ALCUNE OSSERVAZIONI SU PROBLEMI ELLITTICI SEMILINEARI A SIMMETRIA RADIALE (*)

di GIOVANNI MANCINI (a Bologna) e EDI ROSSET (a Trieste)(**)

SOMMARIO.- *Si studia il problema ellittico semilineare al contorno*

$$\begin{cases} \Delta u + |u|^{p-1} \cdot u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove Ω è un aperto e limitato di $\boldsymbol{R}^n$, $n \geq 3$, $p > 1$. Si dimostra l'esistenza di un continuo di soluzioni positive singolari nell'origine per $\Omega = B_R$ e $p < (n+2)/(n-2)$, la non esistenza per $\Omega = B_R$ e $p \geq (n+2)/(n-2)$. Nel caso in cui Ω è un anello si provano esistenza e unicità a meno del segno di soluzioni radiali con un numero prefissato $k \geq 0$ di linee nodali.

SUMMARY.- *We study the semilinear elliptic boundary value problem*

$$\begin{cases} \Delta u + |u|^{p-1} \cdot u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

where Ω is an open bounded set in $\boldsymbol{R}^n$, $n \geq 3$, $p > 1$. We prove the existence of a continuum of positive solutions singular in the origin when $\Omega = B_R$ and $p < (n+2)/(n-2)$, non existence when $\Omega = B_R$ and $p \geq (n+2)/(n-2)$. When Ω is an annulus, we prove existence and uniqueness (except for the sign) of radial solutions with an arbitrary number $k \geq 0$ of nodal lines.

1. Introduzione.

In questo lavoro ci occupiamo del seguente problema ellittico semilineare al contorno

---

(*) Pervenuto in Redazione il 2 giugno 1989.

(**) Indirizzi degli Autori: G. Mancini - Dipartimento di Matematica - Università degli Studi - 40127 Bologna (Italy); E. Rosset - Dipartimento di Scienze Matematiche - Università degli Studi - 34100 Trieste (Italy).

$$\begin{cases} \Delta u + |u|^{p-1} \cdot u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

dove Ω è un aperto e limitato di $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3, p > 1$.

In particolare siamo interessati a soluzioni con singolarità isolate. Nel caso in cui $\Omega = B_R$ studieremo l'esistenza di soluzioni radiali positive tendenti a ∞ nell'origine (che chiameremo soluzioni singolari). Proveremo che per $p < (n + 2)/(n - 2)$ il problema (1.1) ha infinite soluzioni positive singolari, mentre non ne ha nessuna per $p \geq (n + 2)/(n - 2)$. Quindi, per il tipo di nonlinearità considerata, le soluzioni positive singolari esistono se e solo se esistono quelle classiche.

Nel caso in cui Ω è un anello siamo interessati a risultati di esistenza e unicità di soluzioni radiali positive; più precisamente proveremo, per $p \geq (n + 2)/(n - 2)$, l'esistenza ed unicità, a meno del segno, di soluzioni radiali di (1.1) con un numero prefissato di linee nodali. Per dimostrare l'esistenza verrà introdotta un'opportuna formulazione variazionale unidimensionale del problema.

Essendo già stato dimostrato un analogo risultato nel caso $1 < p \leq (n + 2)/(n - 2)$ da Ni, [9], esso risulta dunque stabilito per ogni $p > 1$.

E' opportuno osservare che, mentre nel caso in cui Ω è una palla ogni soluzione positiva di (1.1) è a simmetria radiale, [4], ciò non vale necessariamente quando Ω è un anello, [2].

2. Esistenza/non esistenza di soluzioni positive singolari nel caso $\Omega = B_\alpha$.

Ni e Sacks, [11], dimostrano l'esistenza di un continuo di soluzioni singolari positive di

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda |x|^l \cdot u^p = 0 & \text{in } B_R \\ u = 0 & \text{su } \partial B_R \end{cases}$$

per $1 < p < (n + 2 + 2l)/(n - 2)$, e la non esistenza di soluzioni singolari positive radiali per $p > (n + 2 + 2l)/(n - 2)$, dove $\lambda > 0, l \geq 0$.

In questo paragrafo forniremo una diversa dimostrazione e, nel caso sottocritico, una precisazione di tale risultato (v. Teorema 2.3), limitandoci a considerare il caso $\lambda = 1, l = 0$.

TEOREMA 2.1 - *Sia* $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| < \alpha\}, 1 < p < (n + 2)/(n - 2)$. *Allora esiste un continuo di soluzioni positive classiche di*

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \Delta u + |u|^{p-1}\cdot u = 0 & \text{in } \Omega\backslash\{0\} \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

tali che

$$u(x) \to +\infty \qquad per\ |x| \to 0.$$

Dato che ogni soluzione positiva di (2.1) è a simmetria radiale (la dimostrazione ricalca, con qualche adattamento, quella in [4]), le soluzioni cercate sono della forma $u(x) = u(|x|) = v(r)$, con $v(r)$ soluzione di

$$(2.2)\qquad \begin{cases} v'' + [(n-1)/r]\cdot v' + |v|^{p-1}\cdot v = 0 & \text{in } (0,\alpha] \\ v > 0 & \text{in } (0,\alpha) \\ v(\alpha) = 0\,. \end{cases}$$

La classificazione delle singolarità isolate (cfr.[6] e l'appendice per qualche osservazione) porta al seguente principio di eliminazione delle singolarità

PROPOSIZIONE 2.2 - *Sia* $u \in C^2 \cap L^{2n/(n-2)}(B_\alpha\backslash\{0\})$ *tale che*

$$\Delta u + u^p = 0 \quad in\ B_\alpha\backslash\{0\}$$

$$u \geq 0 \qquad in\ B_\alpha\backslash\{0\}.$$

Allora u può essere estesa ad una soluzione $u \in C^2(B_\alpha)$, *a simmetria radiale, di*

$$\Delta u + u^p = 0 \qquad in\ B_\alpha.$$

Consideriamo il problema di Cauchy, relativo a (2.2), di punto iniziale α

$$(2.3)\qquad \begin{cases} v'' + [(n-1)/r]\cdot v' + |v|^{p-1}\cdot v = 0 & \text{in } (0,\alpha] \\ v(\alpha) = 0 \quad v'(\alpha) = a < 0 \end{cases}$$

la cui soluzione, al variare di a in R^-, sarà indicata con $v_a(r)$.

Ricordiamo (cfr. [4]) che, per $p < (n+2)/(n-2)$ e Ω una palla, (1.1) ha un'unica soluzione (radiale) positiva u^*; equivalentemente esiste un unico $a^* < 0$ tale che $v_{a^*} \in C^2([0,\alpha])$, $v_{a^*} > 0$ in $[0,\alpha)$ e si ha che $u^*(x) = v_{a^*}(|x|)$.

Il teorema 2.1 risulterà dimostrato una volta che si sia provato il seguente

TEOREMA 2.3 - *Se* $a \in (-\infty, a^*)$ v_a *cambia segno in* $(0,\alpha)$; *se* $a \in (a^*, 0)$ v_a *è positiva e singolare nell'origine.*

Alla dimostrazione premettiamo alcuni lemmi:

LEMMA 2.4 - *Le soluzioni positive di* (2.3) *sono decrescenti e verificano* $u'(r) < 0$ *per ogni* $r \in (0,\alpha]$.

Dim. - E' chiaro, anche in virtù della proposizione 2.2, che una soluzione non monotona di (2.3) dovrebbe assumere lo stesso valore $v(\xi) = v(\eta)$ per certi ξ, η con $\xi < \eta$ ed inoltre $v'(\xi) = 0$. Per tale v, moltiplicando l'equazione per v' ed integrando tra ξ e η, si otterrebbe

$$v'(\eta)^2/2 + (n-1) \int_\xi^\eta [v'(r)^2/r] dr = 0$$

da cui una contraddizione. Dunque ogni soluzione positiva di (2.3) è non crescente. Se fosse $v'(r) = 0$ per qualche $r > 0$, dall'equazione seguirebbe $v''(r) < 0$ e quindi r sarebbe un punto di massimo locale. ◇

Sia u_s l'unica soluzione positiva radiale di (1.1) su $\Omega_s = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid s < |x| < \alpha\}$, (cfr. [9]), ed indichiamo allo stesso modo la sua estensione a zero in B_α.

LEMMA 2.5 - *Le funzioni* u_s *sono equilimitate in* $H_0^1(B_\alpha)$ *per* s *lontano da* α.

Dim. - Sia $H_r^1(\Omega_s)$ l'insieme delle funzioni di $H_0^1(\Omega_s)$ a simmetria radiale; u_s è, a meno di un moltiplicatore, soluzione di

$$m_s = \min_{\substack{u \in H_r^1(\Omega_s) \\ \int |u_+|^{p+1} = 1}} \int_{\Omega_s} |\nabla u|^2 \tag{2.4}$$

Se w_s realizza il minimo, da $\Delta w_s + \lambda w_s P = 0$ e quindi $\lambda = m_s$ segue che $u_s = m_s^{1/(p-1)} w_s$ e quindi $\int_{\Omega_s} |\nabla u_s|^2 = m_s^{(p+1)/(p-1)}$.

Ora m_s è chiaramente non decrescente in s e perciò, per s lontano da α, le funzioni u_s sono equilimitate in $H_0^1(B\alpha)$. ◇

Dim. del teorema 2.3 - Consideriamo l'insieme

$$I = \{a \in \mathbf{R}^- \mid v_a \text{ cambia segno in } (0,\alpha)\}.$$

Chiaramente I è aperto e la mappa $z : I \to (0,\alpha)$ definita da $z(a) = \max\{z \in (0,\alpha) \mid v_a(z) = 0\}$ è continua. In virtù dell'esistenza ed unicità della soluzione radiale di (1.1) sull'anello (cfr. [9]), z è biiettiva.

Siccome per $a \to -\infty$ si ha che $a \in I$ (cfr. [13]) e $z(a) \to \alpha$ segue che $I = (-\infty,\beta)$ con $\beta \le a^*$ e, necessariamente, $z(a)$ è decrescente a 0 per $a \to \beta$. Dato che per $a \to \beta$ $u_a(x) := v_a(|x|)$ converge puntualmente a $u_\beta(x) := v_\beta(|x|)$ e, in virtù del lemma 2.5, le u_a sono limitate in $H_0^1(B_\alpha)$ e quindi in $L^{2n/(n-2)}(B_\alpha)$, dal lemma di Fatou segue che $u_\beta \in L^{2n/(n-2)}(B_\alpha)$ e dunque, per la proposizione 2.2, $u_\beta = u^*$ e quindi $\beta = a^*$. ◇

TEOREMA 2.6 - *Sia* $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| < \alpha\}, p \ge (n+2)/(n-2)$. *Il problema*

$$\begin{cases} \Delta u + |u|^{p-1}\cdot u = 0 & \text{in } \Omega\backslash\{0\} \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

non ha soluzioni positive (classiche o singolari). Ogni soluzione radiale u di (2.5) *ha infinite linee nodali che si accumulano nell'origine e vale*

$$\limsup |x|^{2/(p-1)} \cdot |u(x)| > 0 \qquad \text{per } |x| \to 0. \tag{2.6}$$

Dim. - E' sufficiente verificare che le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' + [(n-1)/r]u' + |u|^{p-1}u = 0 & \text{in } (0,\alpha] \\ u(\alpha) = 0 \qquad u'(\alpha) = -a < 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

hanno una successione di zeri che si accumula nell'origine e che

$$\limsup r^{2/(p-1)} |u(r)| > 0 \qquad \text{per } r \to 0 \tag{2.8}$$

per ogni $a > 0$ e $p \ge (n+2)/(n-2)$.

Operando il cambiamento di variabile $s = 1/r$ e posto $U(s) = u(1/s)$, U soddisfa

$$(2.9)\quad \begin{cases} U'' - [(n-3)/s]U' + |U|^{p-1}U/s^4 = 0 & \text{in } [1/\alpha, +\infty) \\ U(1/\alpha) = 0 \quad U'(1/\alpha) = a\cdot\alpha^2 > 0 . \end{cases}$$

Per $n = 3$ sia $U = v\cdot s^\mu$ con $\mu = 2/(p-1)$. Allora v soddisfa

$$(2.10)\quad \begin{cases} v'' + (2\mu/s)v' + [\mu(\mu-1)/s^2]v + |v|^{p-1}v/s^2 = 0 \\ v(1/\alpha) = 0 \qquad v'(1/\alpha) = a\cdot\alpha^{\mu+2} = \gamma > 0 \end{cases}$$

e risulta $0 < \mu \leq 1/2$.

Per $n \geq 4$ e $p \geq (n+1)/(n-3)$ sia $w = U\cdot s^{(3-n)/2}$; w verifica

$$(2.11)\quad \begin{cases} w'' - [(n-1)(n-3)/4s^2]w + |w|^{p-1}w/s^{4-(n-3)(p-1)/2} = 0 \\ w(1/\alpha) = 0 \qquad w'(1/\alpha) = a\cdot\alpha^{(n+1)/2} = \gamma > 0 . \end{cases}$$

Per $p \in [(n+2)/(n-2), (n+1)/(n-3))$ si consideri $w = v\cdot s^\mu$ con $\mu = (3p+1)/(2p-2) - n/2$. Allora v verifica

$$(2.12)\quad \begin{cases} v'' + 2\mu v'/s + [-(n-1)(n-3)/4s^2 + \mu(\mu-1)/s^2]v + |v|^{p-1}v/s^2 = 0 \\ v(1/\alpha) = 0 \quad v'(1/\alpha) = a\cdot\alpha^{\mu+(n+1)/2} = \gamma > 0 . \end{cases}$$

Ci siamo così ricondotti a dei problemi già studiati da Ni, [9]. In particolare, le limitazioni ottenute: $0 < \mu \leq 1/2$ per i problemi (2.10) e (2.12) e $\nu = 4-(n-3)(p-1)/2 \leq 2$ per il problema (2.11) permettono di dimostrare che per ogni valore positivo di γ esiste $z = z(\gamma,p) < \infty$ tale che la corrispondente soluzione si annulla in z, è positiva in $(1/\alpha, z)$ e ha esattamente un massimo locale in $(1/\alpha, z)$. Segue allora facilmente che per $n \geq 3$ e $p \geq (n+2)/(n-2)$ ogni soluzione di (2.11) ha una successione di zeri $z_k \to +\infty$ e quindi che ogni soluzione di (2.7) ha una successione di zeri $w_k \to 0$.

Applicando allora al problema (2.11) il teorema di oscillazione di Sturm, [7], si ha che ogni soluzione w di (2.11) verifica

$$\limsup |w(s)|^{p-1}/s^{2-[(n-3)(p-1)/2]} > 0 \text{ per } s \to +\infty$$

e perciò ogni soluzione u di (2.7) verifica

$$\limsup r^{2/(p-1)}|u(r)| > 0 \quad \text{per } r \to 0. \quad \diamond$$

3. Esistenza e unicità di soluzioni radiali positive nel caso $\Omega = \{x \in R^n \mid \xi < |x| < \eta\}$, $p > 1$.

TEOREMA 3.1 - *Si consideri il problema*

$$
(3.1) \qquad \begin{cases} \Delta u + |u|^{p-1}\cdot u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}
$$

dove $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \xi < |x| < \eta\}, p > 1$. *Per ogni intero positivo k esiste un'unica soluzione di* (3.1) *che sia radiale, tale che* $u_r(\eta) < 0$ *e che abbia esattamente* $k - 1$ *zeri in* (ξ,η).

L'unicità è stata dimostrata in un primo lavoro di Ni [9], solo per $1 < p \le (n + 2)/(n - 2)$ e successivamente in un lavoro di Ni e Nussbaum, [10] per ogni $p > 1$. Presentiamo qui una dimostrazione diversa per il caso $p \ge (n + 2)/(n - 2)$, la quale ricalca nel metodo quella in [9], con l'accorgimento di considerare problemi di Cauchy con pendenze iniziali negative, ovvero scegliendo come punto iniziale l'estremo destro dell'intervallo $[\xi,\eta]$ anziché quello sinistro.

LEMMA 3.2 - *Sia u soluzione di*

$$
(3.2) \qquad \begin{cases} u'' + [(n-1)/r]u' + |u|^{p-1} u = 0 \\ u(\eta) = 0 \qquad u'(\eta) = -a < 0 \end{cases}
$$

dove $a > 0, p \ge (n + 2)/(n - 2)$. *Allora u ha una successione di zeri* $w_k = w_k(a,p)$ *nell'intervallo* $(0,\eta)$, $w_k \to 0$ *e* $w_k(a,p)$ *è strettamente crescente in* $a > 0$.

Dim. - L'esistenza di una successione di zeri $w_k(a,p)$ decrescente a 0 è già stata verificata nel precedente paragrafo. Rimane da provare la monotonia di $w_k(a,p)$ in a. A tal fine si introduca la funzione $w(s) = u(1/s)\cdot s^{(3-n)/2}$ che, come si è visto nel precedente paragrafo, verifica l'equazione (2.11).

E' allora sufficiente verificare che gli zeri $z_k(a,p) = 1/w_k(a,p)$ di ogni soluzione $w = w(a,p)$ sono strettamente decrescenti in a. Consideriamo $\varphi(s,a) = (\partial w/\partial a)(s,a)$. Per provare che $(\partial z_k/\partial a)(a,p)$ è negativo è sufficiente verificare che $(-1)^k \cdot \varphi(z_k) > 0$ per $k \ge 1$.

La dimostrazione segue sostanzialmente lo schema descritto in [9], per cui si ritiene opportuno rimandare a [9] per la verifica. ◇

Dim. del teorema 3.1 - Rimane da verificare l'esistenza; a tal fine è opportuno dare una formulazione variazionale al problema (3.1) espresso in forma radiale, cioè a

$$
(3.3) \qquad \begin{cases} u'' + [(n-1)/r] \cdot u' + |u|^{p-1} \cdot u = 0 \\ u(\xi) = u(\eta) = 0. \end{cases}
$$

Moltiplicando l'equazione per r^{n-1} si ottiene

$$(r^{n-1}u')' + r^{n-1}|u|^{p-1}u = 0. \tag{3.4}$$

Sia

$$N : H_0^1(\xi,\eta) \to H_0^1(\xi,\eta)$$

$$(Nu,v) = \int_\xi^\eta r^{n-1}u'(r)v'(r)dr \qquad \forall u,v \in H_0^1(\xi,\eta).$$

N è lineare, continuo ed autoaggiunto, quindi variazionale ed il suo potenziale è

$$J_1(u) = (1/2)(Nu,u) = (1/2)\int_\xi^\eta r^{n-1}|u'(r)|^2dr.$$

Sia

$$J_2(u) = [1/(p+1)]\int_\xi^\eta r^{n-1}|u|^{p+1}dr.$$

Si ha che $J_2 \in C^1(H_0^1(\xi,\eta),\mathbb{R}), \nabla J_2 = M$, con M compatto e

$$(Mu,v) = \int_\xi^\eta r^{n-1}|u|^{p-1}u \cdot v dr.$$

Consideriamo

$$J(u) = (J_1 - J_2)(u) = (1/2)\int_\xi^\eta r^{n-1}|u'(r)|^2dr - [1/(p+1)]\int_\xi^\eta r^{n-1}|u|^{p+1}dr.$$

$J \in C^1(H_0^1(\xi,\eta)\mathbb{R})$ ed i suoi punti critici sono soluzioni deboli di (3.3). Verifichiamo che J soddisfa le ipotesi del lemma del passo di montagna

i) $\exists \delta,\alpha > 0 : J(u) > J(0) = 0$ per $0 < \|u\| \leq \delta$ e $J(u) \geq \alpha > 0$ per $\|u\| = \delta$

ii) $\exists v \in H_0^1(\xi,\eta) : \|v\| \geq \delta$ e $J(v) \leq 0$

iii) (Palais-Smale): se $J(u_n)$ limitata e $\nabla J(u_n) \to 0$, allora u_n ha una sottosuccessione convergente.

i) $J(u) \geq (1/2)\xi^{n-1}\|u\|^2 - [\eta^{n-1}/(p+1)]\int_\xi^\eta |u|^{p+1}dr \geq (1/2)\xi^{n-1}\|u\|^2 +$
$- [\eta^{n-1}/(p+1)](\eta - \xi)^{(p+3)/2}\|u\|^{p+1} =$
$= \|u\|^2[\xi^{n-1}/2 - [1/(p+1)]\eta^{n-1}(\eta - \xi)^{(p+3)/2}\|u\|^{p-1}].$

Sia $\delta = \{[(p+1)/4]\cdot[(\xi/\eta)^{n-1}/(\eta-\xi)^{(p+3)/2}]\}^{1/(p-1)}$, riesce $\alpha = \delta^2\xi^{n-1}/4 > 0.$

ii) $J(\lambda u) = (\lambda^2/2)\int_\xi^\eta r^{n-1}|u'(r)|^2dr - [\lambda^{p+1}/(p+1)]\int_\xi^\eta r^{n-1}|u|^{p+1}\,dr$
$\to -\infty \quad$ per $\lambda \to +\infty$.

iii) Segue da procedimento standard e dalla disuguaglianza

$$\xi^{n-1}\|u\| \leq \|Nu\| \leq \eta^{n-1}\|u\|.$$

Il lemma del passo di montagna assicura allora che esiste una soluzione debole di (3.3) al livello

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{\gamma[0,1]} J$$

dove

$$\Gamma = \{\gamma : [0,1] \to H_0^1(\xi,\eta), \text{ continua}, \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

ed e è un elemento di $H_0^1(\xi,\eta)$ tale che $J(e) \leq 0$.

Si osservi che, se si sostituisce a $g(u) = |u|^{p-1}u$, $g^+(u) = |u_+|^p$ e a $J(u)$, $J^+(u)$ così definito

$$J^+(u) = (1/2)\int_\xi^\eta r^{n-1}|u'(r)|^2dr - [1/(p+1)]\int_\xi^\eta r^{n-1}|u_+|^{p+1}dr$$

la dimostrazione dei punti i), ii) e iii) rimane inalterata e quindi si trova una soluzione non nulla u di

$$(3.5) \qquad \begin{cases} u'' + [(n-1)/r]\cdot u' + g^+(u) = 0 & \text{in } (\xi,\eta) \\ u(\xi) = u(\eta) = 0 \end{cases}$$

cioè u è soluzione radiale di

$$(3.6) \qquad \begin{cases} \Delta u + g^+(u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

La teoria della regolarità assicura che u è soluzione classica; si può perciò applicare a (3.6) il principio di massimo, da cui segue che u è positiva in Ω e quindi $g^+(u) = g(u)$. Dunque u è soluzione positiva di (3.1). E' facile verificare che al funzionale J può applicarsi la teoria di Ljusternik-Schnirelmann ed ottenere così l'esistenza di infinite soluzioni di (3.3) e perciò di infinite soluzioni che hanno un diverso numero di zeri in (ξ,η). Si è così verificato che per $k = 1$ e per infiniti valori di k esiste una soluzione di (3.3) con $k-1$ zeri. La dipendenza continua degli zeri delle soluzioni dalla loro pendenza in η e la loro monotonia comportano che per ogni k intero positivo esiste una ed una sola soluzione u di (3.3) con $k-1$ zeri in (ξ,η) e verificante $u_r(\eta) < 0$. ◊

4. Osservazioni sulla classificazione delle singolarità nell'origine.

E' stato dimostrato da Gidas e Spruck, [6], che se u è soluzione singolare nell'origine e positiva di (1.1), allora valgono le seguenti limitazioni di crescita

$$(4.1) \quad c_1/|x|^{2/(p-1)} \leq u(x) \leq c_2/|x|^{2/(p-1)} \quad n/(n-2) < p < (n+2)/(n-2)$$

$$(4.2) \quad c_1/|x|^{n-2} \leq u(x) \leq c_2/|x|^{n-2} \qquad 1 < p < n/(n-2)$$

dove $c_i = c_i(u)$ sono costanti reali positive, $i = 1,2$.

OSSERVAZIONE 4.1 - *Non è stato provato un analogo risultato per* $p = n/(n-2)$. In tal caso le (4.1) e (4.2) sembrano suggerire la validità di una limitazione del tipo

$$(4.3) \qquad c_1/|x|^{\alpha} \leq u(x) \leq c_2/|x|^{\alpha}$$

con $\alpha = n-2$, dato che per $p = n/(n-2)$ risulta $2/(p-1) = n-2$.
Tale congettura risulta in realtà falsa anzi accade che ogni soluzione positiva di (1.1) di classe $C^2(\Omega - \{0\})$ non può verificare (4.3) per alcun valore di α. Infatti, se u è soluzione singolare positiva di (1.1) per $p = n/(n-2)$ si ha che (v. [1], [8])

$$(4.4) \qquad u \in L^{n/(n-2)}(\Omega)$$

$$(4.5) \qquad -\Delta u = u^{n(n-2)} \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

La (4.4) comporta che non può valere la limitazione dal basso in (4.3) per $\alpha \geq n-2$.

Vale inoltre

$$u \notin L^q \qquad \forall\, q > n/(n-2). \tag{4.6}$$

Se fosse infatti $u \in L^q(\Omega)$ per qualche $q > n/(n-2)$, in virtù di (4.5) si può verificare, con un argomento di tipo boot-strap, che u sarebbe di classe $C^2(\Omega)$, il che comporta un assurdo.
Dalla (4.6) segue che non può valere la limitazione superiore in (4.3) per nessun $\alpha < n-2$.
Segue allora che (4.3) non può sussistere per nessun α ed inoltre la (4.4) e la (4.6) comportano che

$$\liminf u(x) \cdot |x|^{n-2} = 0 \qquad \text{per } |x| \to 0 \tag{4.7}$$

$$\limsup u(x) \cdot |x|^q = +\infty \qquad \text{per } |x| \to 0 \qquad \forall\, q < n-2. \tag{4.8}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BRÉZIS, P.L. LIONS, *A note on isolated singularities for linear elliptic equations*, Math. Anal. and Appl., part A, Adv. in Math. Suppl. Stud. Vol. 7A, Academic Press, New York and London (1981), 263-266.

[2] H. BRÉZIS, L. NIRENBERG, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. *36* (1983), 437-478.

[3] H. BRÉZIS, L. VERON *Removable singularities for some nonlinear elliptic equations*, Arch. Rational Mech. Analysis *75* (1980), 1-6.

[4] B. GIDAS, W.M. NI and L. NIRENBERG, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. *68* (1979), 209-243.

[5] B. GIDAS, W.M. NI and L. NIRENBERG, *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbf{R}^n$*, Adv. in Math. Suppl. Stud. Vol. 7A, Academic Press, New York and London (1981), 369-402.

[6] B. GIDAS and J. SPRUCK, *Global and local behaviour of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. *34* (1981), 525-598.

[7] P. HARTMAN, *Ordinary differential equations*, Birkhauser (1982).

[8] P.L. LIONS, *Isolated singularities in semilinear problems*, J. Diff. Equat. *38* (1980), 441-450.

[9] W.M. NI, *Uniqueness of solutions of nonlinear Dirichlet problems*, J. Diff. Equat. *50* (1983), 289-304.

[10] W.M. NI and R.D. NUSSBAUM, *Uniqueness and nonuniqueness for positive radial solutions of $\Delta u + f(u,r) = 0$*, Comm. Pure Appl. Math. *38* (1985), 67-108.

[11] W.M. NI and P. SACKS, *Singular behaviour in nonlinear parabolic equations*, Trans. Amer. Math. Soc. *287* (1985), 657-671.

[12] L.A. PELETIER and J. SERRIN, *Uniqueness of positive solutions of semilinear equations in $\mathbf{R}^n$*, Arch. Rational Mech. Analysis *81* (1983), 181-197.

[13] M. STRUWE, *Multiple solutions of anticoercive boundary value problems for a class of ODE's of second order*, J. Diff. Equat. *37* (1980), 285- 295.