

ALCUNI PROBLEMI APERTI SULLA CONVERGENZA IN MEDIA DELL'INTERPOLAZIONE LAGRANGIANA ESTESA(*)

di ALFREDO BELLEN (a Trieste)(**)

Alla Memoria di Ugo Barbuti

SOMMARIO.- *In questo lavoro si studiano e si formulano alcune congetture sulla scelta dei nodi da aggiungere ad uno schema di interpolazione lagrangiana convergente in media, in modo tale che il risultante schema d'interpolazione estesa conservi la proprietà di convergenza.*

SUMMARY.- *Investigations and conjectures on the set of additional nodes for Lagrange interpolation schemes are provided such that mean convergence is preserved in the resulting extended interpolation scheme.*

1. Premessa

Una delle ragioni per cui è utile costruire dei procedimenti interpolatori con polinomi algebrici che convergono nella norma di $L_{2,w}$ per ogni funzione continua su $[a, b]$ è che ciò garantisce la equilimitatezza degli operatori di interpolazione P_n da $C^\infty[a, b]$ in $L_{2,w}[a, b]$. Da questo fatto si deduce (vedi [4]) la convergenza in media delle soluzioni numeriche di equazioni funzionali del tipo

$$u = Tu + f \quad (1.1)$$

ottenute con il metodo di collocazione polinomiale

$$u_n = P_n T u_n + P_n f \quad (1.2)$$

dove u_n è cercato nell'insieme π_{n-1} dei polinomi algebrici di grado al più $n - 1$.

Inoltre con buone proprietà topologiche dell'operatore T (sostanzialmente la compattezza) si riesce anche a dimostrare la convergenza uniforme delle approssimazioni con le seguenti limitazioni:

(*) Pervenuto in Redazione il 4 aprile 1990.

(**) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Scienze Matematiche, Università degli Studi, Piazzale Europa 1, 34100 Trieste (Italy).

$$\|u_n - u\| < c \|P_n\| \text{dist}(u, \pi_{n-1}).$$

L'estensione al caso non lineare si ottiene attraverso successive linearizzazioni dell'equazione in $L_{2,w}$ (metodo di Newton-Kantorovich) a ciascuna delle quali si applica il metodo di collocazione lineare, o equivalentemente attraverso l'applicazione diretta del metodo di collocazione alla equazione non lineare la cui soluzione è ottenuta per successive linearizzazioni in R^n (Newton-Ralphson).

Questa tecnica può essere usata anche per problemi differenziali che attraverso una opportuna funzione di Green si trasformano in problemi equivalenti del tipo (1.1).

Una possibile scelta dei punti di collocazione è data, in accordo con quanto detto sopra, dagli zeri dei polinomi ortogonali rispetto al prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_{2,w}$ in quanto per essi la convergenza in media quadratica pesata dell'interpolazione è garantita dal classico teorema di Erdos-Turan [3].

Il problema cruciale dal punto di vista numerico, sta nella risoluzione del sistema lineare implicitamente definito in (1.2). L'uso di approssimazioni mediante polinomi algebrici porta infatti a sistemi lineari con matrici piene che, già per moderate dimensioni, presentano particolari difficoltà di risoluzione anche in considerazione del fatto che le incognite sono i coefficienti del polinomio approssimante e devono quindi, per ragioni di stabilità, essere calcolati con una buona accuratezza. Inoltre i calcoli eseguiti per la ricerca del polinomio u_n non sono utili per il calcolo di un successivo e più accurato polinomio u_{n+m} , $m = m(n)$, di grado più alto atto a fornire indicazioni sull'errore.

Tutte queste considerazioni suggeriscono che per il secondo polinomio gli $n + m$ punti di collocazione $(z_1, z_2, \dots, z_{n+m})$ siano un soprainsieme dei punti (x_1, x_2, \dots, x_n) con i quali si è determinato il primo. In tal modo, (vedi [1]), gli $n + m$ nodi, che indicheremo ora con

$$(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}, y_1^{(n)}, \dots, y_m^{(n)}) \quad (1.3)$$

danno luogo alla matrice di collocazione A_{m+n} relativa all'equazione

$$u_{n+m} = P_{n+m} T u_{n+m} + P_{n+m} f \quad (1.4)$$

che è partizionabile in

$$A_{n+m} = \begin{vmatrix} A_n & Q \\ R & S_m \end{vmatrix}$$

con A_n matrice di collocazione dell'equazione (1.1) relativa al calcolo di u_n .

Quest'ultima è già stata "risolta" nel senso che è già stata eseguita la fattorizzazione LU e quindi, virtualmente, disponiamo dell'inversa A^{-1} . Ciò ci consente di calcolare direttamente la seguente fattorizzazione di A_{n+m} in matrici triangolari a blocchi

$$A_{n+m} = \tilde{L} \tilde{U}$$

$$\tilde{L} = \begin{vmatrix} A_n & 0 \\ R & S_m - RA^{-1}Q \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{U} = \begin{vmatrix} I_n & A^{-1}Q \\ 0 & I_m \end{vmatrix}$$

per la cui risoluzione rimane da fattorizzare solamente la matrice $m \times m$ $S_m - RA^{-1}Q$. Ciò è stato indicato in [1] come "metodo di collocazione estesa". Per poter realizzare tutto ciò è necessario trovare, accanto alla matrice $x_i^{(n)}$ $i = 1, \dots, n$ degli zeri dei polinomi ortogonali sui quali gli operatori di interpolazione P_n sono equilimitati, una matrice estesa di nodi

$$x_i^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}, y_1^{(n)}, \dots, y_m^{(n)}$$

sui quali gli operatori P_{n+m} , che chiameremo "operatori d'interpolazione estesa", siano ancora equilimitati, così da garantire la convergenza di u_{n+m} ad u con la limitazione superiore dell'errore

$$\|u_{n+m} - u\| < c \|P_{n+m}\| \text{dist}(u, \pi_{n+m-1}).$$

2. Convergenza dell'interpolazione estesa

Il problema della convergenza in media quadratica pesata dell'interpolazione estesa è già stato affrontato in [2]. In quel lavoro si supposeva che la matrice dei nodi $x_i^{(n)}$ soddisfacesse alla classica condizione (E) di Erdős e che la matrice dei nodi aggiunti $y_i^{(n)}$ formasse una matrice norma-

le. Quei risultati, anche se utili nella maggior parte dei casi, non erano del tutto soddisfacenti in quanto la convergenza era garantita solo sotto ipotesi di hölderianità della funzione interpolanda f . In particolare per i nodi $x_i^{(n)}$ e $y_i^{(n)}$, rispettivamente zeri di $U_n(x)$ e $T_{n+1}(x)$, polinomi di Chebyshev di prima e di seconda specie, si aveva la convergenza dell'interpolazione estesa $P_{n+m}(f)$ sotto l'ipotesi $f \in \text{Lip}\alpha$ con $\alpha > 1/2$. E' invece evidente la convergenza per ogni funzione continua in $[-1, 1]$ poiché gli zeri di $U_n(x)$ $T_{n+1}(x)$ coincidono con gli zeri di $U_{2n+1}(x)$. D'altra parte questo è l'unico caso di polinomi classici che si fattorizzano in due polinomi di cui uno nella stessa classe.

In questa nota si propone un approccio diverso che consente di raggiungere risultati più generali compreso quello appena visto relativo ai polinomi $U_n(x)$. Tali risultati si ottengono attraverso la definizione di una nuova classe di polinomi ortogonali rispetto ad una famiglia di funzioni peso. Questa classe di polinomi, già menzionata da W. Gautschi in [5] in relazione alla approssimazione ai minimi quadrati, non è ancora stata studiata e quindi lungo l'esposizione saremo costretti a fare delle ipotesi che risultano però verificate rigorosamente in alcuni casi particolari e sperimentalmente in altri. Esse costituiscono quindi delle proposte per ulteriori ricerche anche in vista di possibili collegamenti con le formule di quadratura estesa.

Sia dunque Φ_n una famiglia di polinomi ortogonali in $[-1, 1]$ rispetto a $w(x)$ e sia $x_i^{(n)}$ la matrice di nodi costituita dai suoi zeri. Fissiamo ora una funzione $m = m(n)$ e sia $\{\Theta_m\}$ la famiglia di polinomi tali che

$$\int_{-1}^1 w(x) \Phi_n^2(x) \Theta_m(x) x^k dx = 0 \quad k = 0, 1, \dots, m-1$$

e ciò per ogni $n = 0, 1, \dots$

Poiché per ogni n la funzione peso $w(x) \Phi_n^2(x)$ ha segno costante, si dimostra facilmente che Θ_m possiede m zeri reali $y_i^{(n)}$ $i = 1, \dots, m$, distinti ed interni all'intervallo $[-1, 1]$. Non sembra altrettanto facile stabilire se tali zeri $y_i^{(n)}$ sono tutti distinti dai corrispondenti zeri $x_i^{(n)}$. Inoltre per $m = n + 1$ ed $m = n - 1$ la congettura naturale è che essi si intercalino.

In particolare si osservi che per i polinomi di Chebyshev di seconda specie, $w(x) = \sqrt{(1-x)^2}$ e $\Phi_n(x) = U_n(x)$, risulta, per $m = n + 1$, $\Theta_m(x) = T_{n+1}(x)$. Infatti:

$$\int_{-1}^1 w(x) \Phi_n^2(x) \Theta_m(x) x^k dx = \int_{-1}^1 \sqrt{(1-x^2)} U_n^2(x) T_{n+1}(x) x^k dx$$

e poiché $U_{2n+1}(x) = cU_n(x)T_{n+1}(x)$

$$= 1/c \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_{2n+1}(x) U_n(x) x^k dx = 0 \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

I punti $y_i^{(n)}$ risultano quindi distinti dagli $x_i^{(n)}$ e, poiché $U_n(x) = cT'_{n+1}(x)$, essi si intercalano.

Una situazione analoga si verifica per $m = n - 1$ partendo dai polinomi di Chebyshev di prima specie, $w(x) = 1/\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}$ e $\Phi_n(x) = T_n(x)$, per i quali risulta $\Theta_m(x) = T_{n-1}(x)$.

Nel caso dei polinomi di Legendre, $w(x) = 1$ e $\Phi_n(x) = P_n(x)$, il procedimento di ortogonalizzazione ha fornito ancora polinomi $\Theta_m(x)$, $m = n + 1$, i cui zeri sono distinti dagli zeri di $P_n(x)$ e li intercalano. Ciò garantisce che la proprietà richiesta non si verifica incidentalmente solo per i polinomi $U_n(x)$ ma anche per altri polinomi di Jacobi.

Partendo invece dai polinomi di Hermite e di Laguerre, il calcolo degli zeri dei corrispondenti polinomi $\Theta_{n+1}(x)$ mostra che essi sono ancora distinti da quelli di Φ_n ma non li intercalano più.

D'ora in poi supporremo che, per ogni n , gli $x_i^{(n)}$, zeri di $\Phi_n(x)$, e gli $y_i^{(n)}$, zeri del corrispondente $\Theta_m(x)$, siano distinti.

Il nostro obiettivo è dimostrare che

$$\|L_{n+m}(f, x) - f(x)\|_{2,w} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

dove L_{n+m} è l'operatore d'interpolazione estesa che associa alla funzione continua f il polinomio di grado $n + m - 1$ che la interpola sugli zeri di $\Phi_n(x) \Theta_m(x)$.

In accordo con un risultato di Bernstein, perfezionato più tardi da Erdős e successivamente da Freud [7], per ogni funzione continua in $[a, b]$ per ogni reale $c > 0$, per ogni intero n e per ogni insieme $x_i^{(n)}$ di nodi soddisfacenti la condizione (E), esiste un operatore lineare A_n che associa ad f un polinomio $A_n(f, x)$, di grado non superiore ad $n(1 + c)$, che interpola f sui nodi $x_i^{(n)}$ e che converge uniformemente ad f almeno come la sua miglior approssimazione polinomiale di grado $n - 1$, cioè tale che:

$$\begin{aligned} \text{grad } A_n(f, x) &\leq n(1 + c) \\ A_n(f, x_i^{(n)}) &= f(x_i^{(n)}) \quad i = 1, \dots, n \\ \max_x |A_n(f, x) - f(x)| &< k(c) E_{n-1}(f) \quad E_{n-1}(f) = \text{dist}(f, \pi_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Se i $\Phi_n(x)$ sono polinomi ortogonali classici, per i nodi $x_i^{(n)}$ è garantita la condizione (E) e quindi anche l'esistenza di tali operatori d'interpolazione. Fissato $c = 1/2$, indichiamo per brevità con $p_n(x)$ il polinomio $A_n(f, x)$ soddisfacente le condizioni (2.1) e con k il valore $k(1/2)$, e osserviamo che, in particolare, per $n \geq 4$ si ha

$$\deg(p_n(x)) \leq n(1 + 1/2) \leq 2n - 2$$

e quindi, per $m \geq n - 1$,

$$\deg(p_n(x)) \leq m + n - 1.$$

Pertanto il polinomio d'interpolazione estesa $L_{n+m}(f, x)$ può essere espresso con:

$$L_{n+m}(f, x) = p_n(x) + \Phi_n(x) q_{m-1}(x)$$

dove $q_{m-1}(x) \in \pi_{m-1}$ ed inoltre $q_{m-1}(y_i) = (f(y_i) - p_n(y_i)) / \Phi_n(y_i) \quad i = 1, \dots, m$.

Scriviamo quindi q_{m-1} nella forma di Lagrange:

$$q_{m-1}(x) = \sum_{i=1}^m l_i(x) (f(y_i) - p_n(y_i)) / \Phi_n(y_i) \text{ con}$$

$$l_i(x) = \Theta_m(x) / ((x - y_i) \Theta'_m(y_i)).$$

Poiché $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, si ha:

$$\begin{aligned} \|L_{n+m}(f, x) - f(x)\|_{2, \mathcal{W}}^2 &= \|p_n(x) + \Phi_n(x) q_{m-1}(x) - f(x)\|_{2, \mathcal{W}}^2 \leq \\ &\leq 2 \|\Phi_n(x) q_{m-1}(x)\|_{2, \mathcal{W}}^2 + 2 \|p_n(x) - f(x)\|_{2, \mathcal{W}}^2 \end{aligned}$$

in cui risulta:

$$\|p_n(x) - f(x)\|_{2, \mathcal{W}}^2 \leq k^2 E_{n-1}^2(f)$$

e

$$\|\Phi_n(x) q_{m-1}(x)\|_{2,w}^2 = \int_{-1}^1 w(x) \Phi_n(x)^2 \left[\sum_{i=1}^m l_i(x) [(f-p_n)/\Phi_n](y_i) \right]^2 dx. \quad (2.2)$$

Tenuto conto che, per la definizione di $\Theta_m(x)$, i coefficienti di Lagrange l_i sono ortogonali rispetto al peso $w(x) \Phi_n(x)^2$, la (2.2) si riduce a:

$$\int_{-1}^1 w(x) \Phi_n(x)^2 \left[\sum_{i=1}^m l_i(x)^2 [(f-p_n)/\Phi_n](y_i)^2 \right] dx.$$

ed è, a sua volta, maggiorata da:

$$\begin{aligned} &\leq k^2 E_{n-1}^2(f) \int_{-1}^1 w(x) \Phi_n(x)^2 \sum_{i=1}^m [l_i(x)/\Phi_n(y_i)]^2 dx \leq \\ &\leq k^2 E_{n-1}^2(f) / \min_i [\Phi_n(y_i)^2] \int_{-1}^1 w(x) \Phi_n(x)^2 \sum_{i=1}^m l_i(x)^2 dx. \quad (2.3) \end{aligned}$$

Con ragionamento standard, si dimostra inoltre che l'integrale nella (2.3) è uguale a $\int_{-1}^1 w(x) \Phi_n(x)^2 dx = \|\Phi_n\|_{2,w}^2$

Indicata infine con $M(n)$ la quantità:

$$M(n) = \|\Phi_n\|_{2,w}^2 / \min_i [\Phi_n(y_i)^2],$$

la (2.3) si riduce a:

$$k^2 E_{n-1}^2(f) M(n).$$

Si può quindi concludere che la condizione:

$$M(n) \leq M \quad \forall n \quad (2.4)$$

garantisce la convergenza del termine (2.2) e, in definitiva, dell'interpolante esteso $L_{n+m}(f, x)$, per ogni funzione continua in $[-1, 1]$, secondo la stima:

$$\|L_{n+m}(f, x) - f(x)\|_{2,w}^2 \leq \text{cost } E_{n-1}^2(f)^2 \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

Ciò implica l'equilimitatezza dell'interpolante esteso $L_{n+m}(f, x)$, e quindi la stima (2.5) stessa può venir migliorata in:

$$\|L_{n+m}(f, x) - f(x)\|_{2,w}^2 \leq \text{cost } E_{n+m-1}(f)^2 \rightarrow 0.$$

3. Esempi, problemi aperti, congetture

Consideriamo ancora i tre casi emblematici con Φ_n uguale a U_n , T_n oppure P_n i cui zeri soddisfano la condizione (E).

Nel caso $\Phi_n = U_n$ si è visto che $\Theta_m = T_{n+1}$ e si verifica facilmente che $\min_i [U_n(y_i)]^2 \geq 1 \quad \forall n$. Poiché $\|U_n\|^2 = \pi/2$, risulta $M(n) \leq \pi/2$, e ciò assicura la convergenza dell'interpolazione estesa sui nodi di $U_n T_{n+1}$ ($= U_{2n+1}$), come del resto già si sapeva.

Nel caso dei polinomi di Legendre, $\Phi_n = P_n$, l'analisi sperimentale ha rivelato una situazione simile al caso precedente, nel senso che i nodi si intercalano e la funzione $M(n)$ sembra ancora equilimitata. Più precisamente si sono ottenuti dei risultati sperimentali che suggeriscono la congettura $M(n) \rightarrow \pi/2$.

Nel terzo caso $\Phi_n = T_n$ e $\Theta_m = T_{n-1}$ si verifica invece facilmente che $M(n)$ diverge, per cui la convergenza non è assicurata.

Più in generale per i polinomi di Jacobi $\Phi_n = P_n^{(\alpha\beta)}$, W. Gautschi ha recentemente verificato, in via sperimentale, che per $m = n + 1$ l'alternanza dei nodi e la congettura $M(n) \rightarrow \pi/2$ sono verificate per $0 \leq \alpha = \beta \leq 1.5$. Sorprendentemente per $\alpha = \beta = -0.5$ $M(n)$ invece diverge, e per $\alpha = \beta \geq 2$ non solo $M(n)$ sembra divergere ma cade anche l'alternanza dei nodi. Non è ancora chiaro cosa accade per $-0.5 < \alpha = \beta < 0$ e per $\alpha = \beta > 1.5$.

I calcoli dei polinomi Θ_{n+1} e dei suoi zeri sono stati eseguiti da W. Gautschi seguendo una procedura da lui recentemente proposta in [6].

I problemi che sono rimasti aperti nella precedente trattazione e che sarebbe interessante risolvere sono dunque i seguenti:

- Dimostrare che gli zeri di Φ_n e di Θ_{n+1} sono distinti.
- Trovare per quali valori di α e β essi si intercalano.
- Trovare per quali valori di α e β il rapporto $M(n)$ converge a $\pi/2$ o rimane limitato.
- Se $M(n)$ non è limitato, trovare con quale ordine diverge il massimo limite.
- Trovare formule ricorsive per il calcolo di Θ_{n+1} .

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. BELLEN, *An extended collocation method.*, *Calcolo*, *XVII* (1980), 385-402.
- [2] A. BELLEN, *A note on mean convergence of Lagrange interpolation.*, *J. Approx. Theory*, *33* (1981), 85-95.
- [3] P. ERDOS, P. TURAN, *On interpolation*, *Ann. of Math.*, *38* (1937), 142-155.
- [4] M.A. KRASNOSEL'SKII et al., *Approximate solution of operator equations*, Wolters-Nordhoff Publ. Groningen (1972).
- [5] W. GAUTSCHI, *Orthogonality — conventional and unconventional — in numerical analysis*, in K. Bowers-J. Lund eds "Computation and Control", PSCT v. 1, Birkhauser, Boston 1989, 63-95.
- [6] W. GAUTSCHI, *Computational aspects of orthogonal polynomials*. To appear.
- [7] G. FREUD, *On approximation by interpolatory polynomials*, *Mat. Lapok*, *18* (1967), 61-64.