SU UNA FORMULA DI QUADRATURA ATTA AL CALCOLO SPINTO DI FUNZIONI ELEMENTARI(*)

di PAOLO GHELARDONI e SERGIO GUERRA(**)

Alla Memoria di Ugo Barbuti

SOMMARIO.- *Si stabilisce una formula di quadratura di tipo chiuso a nodi multipli evidenziando, con opportuni esempi, come essa possa efficacemente utilizzarsi per il calcolo puntuale di alcune funzioni elementari* (1).

SUMMARY.- *The authors estabilish a quadrature formula of closed type with multiple nodes showing, with suitable examples, as this can be usefully applied to the local calculus of some elementary functions* (1).

1. Su una formula di quadratura di tipo chiuso a nodi multipli

1.1. CONSIDERAZIONI PRELIMINARI

Sia $f(x)$ una funzione integrabile sull'intervallo [-1, 1] e dotata in -1, in 0, in 1 di derivata $(s-1)$-esima.

Com'è noto (2), esiste una ed una sola formula di quadratura del tipo:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{h=0}^{s-1} B_h^{(s)} [f^{(h)}(-1) + (-1)^h f^{(h)}(1)] + \sum_{h=0}^{s-1} A_h^{(s)} f^{(h)}(0) + R_s(f)$$

per la quale siano rispettate le due condizioni seguenti:

1) i coefficienti $B_h^{(s)}$ e $A_h^{(s)}$ sono indipendenti da $f(x)$;

(*) Pervenuto in Redazione il 4 aprile 1990.

(**) Indirizzi degli Autori: P. Ghelardoni, Istituto di Matematiche Applicate, Facoltà di Ingegneria, Università degli Studi, Via Bonanno 25b, 56100 Pisa (Italy); S. Guerra, Accademia Navale, 57100 Livorno (Italy).

(1) In [1] e [2] si utilizza allo stesso fine una formula di quadratura di tipo chiuso con nodi multipli negli estremi dell'intervallo di integrazione. Qui la formula che stabiliremo è a nodi multipli non solo negli estremi dell'intervallo di integrazione ma anche nel suo punto medio.

(2) Cfr., ad esempio, [3], Teorema 1.1 e n° 2 Osserv. 4.

2) il resto $R_s\,(f)$ si annulla se $f\,(x)$ è un polinomio algebrico di grado minore o uguale a

$$g_s^* = 3s - 1.$$

E' poi immediato verificare che per il suo grado di precisione g_s risulta

$$g_s = \begin{cases} g_s^* & , \text{ se } s \text{ è pari} \\ g_s^* + 1 & , \text{ se } s \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Osserviamo subito che i coefficienti $A_h^{(s)}$ di indice dispari sono tutti nulli. Allo scopo si consideri il polinomio

$$f_t\,(x) = (1 - x^2)^s\, x^{2t+1} = \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} (-1)^k x^{2k+2t+1} \qquad \left(t = 0, 1, ..., \left[\frac{s-2}{2}\right]\right)$$

di grado $2s + 2t + 1 \leq g_s^*$. Poiché tale polinomio è dispari insieme a tutte le sue derivate di ordine pari, risulta

$$f_t^{(2h)}\,(0) = 0 \qquad \left(h = 0, 1, ..., \left[\frac{s-2}{2}\right]\right)$$

e, essendo

$$f_t^{(2h+1)}\,(x) = \sum_{k=h-t}^{s} \binom{s}{k} (-1)^k \frac{(2k+2t+1)\,!}{(2k+2t-2h)\,!}\, x^{2k+2t-2h}$$

$$\left(h = t, t + 1, ..., \left[\frac{s-2}{2}\right]\right),$$

risulta, poi,

$$f_t^{(2h+1)}\,(0) = (-1)^{h-t} \binom{s}{h-t} (2h + 1)! \qquad \left(h = t, t + 1, ..., \left[\frac{s-2}{2}\right]\right).$$

Essendo, inoltre,

$$\int_{-1}^{1} f_t\,(x)\, dx = 0, R_s\,(f_t) = 0, f_t^{(h)}\,(-1) = f_t^{(h)}\,(1) = 0$$

$$(h = 0, 1, ..., s - 1),$$

l'applicazione della formula ad $f_t(x)$ $\left(t = 0, 1, ..., \left[\frac{s-2}{2}\right]\right)$ conduce al seguente sistema lineare omogeneo

$$\sum_{h=t}^{\left[\frac{s-2}{2}\right]} (-1)^{h-t} \binom{s}{h-t} (2h + 1)!\, A_{2h+1}^{(s)} = 0 \qquad \left(t = 0, 1, ..., \left[\frac{s-2}{2}\right]\right)$$

di tipo triangolare superiore a determinante

$$1!\, 3!\, 5! \dots \left(2\left[\frac{s-2}{2}\right] + 1\right)!.$$

Ne segue

$$A_{2h+1}^{(s)} = 0 \qquad \left(h = 0, 1, ..., \left[\frac{s-2}{2}\right]\right)$$

e, pertanto, la formula precedentemente considerata, assume la forma

$$(1.1.1) \qquad \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \sum_{h=0}^{s-1} B_h^{(s)} [f^{(h)}(-1) + (-1)^h f^{(h)}(1)] +$$

$$+ \sum_{h=0}^{\left[\frac{s-2}{2}\right]} A_{2h}^{(s)} f^{(2h)}(0) + R_s(f).$$

Prima di passare al calcolo dei coefficienti della (1.1.1) dimostriamo che, qualunque siano gli interi m ed n $(m > 0, n \geq 0)$, posto convenzionalmente

$$(-1)!! = 1,$$

risulta

$$(1.1.2) \qquad \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^m x^{2n}\, dx = 2\,\frac{(2n-1)!!\,(2m)!!}{(2m+2n+1)!!}\,.$$

Essendo

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^m \, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} y \, dy = 2\,\frac{(2m)\,!!}{(2m+1)\,!!}$$

la (1.1.2) è vera per $n = 0$.

Per $n > 0$, integrando successivamente n volte per parti, si ottiene, poi,

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^m x^{2n} \, dx = \frac{2n-1}{2(m+1)} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{m+1} x^{2n-2} \, dx =$$

$$= \frac{(2n-1)\,(2n-3)}{2^2\,(m+1)\,(m+2)} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{m+2} x^{2n-4} \, dx = \ldots\ldots =$$

$$= \frac{(2n-1)!!\,m\,!}{2^n\,(m+n)\,!} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{m+n} \, dx =$$

$$= \frac{(2n-1)!!\,m\,!}{2^n\,(m+n)\,!}\, 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+2n+1} y \, dy =$$

$$= \frac{(2n-1)!!\,m\,!}{2^n\,(m+n)\,!}\, 2\,\frac{(2m+2n)!!}{(2m+2n+1)\,!!} = 2\,\frac{(2n-1)!!\,(2m)\,!!}{(2m+2n+1)\,!!}\,.$$

1.2. Sul calcolo dei coefficienti $A_{2h}^{(s)}$

Consideriamo il polinomio

$$f_t(x) = (1-x^2)^s x^{2t} = \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} (-1)^k x^{2k+2t} \qquad \left(t = 0, 1, \ldots, \left[\frac{s-1}{2}\right]\right),$$

di grado $2s + 2t \leq g_s^*$. Poiché tale polinomio è pari insieme a tutte le sue derivate di ordine pari, risulta

$$f_t^{(2h+1)}(0) = 0 \qquad \left(h = 0, 1, \ldots, \left[\frac{s-2}{2}\right]\right)$$

e, essendo

$$f_t^{(2h)}(x) = \sum_{k=h-t}^{s} \binom{s}{k} (-1)^k \frac{(2k+2t)\,!}{(2k+2t-2h)\,!} x^{2k+2t-2h} \quad (h = t, t+1, \ldots, \left[\frac{s-2}{2}\right]),$$

risulta, poi,

$$f_t^{(2h)}(0) = (-1)^{h-t} \binom{s}{h-t} (2h)! \quad (h = t, t+1, \ldots, \left[\frac{s-1}{2}\right]).$$

Essendo, inoltre,

$$R_s(f_t) = 0, f_t^{(h)}(-1) = f_t^{(h)}(1) = 0 \quad (h = 0, 1, \ldots, s-1)$$

e, per la (1.1.2),

$$\int_{-1}^{1} f_t(x)\,dx = 2\frac{(2t-1)\,!!\,(2s)\,!!}{(2s+2t+1)\,!!},$$

l'applicazione della (1.1.1) ad $f_t(x)$ $(t = 0, 1, \ldots, \left[\frac{s-1}{2}\right])$ conduce al seguente sistema lineare (non omogeneo)

$$(1.2.1) \qquad \sum_{h=t}^{\left[\frac{s-1}{2}\right]} (-1)^{h-t} \binom{s}{h-t} (2h)\,!\,A_{2h}^{(s)} = 2\frac{(2t-1)\,!!\,(2s)\,!!}{(2s+2t+1)\,!!},$$

$$(t = 0, 1, \ldots, \left[\frac{s-1}{2}\right])$$

di tipo triangolare superiore a determinante

$$0!\,2!\,4!\,\ldots\ldots\,(2\left[\frac{s-1}{2}\right])!.$$

1.3. Sul calcolo dei coefficienti $B_h^{(s)}$

Sia

$$s = 2r.$$

Per il polinomio

$$f_t(x) = (1 - x^2)^t x^{2r} = \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} (-1)^k x^{2k+2r} \qquad (t = 0, 1, ..., 2r - 1),$$

di grado $2t + 2r < g_s^*$, risulta

$$f_t^{(h)}(-1) = f_t^{(h)}(1) = 0 \qquad (h = 0, 1, ..., t - 1)$$

e, essendo

$$f_t^{(h)}(x) = \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} (-1)^k \frac{(2k+2r)\,!}{(2k+2r-h)\,!} x^{2k+2r-h},$$

$$f_t^{(h)}(-1) + (-1)^h f_t^{(h)}(1) = 2 \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} (-1)^{h-k} \frac{(2k+2r)\,!}{(2k+2r-h)\,!}$$

$$(h = t, t + 1, ..., 2r - 1).$$

Essendo, inoltre,

$$R_s(f_t) = 0, f_t^{(h)}(0) = 0 \qquad (h = 0, 1, ..., 2r - 1)$$

e per la (1.1.2),

$$\int_{-1}^{1} f_t(x)\, dx = 2 \frac{(2r-1)\,!!\ (2t)\,!!}{(2t+2r+1)\,!!},$$

l'applicazione della (1.1.1) ad $f_t(x)$ $(t = 0, 1, ..., 2r - 1)$ conduce al seguente sistema lineare (non omogeneo)

$$(1.3.1)_{2r} \qquad \sum_{h=t}^{2r-1} \left(\sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} (-1)^{h-k} \frac{(2k+2r)\,!}{(2k+2r-h)\,!}\right) B_h^{(2r)} = \frac{(2r-1)\,!!\ (2t)\,!!}{(2t+2r+1)\,!!}$$

$$(t = 0, 1, ..., 2r - 1)$$

di tipo triangolare superiore a determinante

$$f_0(-1)\, f_1'(-1) ...... f_{2r-1}^{(2r-1)}(-1).$$

Sia

$$s = 2r + 1.$$

Applicando la (1.1.1) al polinomio

$$f_t(x) = (1 - x^2)^t x^{2r+2} = \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} (-1)^k x^{2k+2r+2} \qquad (t = 0, 1, ..., 2r),$$

di grado $2t + 2r + 2 < g_s^*$, con considerazioni perfettamente analoghe a quelle precedentemente utilizzate si perviene al seguente sistema lineare (non omogeneo)

$$(1.3.1)_{2r+1} \qquad \sum_{h=t}^{2r} \left(\sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} (-1)^{h-k} \frac{(2k+2r+2)\,!}{(2k+2r+2-h)\,!} \right) B_h^{(2r+1)} =$$

$$= \frac{(2r+1)\,!!\,(2t)\,!!}{(2t+2r+3)\,!!} \qquad (t = 0, 1, ..., 2r)$$

ancora di tipo triangolare superiore a determinante formalmente identico a quello del sistema $(1.3.1)_{2r}$.

1.4. Sul nucleo di Peano

Il nucleo di Peano $K_s(t)$ della formula (1.1.1) è di segno costante sull'intervallo $[-1, 1]$[3] e, pertanto, se $f(x) \in C^{g_s+1}[-1, 1]$, risulta

$$R_s(f) = f^{(g_s+1)}(\xi_s) \int_{-1}^{1} K_s(t)\, dt,$$

con ξ_s opportuno compreso tra -1 ed 1[4].

Se

$$s = 2r,$$

applicando la (1.1.1) al polinomio

---

(3) Cfr. [3], n° 4.

(4) Cfr., ad esempio, [3], n° 5, Osservazione.

$$f(x) = (1-x^2)^{2r} x^{2r},$$

di grado $g_s + 1$, essendo ovviamente

$$f^{(h)}(-1) = f^{(h)}(1) = f^{(h)}(0) = 0 \qquad (h = 0, 1, \ldots, 2r-1)$$

e

$$f^{(g_s+1)}(x) = (6r)!,$$

si ottiene, allora, tenendo conto della (1.1.2),

$$(1.4.1)_{2r} \qquad \int_{-1}^{1} K_{2r}(t)\, dt = 2\frac{(2r-1)!!\ (4r)!!}{(6r)!\ (6r+1)!!}.$$

Se

$$s = 2r + 1,$$

applicando questa volta la (1.1.1) al polinomio

$$f(x) = (1-x^2)^{2r+1} x^{2r+2},$$

anch'esso di grado $g_s + 1$, essendo ovviamente

$$f^{(h)}(-1) = f^{(h)}(1) = f^{(h)}(0) = 0 \qquad (h = 0, 1, \ldots, 2r)$$

e

$$f^{(g_s+1)}(x) = -(6r+4)!,$$

si ottiene, allora, sempre tenendo conto della (1.1.2),

$$(1.4.1)_{2r+1} \qquad \int_{-1}^{1} K_{2r+1}(t)\, dt = -2\frac{(2r+1)!!\ (4r+2)!!}{(6r+4)!\ (6r+5)!!}\ .$$

1.5. Riportiamo in tabella i valori dei coefficienti della formula (1.1.1) e il valore dell'integrale del relativo nucleo di Peano per $s = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

s	$A_0^{(s)}$	$A_2^{(s)}$	$A_4^{(s)}$	$B_0^{(s)}$	$B_1^{(s)}$	$B_2^{(s)}$	$B_3^{(s)}$	$B_4^{(s)}$	$B_5^{(s)}$	$\int_{-1}^{1} K_s(t)\,dt$
1	$\frac{4}{3}$			$\frac{1}{3}$						$-\frac{1}{90}$
2	$\frac{16}{15}$			$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$					$\frac{1}{4725}$
3	$\frac{384}{315}$	$\frac{16}{315}$		$\frac{123}{315}$	$\frac{18}{315}$	$\frac{1}{315}$				$\frac{-10^{-3}}{130977}$
4	$\frac{3840}{3465}$	$\frac{128}{3465}$		$\frac{1545}{3465}$	$\frac{285}{3465}$	$\frac{26}{3465}$	$\frac{1}{3465}$			$\frac{10^{-2}}{280945665}$
5	$\frac{161280}{135135}$	$\frac{7680}{135135}$	$\frac{64}{135135}$	$\frac{54495}{135135}$	$\frac{9450}{135135}$	$\frac{885}{135135}$	$\frac{45}{135135}$	$\frac{1}{135135}$		$\frac{-10^{-3}}{6258570390072}$
6	$\frac{2580480}{2297295}$	$\frac{107520}{2297295}$	$\frac{768}{2297295}$	$\frac{1007055}{2297295}$	$\frac{196245}{2297295}$	$\frac{21840}{2297295}$	$\frac{1470}{2297295}$	$\frac{57}{2297295}$	$\frac{1}{2297295}$	$\frac{10^{-3}}{3032277353989884}$

2. Applicazioni al calcolo approssimato di alcune funzioni elementari

La formula (1.1.1) può vantaggiosamente utilizzarsi per il calcolo approssimato di parecchie funzioni elementari.

In questa seconda parte considereremo due casi particolarmente notevoli.

2.1. L'applicazione della formula (1.1.1) alla funzione

$$f(t) = \frac{1}{(2n+1)+t}, n \in \mathbf{N},$$

essendo

$$f^{(h)}(t) = \frac{(-1)^h h!}{\left[(2n+1)+t\right]^{h+1}}$$

e quindi

$$f^{(h)}(-1) + (-1)^h f^{(h)}(1) = \frac{h!}{2^{h+1}} \left[\frac{1}{(n+1)^{h+1}} + \frac{(-1)^h}{n^{h+1}}\right],$$

$$f^{(h)}(0) = \frac{(-1)^h h!}{(2n+1)^{h+1}},$$

conduce alla seguente uguaglianza approssimata

$$\text{(2.1.1)}\quad \log(n+1) = \log n + \sum_{h=0}^{s-1} \frac{h!}{2^{h+1}} B_h^{(s)} \left[\frac{1}{(n+1)^{h+1}} + \frac{(-1)^h}{n^{h+1}}\right] + \sum_{h=0}^{\left[\frac{s-1}{2}\right]} (2h)! \frac{A_{2h}^{(S)}}{(2n+1)^{2h+1}},$$

e, per il relativo termine complementare (errore), risulta

$$\text{(2.1.2)}\qquad R_s(f) = \frac{(g_s+1)!}{(2n+1+\xi_s)^{g_s+2}} \int_{-1}^{1} K_s(t)\, dt.$$

In virtù delle $(1.4.1)_{2r}$, $(1.4.1)_{2r+1}$, è

$$R_{2r}(f) > 0, R_{2r+1}(f) < 0 \tag{2.1.3}$$

e, essendo

$$\frac{1}{2n+1+\xi_s} < \frac{1}{2n},$$

risulta poi

$$\begin{cases} R_{2r}(f) < \dfrac{[(2r-1)\,!!]^2\, r!}{2^{3r}\,(6r+1)\,!!}\,\dfrac{1}{n^{6r+1}} \\ |R_{2r+1}(f)| < \dfrac{[(2r+1)\,!!]^2\, r!}{2^{3r+3}\,(6r+5)\,!!}\,\dfrac{1}{n^{6r+5}} \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Le (2.1.4) bene evidenziano l'efficienza numerica del procedimento indicato in (2.1.1), procedimento atto al calcolo del logaritmo naturale di un qualunque numero intero positivo noto che sia il logaritmo naturale del numero intero che lo precede.

Come esempio riportiamo, in corrispondenza dei primi 5 valori di s, i valori approssimati forniti dalla (2.1.1)(5), del log 2 ($n = 1$) limitandoci a trascrivere solo le cifre decimali esatte.

$s = 1$) $\log 2 \cong \dfrac{25}{36} = 0.69$

$s = 2$) $\log 2 \cong \dfrac{499}{720} = 0.693$

$s = 3$) $\log 2 \cong \dfrac{188674}{272160} = 0.693147$

$s = 4$) $\log 2 \cong \dfrac{1660093}{2395008} = 0.6931471$

$s = 5$) $\log 2 \cong \dfrac{97115443}{140107968} = 0.693147180.$

2.2. Per la funzione

$$f(t) = x \cos xt,$$

(5) Migliori, a parità del numero degli addendi, di quelli forniti dalle ridotte della ben nota serie $\log 2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3\cdot 9} + \frac{1}{5\cdot 9^2} + \frac{1}{7\cdot 9^3} + \ldots\right)$..

essendo

$$f^{(2h)}(t) = (-1)^h x^{2h+1} \cos xt, f^{(2h+1)}(t) = (-1)^{h+1} x^{2h+2} \operatorname{sen} xt,$$

risulta

$$f^{(2h)}(0) = (-1)^h x^{2h+1}$$

$$f^{(2h)}(-1) = f^{(2h)}(1) = (-1)^h x^{2h+1} \cos x$$

$$f^{(2h+1)}(-1) = (-1)^h x^{2h+2} \operatorname{sen} x, f^{(2h+1)}(1) = (-1)^{h+1} x^{2h+2} \operatorname{sen} x.$$

Applicando ad $f(t)$ la formula (1.1.1) e posto

$$L_s(x) = \sum_{h=0}^{\left[\frac{s-1}{2}\right]} (-1)^h B_{2h}^{(s)} x^{2h}, M_s(x) = \sum_{h=0}^{\left[\frac{s-2}{2}\right]} (-1)^h B_{2h+1}^{(s)} x^{2h},$$

(2.2.1)
$$N_s(x) = \sum_{h=0}^{\left[\frac{s-1}{2}\right]} (-1)^h A_{2h}^{(s)} x^{2h},$$

si ottiene l'uguaglianza

(2.2.2) $$x L_s(x) \cos x + [x^2 M_s(x) - 1] \operatorname{sen} x = -\frac{x}{2} [N_s(x) + \frac{1}{x} R_s(f)]$$

con

(2.2.3) $$R_s(f) = (-1)^{\frac{g_s+1}{2}} x^{g_s+2} \cos \xi_s x \int_{-1}^{1} K_s(t)\, dt.$$

Il determinante

(2.2.4) $$D_s(x) = L_s(x) [x^2 M_{s+1}(x) - 1] - L_{s+1}(x) [x^2 M_s(x) - 1]$$

del sistema

(2.2.5)

$$\begin{cases} L_s(x)\cos x + \left[x^2 M_s(x) - 1\right] \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = -\dfrac{1}{2}\left[N_s(x) + \dfrac{1}{x} R_s(f)\right] \\ L_{s+1}(x)\cos x + \left[x^2 M_{s+1}(x) - 1\right] \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = -\dfrac{1}{2}\left[N_{s+1}(x) + \dfrac{1}{x} R_{s+1}(f)\right] \end{cases}$$

lineare nelle funzioni $\cos x$, $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, essendo $\forall\, s$

$$L_s(-x) = L_s(x), M_s(-x) = M_s(x),$$

è un polinomio pari di grado $2s$.

$\forall\, x : D_s(x) \neq 0$, il sistema (2.2.5) è univocamente risolubile e per le due funzioni $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ valgono, allora, le due uguaglianze approssimate seguenti:

$$(2.2.6) \quad \begin{cases} \operatorname{sen} x \cong \dfrac{x}{2} \dfrac{L_{s+1}(x)\, N_s(x) - L_s(x)\, N_{s+1}(x)}{D_s(x)} \\ \cos x \cong \dfrac{1}{2} \dfrac{N_{s+1}(x)\left[x^2 M_s(x) - 1\right] - N_s(x)\left[x^2 M_{s+1}(x) - 1\right]}{D_s(x)} \end{cases}$$

con i rispettivi termini di errore

(2.2.7)

$$\begin{cases} \Omega_s^{(1)}(x) = \dfrac{x}{2} \dfrac{\frac{1}{x}\left[R_s(f)\, L_{s+1}(x) - R_{s+1}(f)\, L_s(x)\right]}{D_s(x)} \\ \Omega_s^{(2)}(x) = \dfrac{1}{2} \dfrac{\frac{1}{x}\left\{R_{s+1}(f)\left[x^2 M_s(x) - 1\right] - R_s(f)\left[x^2 M_{s+1}(x) - 1\right]\right\}}{D_s(x)} \end{cases} .$$

Le (2.2.7) rilevano la notevole efficienza del procedimento di approssimazione (2.2.6) (basti pensare ai valori dell'integrale del nucleo di Peano indicati nella tabella di pag. 8).

Come esempio riportiamo, in corrispondenza dei primi 5 valori di s, i valori approssimati, forniti dalla 1^a delle (2.2.6), di sen 1 limitandoci a trascrivere solo le cifre decimali esatte.

$s = 1)$ sen $1 \cong 0.8$
$s = 2)$ sen $1 \cong 0.84$
$s = 3)$ sen $1 \cong 0.8414709$
$s = 4)$ sen $1 \cong 0.84147098$
$s = 5)$ sen $1 \cong 0.841470984$

BIBLIOGRAFIA

[1] P.M. HUMMEL, C.L. SEEBECK, *A Generalization of Taylor's Theorem*, Assoc. Mouthly, *56* (1949).

[2] S. GUERRA, *Su alcune approssimazioni di tipo razionale per le funzioni circolari*, Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste, Vol. II, fasc. II, (1970).

[3] S. GUERRA, *Sulle formule di quadratura esatte per polinomi algebrici*, Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste, Vol. XVI, (1984).