IL PROBLEMA DI CAUCHY PER UNA CLASSE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI A DERIVATE PARZIALI CON COEFFICIENTI DISCONTINUI(*)

di LUCIANO DE SIMON e GIOVANNI TORELLI (a Trieste)(**)

Alla Memoria di Ugo Barbuti

SOMMARIO.- *In questo lavoro si studiano equazioni della forma*

$$(°) \qquad u_t + \Sigma\, a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

in cui i coefficienti $a_i\ (t, x_1, ..., x_n)$ *possono essere discontinui e per le quali viene adottata una particolare nozione di soluzione di tipo generalizzato già introdotta in un precedente lavoro. Si dimostra che il problema di Cauchy associato a (°) con dato iniziale di classe* $C°$ *ha una ed una sola soluzione di classe* $C°$. *I risultati precedentemente ottenuti vengono così estesi a situazioni alquanto più generali relativamente alle condizioni imposte sul comportamento delle discontinuità dei coefficienti* a_i. *L'ipotesi fondamentale richiede, sostanzialmente, che ogni eventuale linea fatta di punti di discontinuità per i coefficienti* a_i *verifichi una certa "condizione di trasversalità" (di cui verosimilmente non è possibile fare a meno) rispetto al campo vettoriale definente le caratteristiche di (°).*

SUMMARY.- *In this paper we study first order evolution equations of the form*

$$(°) \qquad u_t + \Sigma\, a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

where the coefficients $a_i\ (t,x_1, ..., x_n)$ *may be discontinuous. The solutions of (°) are intended in some weak sense, as introduced in a previous work on the same subject. We prove the existence and uniqueness of* $C°$ *solution of the Cauchy's problem associated to the equation (°) with* $C°$ *initial condition. The previous results are so extended to much more general situations relative to the behaviour of the discontinuities of the coefficients* a_i, *provided that each line (if any) which consists of points of discontinuity for the vectorfield defining the characteristics of (°) fulfilles some "transversality condition" (which seemingly cannot be omitted) with respect to the above vectorfield.*

(*) Lavoro eseguito presso il Dipartimento di Scienze Matematiche dell'Università di Trieste, Piazzale Europa 1, 34100 Trieste (Italy).

(**) Il Prof. Giovanni Torelli, coautore della presente pubblicazione, purtroppo non è più tra noi. Il lavoro (pervenuto in Redazione il 4 aprile 1990) viene perciò pubblicato così come era stato sviluppato all'epoca della Sua improvvisa prematura scomparsa.

1. Introduzione

In questo lavoro viene ripreso ed approfondito lo studio dell'esistenza di soluzioni (deboli) continue per un'equazione differenziale lineare a derivate parziali con coefficienti discontinui del tipo omogeneo:

$$\mathcal{L}(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \Sigma_i a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0. \tag{1.1}$$

Come è noto, la sola continuità dei coefficienti a_i non è in generale sufficiente a garantire l'esistenza di soluzioni di (1.1). E' perciò ben fondato, nel caso di coefficienti discontinui, compensare la discontinuità degli stessi con ipotesi che assicurino una certa regolarità degli a_i "fuori dalla zona di discontinuità" e, nel contempo, permettano di "controllare" le discontinuità stesse.

Tali ipotesi possono essere essenzialmente di natura globale, come in [1], oppure di natura locale, come in [3] e [4]. In questi ultimi due lavori(1) la soluzione del problema di Cauchy associato a (1.1) viene ottenuta, come nel caso in cui i dati sono sufficientemente regolari, col metodo delle caratteristiche. Detto in termini intuitivi, tale metodo consiste nel "trasmettere" lungo le linee di flusso del campo vettoriale definito dai coefficienti a_i, i valori che la soluzione assume per un fissato valore t_0, della variabile t, e che si suppongono assegnati. Le ipotesi fatte consistono sostanzialmente in una condizione di regolarità locale dei coefficienti. Tale condizione implica, tra l'altro, che l'angolo secondo cui ogni linea regolare contenuta nell'insieme (dei punti) di discontinuità dei coefficienti taglia le parallele all'asse delle "t", non può essere inferiore ad una quantità che dipende dal "salto" dei coefficienti stessi nel punto considerato.

Nella presente nota i risultati ottenuti nei lavori precedenti vengono estesi a situazioni più generali e tuttavia molto significative. Ovviamente non è escluso che le ipotesi assunte si possano ulteriormente raffinare, anche se, nell'impostazione data, sembra difficile che ciò si possa fare in modo naturale. Si viene così a comprendere, ad esempio, il caso in cui i punti di discontinuità per i coefficienti possono stare su un tratto di retta parallela all'asse delle "t" ed il caso in cui le caratteristiche hanno, in qualche punto, tangente ortogonale a tale asse. Questi casi non rientrano nelle ipotesi considerate in [1], [3] e [4].

---

(1) e parzialmente anche in [1].

2. Notazioni, considerazioni preliminari e posizione del problema

Nel presente lavoro useremo le notazioni di [3] e [4], che per comodità richiamiamo brevemente.

Detto $\boldsymbol{R}$ l'insieme dei reali, indichiamo con $(.|.)$ l'ordinario prodotto scalare in $\boldsymbol{R}^n$ con n intero positivo e, per $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \boldsymbol{R}^n$, porremo $|x| = \{\Sigma_i x_i^2\}^{1\backslash 2}$. Per ogni $E \subset \boldsymbol{R}^n$ indichiamo, rispettivamente con $\overline{E}$, $\mathring{E}$ e $\partial E = \overline{E} \backslash \mathring{E}$ chiusura, interno e frontiera di E. Se Ω è un qualunque aperto di $\boldsymbol{R}^n$, $C^i(\Omega)$ $(i = 0, 1, 2, ...)$ è l'insieme delle funzioni continue su Ω con tutte le derivate almeno fino all'ordine i, $C^i(\overline{\Omega})$ consta di tutti gli elementi di $C^i(\Omega)$ prolungabili con continuità a $\overline{\Omega}$ assieme a tutte le derivate almeno fino all'ordine i; infine $C_\circ^i(\Omega)$ è costituito dalle funzioni di $C^i(\Omega)$ a supporto compatto. Converremo che le funzioni di $C_\circ^i(\Omega)$ sono definite su tutto $\boldsymbol{R}^n$ con valori nulli fuori di Ω.

Siano dati un punto $\bar{z} = (\bar{t}, \bar{x}) \in \boldsymbol{R}_t \times \boldsymbol{R}_x^n = \boldsymbol{R}^{n+1}$, un versore $\underline{v}$ formante un angolo maggiore di $\pi/2$ con l'asse delle "t" orientato nel verso delle t crescenti e due numeri, $h > 0$ e $p \in]0, 1[$. Diremo cono (aperto) di vertice $\bar{z}$, asse $\underline{v}$, altezza h e parametro di apertura p l'insieme:

$$K = K(\bar{z}, \underline{v}, h, p) = \{z \in \boldsymbol{R}^{n+1} : p\ |z - \bar{z}| < (z - \bar{z} \,|\, \underline{v}) \leq h; t < \bar{t}\}.$$

L' insieme:

$$\mathcal{B}_K = \mathcal{B}(\bar{z}, \underline{v}, h, p) = \{z \in \boldsymbol{R}^{n+1} : p\ |z - \bar{z}| < (z - \bar{z} \,|\, \underline{v}) = h; t < \bar{t}\}$$

si dirà base di K.

D'ora in poi supporremo dati l'intero positivo n ed un numero reale $T > 0$. Posto $S =]0, T] \times \boldsymbol{R}^n$, sia $a(t,x) = (a_1(t,x), ..., a_n(t,x))$, $(t,x) \in \overline{S}$ una applicazione misurabile $\overline{S} \to \boldsymbol{R}^n$ verificante le seguenti condizioni:

(i) esiste una funzione $\Psi(t) \in L_1(0, T)$ tale che $|a(t,x)| < \Psi(t)$ quasi ovunque in S;

(ii) per ogni $\bar{z} = (\bar{t}, \bar{x}) \in S$ esiste un cono $K = K(\bar{z}, \underline{v}, h, p)$ ed una "mezza palla" aperta di centro z e raggio $\rho > 0$:

$$P(\bar{z}) = \{z = (t,x) : |z - \bar{z}| < \rho; t < \bar{t}\}$$

tale che, posto $A(t,x) = -(1, a_1(t,x), ..., a_n(t,x))$ sia, per ogni $(t,x) \in P(\bar{z})$:

$$(A(t,x) \,|\, \underline{v}) \geq \alpha\ |A(t,x)|$$

con $\alpha > p$;

(iii) la restrizione di $a\ (t,x)$ a K verifichi la seguente condizione:

a) per ogni x, $a\ (.,x)$ è misurabile e, per quasi ogni t, $a\ (t,.)$ è continua;

b) per ogni $x_1, x_2, \in R^n$ sia $|(a\ (t,x_1) - a\ (t,x_2)\ |\ x_1 - x_2)| <$
$< \lambda\ (t)\ |x_1 - x_2|^2$ con $\lambda\ (t)$ sommabile.

Si noti che b) equivale a supporre che per ogni $i \in \{1, 2, ..., n\}$ la funzione $a_i\ (t,x)$ sia lipschitziana rispetto ad x_i con costante di Lipschitz sommabile rispetto a t. Ciò, tra l'altro assicura l'esistenza quasi ovunque in K delle derivate $\partial a_i/\partial x_i$ e la loro sommabilità.

Fissato $z \in S$, diremo $\Lambda\ (z)$ la totalità dei coni rispetto ai quali la funzione $a\ (t,x)$ verifica (ii) e (iii) e porremo $\Lambda = \bigcup_{z \in S} \Lambda\ (z)$.

Infine, in corrispondenza ad ogni cono $K \in \Lambda$, definiamo il seguente operatore lineare di $C_\circ^1\ (K)$ in $L_1\ (K)$:

$$\mathfrak{L}_K^*: v \to \partial v/\partial t + \sum_1^n{}_i\ \partial\ (v\ a_i)/\partial x_i .$$

Nel seguito, ove non sussistano ambiguità, scriveremo $\mathfrak{L}^*$ in luogo di $\mathfrak{L}_K^*$.

Nella prima parte di questo lavoro considereremo il seguente problema di Cauchy:

data $u_\circ\ (x) \in C^\circ\ (R^n)$, trovare $u\ (t,x) \in C^\circ\ (S)$ tale che:

(2.1)

$$\begin{cases} (2.1.1) \quad \forall z \in S\ \exists K \in \Lambda\ (z): \ \int_K u(t,x)\ \mathfrak{L}^*\ (v)\ (t,x) dt\, dx = 0\ \forall\ v \in C_\circ^1\ (K) \\ (2.1.2) \quad u(0,x) = u_\circ\ (x)\ . \end{cases}$$

Diremo che ogni u verificante (2.1) è soluzione debole locale dell'equazione (formale) $\mathfrak{L}\ (u) = 0$ con la condizione iniziale $u\ (0,x) = u_\circ\ (x)$.

E' facile verificare che, nel caso in cui i dati sono sufficientemente regolari (ad esempio C^1), il problema (2.1) è equivalente al problema di Cauchy per l'equazione differenziale $\mathfrak{L}\ (u) = 0$ con la condizione iniziale (2.1.2).

Ricordiamo ancora che, in quest'ultimo caso, la soluzione si può ottenere col metodo delle caratteristiche consistente, grosso modo, nel "propagare" i valori assegnati ad $u\ (t,x)$ all'istante iniziale, lungo le linee di flusso del campo vettoriale definito in S dalla funzione $A\ (t,x)$ introdotta in (ii). Proveremo che anche nel nostro caso il campo vettoriale associato ad $A\ (t, x)$ ammette linee di flusso (in generale dotate di tangente solo quasi ovunque) e che la soluzione di (2.1) esiste ed è costante lungo tali linee.

Tenuto conto che tali linee di flusso si ottengono risolvendo la cosiddetta equazione delle caratteristiche associata al problema (1.1):

(2.2.1) $$dg/ds = a\ (s, g\ (s)) \quad 0 \leq s \leq t \leq T;$$

consideriamo, in accordo con quanto sopra detto, soluzioni nel senso di Carathéodory e cioè:

2.1 DEFINIZIONE. *Una funzione* $g\ (s)$ $(0 \leq s \leq t \leq T)$ *si dirà soluzione di* (2.2.1) *(nel senso di Carathéodory) se è assolutamente continua e verifica quasi ovunque l'equazione stessa su* $[0, t]$.

Come si vede facilmente, per ogni $(t, x) \in S$, il problema di Cauchy relativo alla (2.2.1) con la condizione iniziale

(2.2.2) $$g\ (t) = x$$

è equivalente all'equazione integrale

(2.3) $$g\ (s) = x + \int_t^s a\ (\tau, g\ (\tau))\ d\,\tau.$$

Nel caso di unicità di soluzione per (2.3), indicheremo con $g\ (s; t, x)$ tale soluzione.

Nel seguito faremo riferimento anche ad un altro tipo di soluzioni per equazioni come (2.2.1) con secondo membro discontinuo e precisamente alla nozione di soluzione introdotta da Filippov in [2], cui rinviamo per i dettagli. In tale lavoro si prova che se $a\ (.,.)$ verifica una condizione di Carathéodory (2) allora la nozione di soluzione secondo Carathéodory coincide con quella di Filippov.

Nelle nostre ipotesi vale la condizione di Carathéodory nei coni $K \in \Lambda$ e quindi, come facilmente si verifica, continua a sussistere la coincidenza tra le soluzioni di Carathéodory e quelle di Filippov in tutto $[0, t]$.

---

(2) Cioè (i) e la parte a) di (iii)

2.2 PROPOSIZIONE. *Comunque si consideri un cono $K \in \Lambda$, per ogni punto $(\xi, \eta) \in K$ passa una unica linea integrale dell'equazione* (2.2.1) *ristretta a* K.

Dimostrazione: Per le (i) e (iii), $a(t,x)$ verifica in K le condizioni di Carathéodory che assicurano l'esistenza locale di almeno una soluzione della (2.3) con $t = \xi, x = \eta$. Se $g_1(s)$ e $g_2(s)$ sono due diverse soluzioni di tale problema si ha, tenuto conto di (iii):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}|g_1(s) - g_2(s)|^2 = \big(g_1(s) - g_2(s) \mid g'_1(s) - g'_2(s)\big) =$$

$$= \big(g_1(s) - g_2(s) \mid a(s, g_1(s)) - a(s, g_2(s))\big) \leq \lambda(s)\, |g_1(s) - g_2(s)|^2$$

da cui integrando tra ξ e t

$$|g_1(t) - g_2(t)|^2 \leq 2 \int_\xi^t \lambda(\tau)\, |g_1(\tau) - g_2(\tau)|^2\, d\tau + |g_1(\xi) - g_2(\xi)|^2$$

e quindi, per il lemma di Gronwall

$$|g_1(t) - g_2(t)|^2 \leq |g_1(\xi) - g_2(\xi)|^2 \exp\{2 \textstyle\int_\xi^t \lambda(\tau)\, d\tau\}. \tag{2.4}$$

Essendo $g_1(\xi) = g_2(\xi)$, si ha che le due funzioni devono coincidere su ogni intervallo comune di definizione. Osserviamo ancora che, detto $]\xi_1, \xi_2[$ il massimo intervallo di definizione di $g(s)$, è possibile prolungare per continuità tale funzione a $[\xi_1, \xi_2]$. Infatti, considerati due punti $s_1, s_2 \in\,]\xi_1, \xi_2[$ si ha, dalla disuguaglianza

$$|g(s_1) - g(s_2)| \leq \Big|\int_{s_1}^{s_2} \Psi(t)\, dt\Big|,$$

che è verificata la condizione di Cauchy per l'esistenza dei limiti:

$$g(\xi_1) := \lim_{s \to \xi_1^+} g(s) = \int_t^{\xi_1} a(\tau, g(\tau))\, d\tau \tag{2.5}$$

$$g(\xi_2) := \lim_{s \to \xi_2^-} g(s) = \int_t^{\xi_2} a(\tau, g(\tau))\, d\tau.$$

Per la (2.5) $g(s)$ è assolutamente continua su tutto $[\xi_1, \xi_2]$.
Infine, per la (ii) è $(\xi_1, g(\xi_1)) \in \mathcal{B}_K$ e $(\xi_2, g(\xi_2)) \in \partial K \setminus \mathcal{B}_K$.

Sempre per (2.4), due diverse linee integrali non possono avere punti comuni neppure in $\bar{K}$.

2.3 PROPOSIZIONE. *Ferme le ipotesi fatte su* $a(t,x)$, *per ogni* $\bar{z} = (\bar{t}, \bar{x}) \in S$ *esiste ed è unica, in un opportuno intorno sinistro di* $\bar{t}$, *la soluzione* $g(s)$ *dell'equazione delle caratteristiche* (2.2.1) *con la condizione iniziale* $g(\bar{t}) = \bar{x}$.

Dimostrazione: Siano K un cono di asse $\underline{v}$ appartenente a $\Lambda(\bar{z})$ e $w(t)$ il vettore $(t - \bar{t}, g(t) - \bar{x})$. Come è stato osservato si ha

$$g(s) = \bar{x} + \int_{\bar{t}}^{s} a(\tau, g(\tau)\, d\tau \qquad (s < \bar{t})$$

e quindi, potendosi applicare la (ii) per $\bar{t} - s$ sufficientemente piccolo:

$$(w(s) \mid \underline{v}) = (\int_s^{\bar{t}} A(\tau, g(\tau))\, d\tau \mid \underline{v}) =$$

$$= \int_s^{\bar{t}} (A(\tau, g(\tau)) \mid \underline{v})\, d\tau \geq \alpha \int_s^{\bar{t}} |A(\tau, g(\tau))|\, d\tau > p\, |w(s)|.$$

Dunque per gli s abbastanza vicini a $\bar{t}$ è $w(s) \in K \cup \{\bar{z}\}$. Ma le caratteristiche contenute in $\bar{K}$ non hanno punti in comune e pertanto la (2.3) ha, al più, una sola soluzione locale a sinistra di $\bar{t}$.

L'esistenza si può provare con tecniche usuali, ad esempio col teorema di Schauder.

2.4 TEOREMA. *Se la funzione* $a(t,x)$ *verifica le condizioni* (i), (ii), (iii), *allora, per ogni* $(\bar{t}, \bar{x}) \in S$ *il problema di Cauchy* (2.3) *ha, su* $[0, \bar{t}]$, *un'unica soluzione* $g(s; \bar{t}, \bar{x})$. *Per ogni* $\bar{t} \in]0, t[$, $g(.; t, \bar{x})$ *dipende con continuità da* $(\bar{t}, \bar{x})$ *nella topologia di* $L_\infty([0, \bar{t}])$.

Dimostrazione: Per la Proposizione 2.3, il problema (2.3) ha, a sinistra di $\bar{t}$, una sola soluzione locale $g(s)$. Detto t^* l'estremo inferiore dei t tali che la soluzione esiste su $[t, \bar{t}]$, si ha, tenuto conto della (i) e della (2.3):

$$|g(t) - \bar{x}| \leq \int_t^{\bar{t}} \Psi(\tau)\, d\tau \leq \int_0^{T} \Psi(\tau)\, d\tau = M.$$

Dunque $g(t)$ è limitata; inoltre, con lo stesso ragionamento svolto in Prop. 2.2 si vede che esiste $g(t^*) = \int_{t^*}^{\bar{t}} a(\tau, g(\tau))\, d\tau + \bar{x}$.

Ma allora $g\,(s)$ è prolungabile a sinistra di t^* in una funzione assolutamente continua, verificante quasi ovunque (2.2.1), e quindi dev'essere $t^* = 0$.

L'unicità su $[0, \bar{t}]$ è conseguenza dell'unicità locale a sinistra.

La dipendenza continua dai dati iniziali $(\bar{t}, \bar{x})$ è assicurata dalla condizione (i) e dall'unicità. Infatti in questo caso si può applicare un risultato molto generale contenuto nel già citato lavoro di Filippov [3].

3. Esistenza della soluzione

Prendiamo in considerazione ora il problema (2.1); vogliamo dimostrare che ammette soluzioni.

A tal fine trasformiamo i coefficienti $a_i\,(t, x)$ mediante convoluzione con delle funzioni:

$$\Theta_\varepsilon\,(t,x) = \vartheta_\varepsilon\,(t).\,\vartheta_\varepsilon\,(x_1)\ldots\,\vartheta_\varepsilon\,(x_n)$$

ove $\vartheta_\varepsilon\,(\xi) \in C_\circ^\infty(R)$ $(\xi \in R)$ è una funzione non negativa, avente per supporto $[-\varepsilon, \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ e tale che

$$\int_R \vartheta_\varepsilon\,(\xi)\, d\xi = 1\,^{(4)}.$$

Per $f \in L_1$, indicheremo con $f^\varepsilon = f * \Theta_\varepsilon$ la convoluzione fra f e Θ_ε e converremo che $f^\circ = f$.

In relazione alla funzione regolarizzata $a^\varepsilon = a * \Theta_\varepsilon$ indicheremo con $g_\varepsilon\,(s; t, x)$ $(\varepsilon \geq 0)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{cases} dg_\varepsilon/ds = a^\varepsilon\,(t, g_\varepsilon) \\ g_\varepsilon\,(t; t, x) = x\ . \end{cases}$$

Si fissi un cono $K \in \Lambda$. Per ogni $(t, x) \in K$ si consideri il tratto di caratteristica rappresentata da $g_\varepsilon\,(s;\, t, x)$ che sta in K. Allora essendo K aperto e per la dipendenza continua dai dati iniziali riesce

---

(3) Vedasi [2] teorema 11 pag. 219.

(4) Posto $\vartheta\,(\xi) = 0$ se $|\xi| \geq 1$ e $\vartheta\,(\xi) = \exp\,\{(\xi^2 - 1)^{-1}\}$ se $|\xi| \leq 1$, possiamo assumere $\vartheta_\varepsilon\,(\xi) = k_\varepsilon\,\vartheta\,(\frac{\xi}{\varepsilon})$ con k_ε tale che

$$k\varepsilon \int_R \vartheta\,(\xi/\varepsilon)\, d\xi = 1.$$

$(s, g(s; t+h, x+k)) \in K$ per ogni $h \in \boldsymbol{R}$ e ogni $k \in \boldsymbol{R}^n$ sufficientemente piccoli.

In relazione a tali h e k si ha:

3.1 LEMMA. *Per ogni $\varepsilon \in [0,1]$ vale, per le $g_\varepsilon(s; t, x)$, una disuguaglianza del tipo:*

$$|g_\varepsilon(s; t+h, x+k) - g_\varepsilon(s; t, x)| \leq \lambda\ |k| +$$

$$+ \lambda \int_s^{s+h} \Psi^\varepsilon(\tau)\, d\tau \leq \lambda\ |k| + 0(h)$$

con $0(h)$ *infinitesimo con h e non dipendente da* ε.

Dimostrazione: Consideriamo dapprima il caso $h = 0$.
Come si vede facendo gli opportuni calcoli, risulta in K:

$$\left(a^\varepsilon(t, x') - a^\varepsilon(t, x'')\ |\ x' - x''\right) \leq \lambda^\varepsilon(t)\ |x' - x''|^2 \quad (5)$$

Posto $g_{\varepsilon_k}(s) = g_\varepsilon(s; t, x+k)$ si ha:

$$\left(g_{\varepsilon_k}(s) - g_\varepsilon(s)\ |\ g'_{\varepsilon_k}(s) - g'_\varepsilon(s)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\, |g_{\varepsilon_k}(s) - g_\varepsilon(s)|^2 =$$

$$= \left(g_k(s) - g(s)\ |\ a^\varepsilon(s, g_{\varepsilon_k}(s)) - a^\varepsilon(s, g_\varepsilon(s))\right).$$

Integrando fra t ed s e tenendo conto della (iii) si ha:

$$|g_{\varepsilon_k}(s) - g_\varepsilon(s)|^2 \leq |g_{\varepsilon_k}(t) - g_\varepsilon(t)|^2 + 2\int_t^s \lambda^\varepsilon(\tau)\ |g_{\varepsilon_k}(\tau) - g_\varepsilon(\tau)|\, d\tau$$

e quindi per Gronwall

---

(5) Si noti che

$$\lambda^\varepsilon(t) = \int_{\mathbf{R}} \lambda(\tau)\, \vartheta_\varepsilon(t-\tau)\, d\tau = \int_{\boldsymbol{R}^{n+1}} \lambda(\tau)\, \vartheta_\varepsilon(t-\tau)\, \vartheta_\varepsilon(x_1 - \xi_1) \ldots \vartheta_\varepsilon(x_n - \xi_n)\, d\tau\, d\xi_1 \ldots d\xi_n$$

In altre parole il prodotto di convoluzione $\lambda * \vartheta_\varepsilon$ in $\boldsymbol{R}$ è uguale al prodotto di convoluzione in $\boldsymbol{R}^{n+1}$.
Ovviamente si conviene che sia $\lambda(t) = 0$ per $t \notin [0, T]$.

$$(3.2)\qquad |g_{\varepsilon_k}(s) - g_\varepsilon(s)|^2 \leq |g_{\varepsilon_k}(t) - g_\varepsilon(t)|^2 \exp\left\{2\int_0^T \lambda^\varepsilon(\tau)\,d\tau\right\} =$$

$$= \lambda^2\ |k|^2 \quad \text{con } \lambda = \exp\left\{\int_0^T \lambda(\tau)\,d\tau\right\}. \text{ (6)}$$

Indicando ora con $g_{\varepsilon_h}(s)$ la funzione $g_\varepsilon(s; t+h, x)$ si ha, tenuto conto che $g_\varepsilon(s; t+h, x) = g_\varepsilon(s; t, g_{\varepsilon_h}(t))$ e per (3.2):

$$|g_{\varepsilon_h}(s) - g_\varepsilon(s)| \leq \lambda\ |x - g_h(t)| =$$

$$= \lambda\ \left|\int_{t+h}^t a^\varepsilon(\tau, g_{\varepsilon_h}(\tau))\,d\tau\right| \leq \lambda\ \left|\int_{t+h}^t \Psi^\varepsilon(\tau)\,d\tau\right|.$$

Risulta poi

$$\int_{t+h}^t \Psi^\varepsilon(\tau)\,d\tau = \int_{t+h}^t d\tau \int_R \Psi(\tau - \xi)\,\vartheta_\varepsilon(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_R \vartheta_\varepsilon(\xi)\,d\xi \int_{t+h-\xi}^{t-\xi} \Psi(\eta)\,d\eta.$$

Per l'uniforme continuità di $F(t) = \int_0^t \Psi(\eta)\,d\eta$, l'integrale $\left|\int_{t+h-\varepsilon}^{t-\varepsilon} \Psi(\eta)\,d\eta\right|$ è una funzione $0(h)$ infinitesima con h, per cui, tenendo conto che $\int_R \vartheta_\varepsilon(\xi)\,d\xi = 1$, si ottiene

$$(3.3)\qquad |g_{\varepsilon_h}(s) - g_\varepsilon(s)| \leq \lambda.\,0(h).$$

Applicando simultaneamente (3.2) e (3.3) si ha la tesi.

3.2 TEOREMA. *Data $u_\circ : R^n \to R$ continua, la funzione $u(t, x) = u_\circ(g(0; t, x))$ è soluzione di* (2.1).

(6) Infatti $\int_0^T \lambda^\varepsilon(\tau)\,d\tau = \int_R\int_R \lambda(\tau - \xi)\,\vartheta_\varepsilon(\xi)\,d\xi d\tau = \int_R d\xi \vartheta_\varepsilon(\xi) \int_R \lambda(\tau - \xi)\,d\tau =$
$= \int_R \lambda(\tau)\,d\tau = \int_0^T \lambda(\tau)\,d\tau.$

Dimostrazione: Fissato un cono $K \in \Lambda$, supponiamo dapprima che $u_\circ$ sia di classe C^1. Diamo ad ε i valori $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots$ $(k \in N)$, e indichiamo per semplicità con a_k la convoluzione $a * \Theta_{1/k}$ e con $\mathcal{L}_k$ l'operatore $v \to \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{1}^{n}{}_i\, a_{ki} \frac{\partial v}{\partial x_i}$. Corrispondentemente chiamiamo $g_k\,(.; t, x)$ la collezione di funzioni definite da (3.1). Ricordiamo, come accennato nella premessa, che in questo caso la funzione $u_k\,(t,x) = u_\circ\,(g_k\,(0; t, x))$ verifica l'equazione $\mathcal{L}_k\,(u) = 0$ con la condizione iniziale $u_k\,(0,x) = u_\circ\,(x)$ e quindi anche (2.1) sempre con $\mathcal{L} = \mathcal{L}_k$.

Poiché per le equazioni

$$dg_k/dt = a_k\,(t, g_k)$$

vale il teorema 11 di Filippov [2], si ha che $|g_k\,(.; t, x) - g\,(.; t, x)| \to 0$ $(k \to \infty)$ uniformemente rispetto a (t, x) sui compatti.

Di conseguenza, in virtù della uniforme continuità di $u_\circ$ sui compatti, la funzione $u_k\,(t,x) = u_\circ\,(g_k\,(0;t,x))$ converge verso $u\,(t,x)$ uniformemente in ogni compatto $G \subset K$.

Pertanto per ogni fissato $v \in C_\circ^1\,(K)$ risulta:

$$\int_K u_k\, \mathcal{L}^*\,(v)\, dt\, dx \to \int_K u\, \mathcal{L}^*\,(v)\, dt\, dx.$$

D'altra parte,

$$\int_K u_k\, \mathcal{L}^*\,(v)\, dt\, dx \to 0.$$

Infatti, essendo $\mathcal{L}_k\,(u_k) = 0$, riesce

$$\int_K u_k\, \mathcal{L}_k^*\,(v)\, dt\, dx = 0$$

e quindi

$$|\int_K u_k\, \mathcal{L}^*\,(v)\, dt\, dx| = |\int_K u_k\, (\mathcal{L}^*\,(v) - \mathcal{L}_k^*\,(v))\, dt\, dx\ | \leq$$

$$\leq H\, \{\int_K \sum_{1}^{n}{}_i\, |\frac{\partial a_i}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_i}|\ |v|\, dt\, dx + \int_K \sum_{1}^{n}{}_i\, |a_i - a_{ki}|\ |\frac{\partial v}{\partial x_i}|\, dt\, dx\} \leq$$

$$\leq H \|v\|_\infty \sum_1^n{}_i \; \|\frac{\partial a_i}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_i}\|_{L_1} + H \sum_1^n{}_i \; \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_\infty \; \|a_i - a_{ki}\|_{L_1} \,.$$

Poiché $a_{ki} \to a_i$ e $\frac{\partial a_{ki}}{\partial x_i} \to \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$ in L_1 (K), si ha l'asserto, e cioè che

$$\int_K u \, \mathcal{L}^* (v) \, dt \, dx = 0.$$

Nel caso generale in cui è $u_\circ \in C^\circ (R^n)$, esiste una successione di funzioni $u_{\circ\, m} \in C^1 (R^n)$ convergente uniformemente sui compatti verso $u_\circ$. Consideriamo un qualunque compatto $G \subset K$; per la continuità dell'applicazione $(t, x) \to g\,(0; t, x)$, si ha che al variare di (t, x) in G il punto $g\,(0; t, x)$ si mantiene in un compatto di R^n. Pertanto $u_m \;(t, x) \;:=\; u_{\circ\, m} \,(g\,(0; t, x))$ converge uniformemente in G verso $u \;(t, x) \;:=\; u_\circ \,(g\,(0; t, x))$.

Da ciò segue ovviamente:

$$0 = \int_K u_m \, \mathcal{L}^* (v) \, dt \, dx \to \int_K u \, \mathcal{L}^* (v) \, dt \, dx \qquad \forall \, v \in C_\circ^1 (K).$$

Data l'arbitrarietà di $K \in \Lambda$, il teorema è completamente provato.

4. Unicità della soluzione

Per $K \in \Lambda$ sia $\mathcal{N}_K = \partial K \setminus \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ è la base del cono K come definita nel paragrafo 2.); indichiamo con $\mathcal{H}_K$ o, in casi non ambigui, con $\mathcal{H}$ la collezione delle funzioni appartenenti a C^1 (K) che si annullano in un intorno aperto (rispetto alla topologia indotta da R^{n+1} su $\bar{K}$) di $\mathcal{N}_K$.

4.1 LEMMA. *Ogni cono $K\,(z, \underline{v}, h, p)$ contiene un cono $K_\delta\,(z, \underline{v}, h - \delta, p)$, con $\delta \geq 0$ e piccolo quanto si vuole, per il quale esiste un funzionale $C\,(.) : \mathcal{H}_{K_\delta} \to R$ tale che per ogni $u \in C^\circ\,(\bar{K})$ e verificante le uguaglianze*

$$\int_{K_\delta} u \, \mathcal{L}^* (v) \, dt \, dx = 0 \qquad \forall \, v \in C_\circ^1 (K_\delta)$$

riesce per, $\forall \, v \in \mathcal{H}_{K_\delta}$

$$\|u \mathcal{L}^* (v)\|_{L_1 (K_\delta)} \leq C\,(v) \, \|u_{|\mathcal{B}_\delta}\|_\infty.$$

essendo $\mathcal{B}_\delta$ la base di K_δ e $u|_{\mathcal{B}_\delta}$ la restrizione di u a $\mathcal{B}_\delta$.

Dimostrazione: Detto ϑ l'angolo tra l'asse di K e l'asse delle "t", trattiamo dapprima il caso $\vartheta \neq 0$ ed assumiamo $\delta = 0$.

Fissato $v \in \mathcal{H}$ ed $\varepsilon > 0$, esistono $M > 0$, $v_1 \in \mathcal{H}$, $v_2 \in C_\circ^1(K)$ tali che $v = v_1 + v_2$ ed inoltre $v_1(z) \neq 0 \Rightarrow \text{dist}(z, \mathcal{B}) < \varepsilon$ [(7)],

$$|\partial v_1/\partial t| < M/\varepsilon, \; |\partial v_1/\partial x_i| < M/\varepsilon \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Pertanto, posto

$$S_\varepsilon = \{z \in K : \text{dist}(z, \mathcal{B}) \leq \varepsilon\},$$

ed osservato che per l'uniforme continuità di $u(z)$ vale la relazione

$$\|u_{\mathcal{B}}\|_\infty + \sigma(\varepsilon) = \max\{|u(z)|\} \quad (z \in S_\varepsilon)$$

con $\sigma(\varepsilon)$ infinitesimo per $\varepsilon \to 0$, si ha

$$|\int_K u\, \mathcal{L}^*(v)\, dt\, dx| = |\int_K u\, \mathcal{L}^*(v_1)\, dt\, dx| \leq \int_K |u|\, |\mathcal{L}^*(v_1)|\, dt\, dx =$$

$$= \int_{S_\varepsilon} |u|\, |\mathcal{L}^*(v_1)|\, dt\, dx \leq \{\|u|_{\mathcal{B}}\|_\infty + \sigma(\varepsilon)\} \int_{S_\varepsilon} \{|\partial v_1/\partial t| +$$

$$+ |a(t,x)| \sum_1^n{}_i |\partial v_1/\partial x_i| + |v_1(t,x)| \sum_1^n{}_i |\partial a_i/\partial x_i|\}\, dt\, dx \leq$$

$$\leq \{\|u|_{\mathcal{B}}\|_\infty + \sigma(\varepsilon)\}\, \{(M/\varepsilon) \int_{S_\varepsilon} (1 + n\, |a(t,x)|)\, dt\, dx +$$

$$+ \|v_1\|_\infty \int_{S_\varepsilon} \sum_1^n{}_i |\partial a_i/\partial x_i|\, dt\, dx\} \leq$$

---

(7) Siano $\varphi(\xi) \geq 0$ e ≤ 1 una funzione di classe C^∞ tale che $\varphi(\xi) = 0$ per $0 \leq \xi \leq \varepsilon/2$; $\varphi(\xi) = 1$ per $\xi \geq \varepsilon$ e $d(z)$ $(z \in K)$ la distanza di z da $\mathcal{B}$. Posto $g(z) = \varphi \circ d(z)$ si può assumere $v_2(z) = g(z)\, v(z)$; $v_1(.)$ si ottiene per differenza ed è $\|v_1\|_\infty \leq \|v\|_\infty$.

$$\leq \{\|u_{|\mathcal{B}}\|_\infty + \sigma(\varepsilon)\}\,\{M \operatorname{mis}(S_\varepsilon)/\varepsilon +$$

$$+ (nM/\varepsilon) \int_{S_\varepsilon} \Psi(t)\,dt\,dx + n\,\|v\|_\infty \int_{S_\varepsilon} \lambda(t)\,dt\,dx\,\}.$$

Inoltre riesce

$$\int_{S_\varepsilon} \lambda(t)\,dt \leq k\,\varepsilon/\operatorname{sen}\vartheta,$$

con k opportuna costante, e analoga disuguaglianza vale per

$$\int_{S_\varepsilon} \Psi(t)\,dt.$$

Consideriamo ora il caso $\vartheta = 0$. Posto $z = (t, x)$, $\bar{t} = t - h$, $\mathcal{B}$ = base di K, si ha,

$$\int_{S_\varepsilon} \lambda(t)\,dt\,dx \leq \operatorname{mis}(\mathcal{B}) \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\varepsilon} \lambda(t)\,dt.$$

Tenuto conto che $\lim \varepsilon^{-1} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\varepsilon} \lambda(t)\,dt \quad (\varepsilon \to 0)$ esiste finito per quasi ogni $\bar{t}$, possiamo affermare che, pur di aggiungere a $\bar{t}$ un $\delta \geq 0$ e piccolo quanto si vuole, le quantità

$$\varepsilon^{-1} \int_{\bar{t}+\delta}^{\bar{t}+\delta+\varepsilon} \lambda(t)\,dt \quad \text{e} \quad \varepsilon^{-1} \int_{\bar{t}+\delta}^{\bar{t}+\delta+\varepsilon} \Psi(t)\,dt$$

sono limitate. Inoltre, essendo $\varepsilon^{-1} \operatorname{mis}(S_\varepsilon) \leq \operatorname{mis}(\mathcal{B})$, si conclude che, a patto di modificare eventualmente $\bar{t}$ come sopra detto (8), esiste in entrambi i casi considerati un numero $C > 0$, dipendente da v ma non da ε, per cui

$$\|u\,\mathfrak{L}^*(v)\|_{L_1(K)} \leq \{\|u_{|\mathcal{B}_\delta}\|_\infty + 0(\varepsilon)\}\,C.$$

Essendo ε arbitrario, segue la tesi.

---

(8) e, ovviamente, ripetendo tutto il ragionamento sopra svolto sostituendo al cono K fissato inizialmente un cono K_δ come descritto nell'enunciato del lemma.

4.2 LEMMA. *Sia $\varphi(t,x) \in L_1(K)$ ed esista $\Psi(t) \in L_1(0,T)$ tale che $|\varphi(t,x)| \leq \Psi(t)$. Allora l'immagine di $\mathcal{H}$ secondo l'operatore*

$$\hat{\mathcal{L}} : v \to \mathcal{L}(v)(t,x) + \varphi(t,x)\, v(t,x)$$

è densa in $\mathcal{H}$ e quindi in $L_1(K)$.

Dimostrazione: Supponiamo dapprima $\varphi(t,x)$ regolare (ad esempio C^1).

Per $\varepsilon > 0$ consideriamo la funzione $a^\varepsilon = a^\varepsilon * \vartheta_\varepsilon$ e diciamo $\mathcal{L}_\varepsilon$ l'operatore associato ad a^ε. Qualunque sia $w \in \mathcal{H}$ esiste (ed è unica) una funzione $v_\varepsilon \in \mathcal{H}$ tale che sia,

$$\hat{\mathcal{L}}_\varepsilon v_\varepsilon = \mathcal{L}_\varepsilon v_\varepsilon + \varphi v_\varepsilon = w.$$

Tale v_ε è data da:

$$(4.1) \quad v_\varepsilon(t,x) = \int_{\bar{t}}^{t} w(\sigma, g_\varepsilon(\sigma; t,x)) \exp\left\{ \int_t^\sigma \varphi(\xi, g_\varepsilon(\xi; t,x))\, d\xi \right\} d\sigma$$

ove g_ε è la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle caratteristiche:

$$(4.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dg}{ds} = a^\varepsilon(s,g) \\ g(t;t,x) = x\ . \end{cases}$$

Tenendo conto del risultato stabilito nel lemma 3.1 e rispettivamente della condizione (i) si vede facilmente che esistono due costanti L e L_1 indipendenti da ε tali che al variare di ε sussistono per la corrispondente soluzione g_ε di (4.2) le limitazioni

$$\left|\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial x_i}\right| \leq L \qquad |g_\varepsilon| \leq L_1 \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Valendo la disuguaglianza $|\varphi(t,x)| \leq \Psi(t)$ ed essendo $w(t,x)$ limitata, e $\varphi \in C^1(\bar{K})$, si ha dalla (4.1) che $|v_\varepsilon(t,x)|$ e $|\partial v_\varepsilon / \partial x_i|$ $(i = 1, \dots, n)$ sono limitate in K da una certa costante M non dipendente da ε. Più precisamente si ha, in particolare, $\|v_\varepsilon\|_\infty \leq C' \exp\left\{ \|\Psi\|_{L_1} \right\}$ con C' indipendente da ε e da φ.

Riesce perciò:

$$\| w - \hat{\mathfrak{L}}(v_\varepsilon) \|_{L_1(K)} = \| \hat{\mathfrak{L}}_\varepsilon (v_\varepsilon) - \hat{\mathfrak{L}}(v_\varepsilon) \|_{L_1(K)} \leq$$

$$\leq \sum_1^n{}_i \int_K \left| \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right| \, |a_i^\varepsilon (t,x) - a_i(t,x)| \, dt \, dx \leq M \sum_1^n{}_i \| a_i^\varepsilon - a_i \|_{L_1(K)} \, .$$

Poiché per $\varepsilon \to 0$ $a^\varepsilon \to a$ in $L_1(K)$, si conclude, data l'arbitrarietà di w in $\mathcal{H}$ che $\hat{\mathfrak{L}}(\mathcal{H})$ è denso in $\mathcal{H}$ nella norma di $L_1(K)$.

Nel caso generale, posto $\varphi^\eta = \varphi * \vartheta_\eta$ $(\eta > 0)$, si ha, come risulta da facili calcoli, $|\varphi^\eta (t,x)| \leq \Psi^\eta (t)$, ove $\Psi^\eta = \Psi * \vartheta_\eta$. Inoltre $\Psi^\eta \to \Psi$ in $L_1([0,T])$ e $\| \Psi^\eta \|_{L_1([0,T])} = \| \Psi \|_{L_1([0,T])}$. Posto

$$\hat{\mathfrak{L}}_\eta : v(t,x) \to \mathfrak{L}(v)(t,x) + \varphi^\eta (t,x) \, v(t,x)$$

l'insieme $\hat{\mathfrak{L}}_\eta (\mathcal{H})$ è, per quanto visto più sopra, denso in $\mathcal{H}$.

Perciò, dato $w \in \mathcal{H}$ esiste $v_\eta \in \mathcal{H}$ tale che

$$\| \hat{\mathfrak{L}}_\eta (v_\eta) - w \|_{L_1(K)} < \eta \, .$$

Inoltre è:

$$\| \hat{\mathfrak{L}}_\eta (v_\eta) - \hat{\mathfrak{L}}(v_\eta) \|_{L_1(K)} \leq \| \varphi^\eta (t,x) - \varphi(t,x) \|_{L_1(K)} \, |v_\eta (t,x)| \leq$$

$$\leq \| v_\eta \|_\infty \, \| \varphi^\eta - \varphi \|_{L_1(K)} .$$

Dalla (4.1) segue poi che $\| v_\eta \|_\infty$ si mantiene limitata al variare di η. In definitiva, si ha

$$\| \hat{\mathfrak{L}}(v) - w \|_{L_1(K)} \leq \| \hat{\mathfrak{L}}_\eta (v_\eta) - w \|_{L_1(K)} + \| \hat{\mathfrak{L}}_\eta (v_\eta) - \hat{\mathfrak{L}}(v_\eta) \|_{L_1(K)} = 0(\eta) \, .$$

Ciò prova l'asserto.

4.3 TEOREMA. *Il problema* (2.1) *ha un'unica soluzione.*

Dimostrazione: Fissato un punto $\bar{z} = (\bar{t}, \bar{x}) \in S$, si consideri un cono $K \in \Lambda(\bar{z})$ per cui vale l'enunciato del lemma 4.1. Se $u(t,x)$ è continua e verifica (2.1.1) relativamente a tale cono, è necessariamente costante sulle caratteristiche contenute in K. Infatti, se $u_1(t,x)$ verifica (2.1.1) e coincide con $u\ (t, x)$ sulla base di K, dev'essere, in virtù dei lemmi 4.1 e 4.2, $u(t,x) \equiv u_1\ (t,x)$ in tutto K.

Dunque $u(t, x)$,(9) ristretta alla caratteristica passante per $(\bar{t}, \bar{x})$, è costante in un intorno sinistro di $\bar{t}$. Dall'arbitrarietà di $(\bar{t}, \bar{x})$ segue che $u\ (t,x)$ è costante su ogni caratteristica. Ciò, ovviamente, implica l'unicità.

BIBLIOGRAFIA

[1] E.D. CONWAY, *Generalized solution of linear differential equations with discontinuous coefficients and the uniqueness question for multidimensional quasilinear conservation laws*, J. Math. Anal. Appl., *18* (1967), pp. 238-251.

[2] A.F. FILIPPOV, *Differential equations with discontinuous right- hand side, Am. Math. Soc. Trans., 42* (1964), pp. 199-231.

[3] L. DE SIMON and G. TORELLI, *First order linear partial differential equations with discontinuous coefficients*, Annali di Matematica pura ed applicata, (4) *128* (1980), pp. 325-340.

[4] L. DE SIMON, *Inhomogeneous first order linear partial differential equations with coefficients and right hand side discontinuous*, Boll. U.M.I., (6) *1*-B (1982), pp. 729-742.

(9) Infatti, per le ipotesi fatte sulle funzioni $a_i(t,x)$ ed in particolare per (iii), b), l'operatore $\mathcal{L}^*$ è del tipo considerato nel lemma 4.2. Se $u(t, x) = u_1(t, x)$ sulla base di K, si ha $\int_K (u(t,x) - u_1(t,x))\mathcal{L}^*(v)\, dt\, dx = 0\ \forall\, v \in \mathcal{H}_K$ e quindi, per la densità di $\{\mathcal{L}^*(v)\}\ (v \in \mathcal{H}_K)$ e la continuità di $u(t,x)$ e $u_1(t,x)$, $u_1(t,x) = u(t,x)$ in tutto K.