = X \times Y$ uno dei rettangoli. Risulta $R \subset F$ quasi ovunque ed inoltre, a meno di insiemi di misura nulla [7],

$$(\tilde{X} \times \boldsymbol{R}) \cap R = \emptyset = (\boldsymbol{R} \times \tilde{Y}) \cap R$$

(con $\tilde{X}$ ed $\tilde{Y}$ abbiamo denotato i complementari di x ed y). Poniamo $\bar{R} = \tilde{X} \times \tilde{Y}$, $R' = X \times \tilde{Y}$, $R'' = \tilde{X} \times Y$ ed osserviamo che R, $\bar{R}$, R' ed R'' costituiscono una partizione di $\boldsymbol{R}^2$.

Denotiamo con r, r' ed r'' le misure di $F \cap R$, $F \cap R'$ ed $F \cap R''$ rispettivamente.

Notiamo inoltre che la misura di $F \cap \bar{R}$ è zero. Denotiamo invece con s, $\bar{s}$, s' ed s'' gli integrali della densità g sugli insiemi R, $\bar{R}$, R' ed R'' rispettivamente. L'uguaglianza delle due radiografie implica per il teorema di Fubini le seguenti identità:

(1) $r + r'' = s + s''$

(2) $r + r' = s + s'$

(3) $r' = s' + \bar{s}$

(4) $r'' = s'' + \bar{s}$.

La positività di g implica che $s \geq 0$, $s' \geq 0$, $s'' \geq 0$, $\bar{s} \geq 0$, mentre da $g \leq 1$ deduciamo che $s \leq r$. Ne segue, sommando la (2) e la (4) e sfruttando la (3) e la (4), che $r + r' + r'' = s + s' + s'' + \bar{s} \leq$

$$\leq r + s' + s'' + 2\bar{s} = r + r' + r'',$$

da cui deduciamo intanto che $\bar{s} = 0$. Dalle (3) e (4) segue ora che $s' = r'$ ed $s'' = r''$, da cui $s = r$. Ciò prova che $g = 1$ quasi ovunque su R e quindi che $g \geq 1_F$ quasi ovunque. Ma poiché g e 1_F hanno le stesse radiografie e quindi la stessa massa complessiva, risulta $g = 1_F$ quasi ovunque e quindi la tesi.

La proprietà descritta dal teorema 5 è in effetti caratteristica per gli insiemi della classe $\mathcal{U}$. Vale infatti il seguente risultato:

TEOREMA 6. *Sia F un insieme misurabile di misura finita, tale che $F \notin \mathcal{U}$. Allora esiste un insieme G di densità $0 \leq g \leq 1$ avente le stesse radiografie di F e tale che $0 < g < 1$ su un insieme di misura positiva.*

Sappiamo che, se $F \notin \mathcal{U}$, allora per la proprietà e) del teorema 3, esiste per F una componente scambiabile: esistono cioè un insieme di misura positiva M e due vettori $(t, 0)$ e $(0, u)$ tali che

$$M \cup M_{(t,u)} \subset F \quad \text{e} \quad M_{(t,0)} \cup M_{(0,u)} \cap F = \emptyset$$

a meno di insiemi di misura nulla.

Poniamo ora $G = F \cup M_{(t,0)} \cup M_{(0,u)}$ e definiamo (scelto $\alpha \in (0, 1)$)

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y) \notin G \\ 1 & \text{se } (x,y) \in F \setminus (M \cup M_{(t,u)}) \\ \alpha & \text{se } (x,y) \in (M \cup M_{(t,u)}) \\ 1-\alpha & \text{se } (x,y) \in (M_{(t,0)} \cup M_{(0,u)}) \end{cases} .$$

L'insieme di G e la sua densità g hanno le stesse radiografie di F per ogni scelta di α.

In [12] è stato enunciato un risultato riguardante il caso pluridimensionale, che si riduce in $\boldsymbol{R}^2$ al seguente teorema:

TEOREMA 7. *Se $0 \leq g \leq 1$ è integrabile ed a supporto compatto in $\boldsymbol{R}^2$, allora esiste un insieme misurabile omogeneo $F \subset \boldsymbol{R}^2$ avente le stesse due radiografie.*

Gli autori di [12] notano che la dimostrazione consegue immediatamente dal fatto che la condizione necessaria e sufficiente a) del teorema 3 affinché $F \in \mathcal{U}$, coincide con la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una densità avente marginali assegnati, dovuta a Strassen [13].

4. Alcuni risultati topologici

Incominciamo con la seguente semplice osservazione: se m è una misura positiva e se A e B sono misurabili e di misura finita, allora (se Δ denota la differenza simmetrica)

$$|m(A) - m(B)| \leq m(A \Delta B).$$

Vale il seguente risultato:

TEOREMA 8. *Se F e G sono due insiemi piani di misura finita, se f_x, g_x, f_y, g_y, sono le loro radiografie e se f_{xy}, g_{xy}, f_{yx}, g_{yx} hanno il significato descritto nel paragrafo 2, allora*

$$\|f_{yx} - g_{yx}\|_1 \leq \|f_y - g_y\|_1 \leq \lambda^2 (F \Delta G).$$

$$\|f_{xy} - g_{xy}\|_1 \leq \|f_x - g_x\|_1 \leq \lambda^2 (F \Delta G).$$

Dimostrazione: Sia $L(x_0) = \{(x,y) : x = x_0\}$. Per l'osservazione fatta prima,

$$|\lambda^1 (F \cap L(x_0)) - \lambda^1 (G \cap L(x_0))| \leq \lambda^1 ((F \Delta G) \cap L(x_0)).$$

Integrando la quantità a sinistra rispetto ad $x_0 \in \boldsymbol{R}$ si ottiene $\|f_y - g_y\|_1$. Integrando invece la quantità a destra, si ottiene $\lambda^2 (F \Delta G)$.

Analogamente si dimostra che $\|f_x - g_x\|_1 \leq \lambda^2 (F \Delta G)$.

Osserviamo ora che $\|f_x - g_x\|_1 = \lambda^2 (G_x \Delta F_x)$ (dove G_x e F_x hanno il significato descritto nel paragrafo 2) e pertanto risulta ancora

$$|\lambda^1 (F_x \cap L(x_0)) - \lambda^1 (G_x \cap L(x_0))| \leq \lambda^1 ((F_x \Delta G_x) \cap L(x_0)),$$

da cui si deduce, integrando per $x_0 \in \boldsymbol{R}$, che

$$\|f_{xy} - g_{xy}\|_1 \leq \lambda^2 (F_x \Delta G_x)$$

$$\|f_{yx} - g_{yx}\|_1 \leq \lambda^2 (F_y \Delta G_y), \text{ da cui la tesi.}$$

Si noti che risulta $\| f_{xy} - g_{xy}\|_1 = \lambda^2 (F_{xy} \Delta G_{xy})$ e $\| f_{xy} - g_{xy}\|_1 = \lambda^2 (F_{xy} \Delta G_{xy})$.

Denotiamo ora con $d(F, G) = \lambda^2 (F \Delta G)$ la distanza di Nikodym. Vale il seguente teorema:

TEOREMA 9. *L'applicazione* $\Phi : F \to F_{xy} \Delta F_{yx}$ *è continua rispetto alla distanza di Nikodym.*

Dimostrazione: Le disuguaglianze dimostrate precedentemente mostrano che le due applicazioni $F \to F_{xy}$ e $F \to F_{yx}$ sono continue. D'altra parte risulta

$$\lambda^2 ((F \Delta G) \Delta (F' \Delta G')) \leq \lambda^2 (F \Delta F') + \lambda^2 (G \Delta G')$$

ed è quindi continua l'applicazione che alla coppia (F, G) associa $F \Delta G$. Da ciò la tesi.

COROLLARIO. *L'insieme* $\mathcal{U}$ *è chiuso ed il suo interno è vuoto.*

Dimostrazione: Che $\mathcal{U}$ sia chiuso segue dalla continuità di Φ e dal fatto che $\mathcal{U} = \Phi^{-1} (\emptyset)$.

Sia ora $F \in \mathcal{U}$. Faremo vedere che esistono insiemi $F' \notin \mathcal{U}$ arbitrariamente vicini ad F.

Sia $R = X \times Y$ uno dei rettangoli di cui F è riunione incastrata. Sia $A' \subset R$ misurabile e di misura positiva, tale che $A' \cap X = \emptyset$. Esiste allora una traslazione A'_t di A' tale che

$$\lambda (A'_t \setminus (X \cup A')) > 0.$$

Poniamo $A = A' \setminus (X \cup A')_{-t}$.
Risulta $(A \cup A_t) \cap X = \emptyset, A \cap A_t = \emptyset$ e $\lambda (A) > 0$.

Nella stessa maniera si costruisce sul secondo fattore un insieme B e si trova una traslazione u, tali che $(B \cup B_u) \cap Y = \emptyset, \lambda (B) > 0$ e $B \cap B_u = \emptyset$.

I due insiemi

$$(A \times B) \cup (A \times B)_{(t,u)} \text{ e}$$

$$(A_t \times B) \cup (A \times B_u)$$

hanno le due radiografie uguali e sono entrambi disgiunti da F. Ne segue che

$$F' = F \cup (A \times B) \cup (A \times B)_{(t,u)} \text{ e}$$

$$F'' = F \cup (A_t \times B) \cup (A \times B_u)$$

hanno radiografie uguali, e quindi $F' \notin \mathcal{U}$. D'altra parte risulta $\lambda^2 (F \Delta F') \leq 2\lambda^2 (A \times B)$ e poiché $A \times B$ può essere preso di misura piccola quanto si vuole, si ha la tesi.

PROBLEMA. Con il teorema 7 si è dimostrato tra l'altro che l'applicazione che associa ad F la coppia di insiemi (F_x, F_y) è continua. Tale applicazione ristretta ad $\mathcal{U}$, è iniettiva e quindi invertibile. E' naturale porre la seguente domanda: la sua inversa è continua?

OSSERVAZIONE. In [15] si è dimostrato che l'insieme dei corpi convessi che non sono univocamente determinati (tra i corpi convessi) da due radiografie, è di prima categoria.

Il corollario precedente mostra che la situazione è radicalmente diversa nell'ambito degli insiemi misurabili: l'analogo insieme (il complemento di $\mathcal{U}$) è un aperto denso.

5. Osservazioni finali e problemi aperti

Gli argomenti trattati nei paragrafi precedenti portano naturalmente a due serie di questioni. La prima consiste nel prendere in considerazione più di due direzioni.

Ci si può allora chiedere:

1) Quali sono le condizioni di compatibilità per le radiografie in 3, 4, ..., n direzioni assegnate?

2) Come è possibile caratterizzare quegli insiemi che sono univocamente determinati da n radiografie? E' possibile trovare l'analogo delle componenti scambiabili, degli insiemi additivi, degli insiemi che risultano "unione incastrata" di insiemi di tipi particolarmente semplice, l'analogo della condizione di Lorentz?

3) Trovare una formula ricostruttiva.

Una seconda serie di questioni si pone invece se si sostituisce al concetto di radiografia fin qui usato quella (peraltro abbondantemente presente in letteratura [10]) di radiografia presa da un punto al finito. Più precisamente, se $P \in \boldsymbol{R}^2$, se si fissa una retta passante per P e si denota con $L(\theta)$ la retta passante per P che forma l'angolo θ con la retta di riferimento, la radiografia dell'insieme misurabile F è la funzione della θ

$$\int_{L(\theta)} 1_F ds.$$

Possiamo allora chiederci:

Se di un insieme di misura finita F conosciamo due radiografie prese da P_1 e P_2, valgono risultati analoghi a quelli visti nei paragrafi precedenti per una coppia di radiografie "prese da due punti all'infinito"?

Anche in questo contesto si pongono le questioni 1), 2) e 3) citate sopra in relazione a più di due radiografie.

Pochi sono i risultati noti sia in relazione a più radiografie [9] sia in relazione a radiografie prese da punti al finito.

R. Gardner ha recentemente comunicato di aver esteso la definizione di additività al caso di più direzioni, dimostrando che se

$$F = \{(x,y) : \sum_{k=1}^{n} f_k\,(a_k x + b_k y) \geq 0\},$$

dove f_k sono delle funzioni misurabili, allora F è univocamente determinato dalle radiografie nelle n direzioni delle rette $a_k x + b_k y = 0$. Non si sa però se tale condizione sia anche necessaria per l'univocità.

U. Brehm [1] si è interessato invece al problema delle radiografie prese da punti al finito, dimostrando che comunque si prende un insieme finito di punti a tre a tre non allineati, esiste un insieme di misura finita non univocamente determinato dalle radiografie corrispondenti. La dimostrazione è costruttiva e produce esempi espliciti.

Un'ultima cosa nota è che l'analogo della condizione c) del teorema 3 è sufficiente perché un insieme sia univocamente determinato da due radiografie prese P_1 e P_2. Si può anzi dimostrare un risultato più forte, analogo al teorema 5.

Diremo "cono misurabile" di vertice P un insieme che, in un sistema di riferimento polare centrato in P, si rappresenti come

$$C = \{(\rho,\theta) : \theta \in A\}$$

con A sottoinsieme misurabile di $[0, 2\pi]$.

Dati due punti P_1 e P_2, chiameremo quadrangolo misurabile ammissibile un insieme del tipo $Q = C_1 \cap C_2$, dove C_1 e C_2 sono due coni misurabili di vertice P_1 e P_2, rispettivamente, tale che

$$\iint_Q \frac{dx\,dy}{|y|} < \infty,$$

dove $y = 0$ è l'equazione della retta P_1P_2.

Diremo che $F = \bigcup_{\alpha} Q_\alpha$ è una unione incastrata di quadrangoli misurabili ammissibili, se per ogni coppia di indici α, β, risulta

$C_1^\alpha \supset C_1^\beta$ oppure $C_1^\alpha \subset C_1^\beta$ e, nel primo caso, $C_2^\alpha \subset C_2^\beta$ e nel secondo $C_2^\alpha \supset C_2^\beta$.

Vale allora il seguente teorema:

TEOREMA 10. *Se F è riunione incastrata di quadrangoli misurabili ammissibili, allora F è univocamente determinato dalle due radiografie prese nei punti P_1 e P_2, rispettivamente.*

La dimostrazione segue lo schema di quella del teorema 5, con l'unica ma importante variante che consiste nel considerare, al posto della misura di Lebesque, la misura

$$\mu(A) = \iint_A \frac{dx\,dy}{|y|}.$$

Questa idea è già stata utilizzata in un contesto simile in [17], teorema 2.3.

BIBLIOGRAFIA

[1] U. BREHM, *Non-uniqueness results for X-ray problems with point sources*, preprint.

[2] A.M. CORMACK, *Representation of a funciton by its line integrals, with some radiological applications*, J. Appl. Phys., *34* (1963), 2722- 2727.

[3] P. FUNK, *Über eine geometrische Anwendung der Abelschen Integralgleichung*, Math. Annalen, *77* (1916), 129-135.

[4] S. HELGASON, *The Radon transform*, Birkhäuser (1980).

[5] G.N. HOUNSFIELD, *Computerized axial scanning tomography*, Part I, description of the system, Br. J. Radial., *46* (1973), 1016-1022.

[6] H.G. KELLERER, *Massteoretische marginal Probleme*, Math. Annalen, *153* (1964), 168-198.

[7] A. KUBA, A. VOLČIČ, *Characterization of measurable plane sets which are reconstructable from their two projections*, Inverse Problems, *4* (1988), 513-527.

[8] G.G. LORENTZ, *A problem of plane measure*, Am. J. Math., *71* (1949), 417-426.

[9] S. MARX, *Schnittmassprobleme in R^d bezüglich endlich vieler Teilräume*, Diplomarbeit, Erlangen (1988).

[10] F. NATTERER, *The mathematics of computerized tomography*, Wiley (1986).

[11] J. RADON, *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, Berichte Sächsische Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl., *69* (1917), 262-267.

[12] J.A. REEDS, L.A. SHEPP, P.C. FISHBURN, J.C. LAGARAS, *Sets uniquely determined by projections*, Technical Memorandum. AT&T Bell Laboratories (1986).

[13] V. STRASSEN, *The existence of probability measures with given marginals*, Ann. Math. Stat., *36* (1965), 423-439.

[14] A. Volčič, T. Zamfirescu, *Ghost are scarse*, J. London Math. Soc. (2) *40* (1989), 171-178

[15] A. Volčič, *Ghost convex bodies*, Boll. U.M.I., (6) *4*-A (1985), 287-292.

[16] A. Volčič, *Tomography of convex bodies and inscribed polygons*, Ricerche di Mat. Vol. XXXVI (1987), 185-192.