SU UNA GENERALIZZAZIONE DELLE FORMULE DI QUADRATURA DI GAUSS-JACOBI (*)

di PAOLO GHELARDONI (a Pisa) (**)

SOMMARIO. - *Si studiano formule di quadratura alle derivate dell'integrando negli estremi* -1 *ed* 1 *dell'intervallo di integrazione ed aventi come nodi semplici gli zeri di un opportuno polinomio di Jacobi.*
Di tali formule si determina anche una espressione esplicita dell'integrale del nucleo di Peano, nucleo che si mantiene di segno costante sull'intervallo.

SUMMARY. - *The author studies quadrature formulae with the derivatives of the function which must be integrated calculated on boundary values* -1 *and* 1 *of the integration interval and with the zeros of on opportune Jacobi polinomial as single nodes.*
On such formulae is also carried out an explicit expression for the integral of the respective Peano's Kernel which is, on $[-1,1]$, *of constant sign.*

1. - Siano α e β due numeri reali > -1, μ e ν due numeri interi non negativi,

$$x_{nj}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

(*) Pervenuto in Redazione il 15 luglio 1987.
(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematiche Applicate - Facoltà di Ingegneria - Università di Pisa - Via Bonanno, 25 b - 56100 Pisa (Italia).

gli zeri del polinomio di Jacobi [1]

$$P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(x)$$

di ordine n ed $f(x)$ una funzione definita sull'intervallo $[-1,1]$, ivi integrabile secondo Lebesgue rispetto al peso $(1-x)^\alpha\ (1+x)^\beta$ e tale che, se $\mu > 1$, essa sia dotata in 1 di derivata $(\mu-1)$-esima, se $\nu > 1$, essa sia dotata in -1 di derivata $(\nu-1)$-esima.

Com'è noto [2] esiste una ed una sola formula di quadratura del tipo

$$(1)\qquad \int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x)\,dx = \sum_{h=0}^{\nu-1} B_h^{(\alpha,\beta)} f^{(h)}(-1) + \\ + \sum_{j=1}^{n} A_j^{(\alpha,\beta)} f(x_{nj}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}) + \sum_{h=0}^{\mu-1} C_h^{(\alpha,\beta)} f^{(h)}(1) + R(f)$$

per la quale siano rispettate le due condizioni seguenti:

1) i coefficienti $B_h^{(\alpha,\beta)}, A_j^{(\alpha,\beta)}, C_h^{(\alpha,\beta)}$ sono indipendenti da $f(x)$,

2) il resto $R(f)$ si annulla se $f(x)$ è un polinomio algebrico di grado minore od uguale a

$$g^* = \mu + \nu + n - 1 .$$

Essendo, in virtù della proprietà di ortogonalità del polinomio $P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(x)$ sull'intervallo $[-1,1]$ rispetto al peso $(1-x)^{\alpha+\mu}(1+x)^{\beta+\nu}$,

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,[(1-x)^\mu(1+x)^\nu P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(x)]\,x^r\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha+\mu}(1+x)^{\beta+\nu} P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(x)\,x^r\,dx = 0\ (r = 0,1,2,\dots,n-1),$$

per il grado di precisione g della formula (1) risulta [3]

$$(2)\qquad g = g^* + n = \mu + \nu + 2n - 1 .$$

Osservazione. La formula (1) è una naturale generalizzazione di alcune formule classiche.

Per $\mu = \nu = 0$, non figurando in tal caso la prima e la terza somma a secondo membro della (1), essa riducesi alla ben nota formula di Gauss-Jacobi.

Per $\mu = 0$, $\nu = 1$, non figurando in tal caso la terza somma a secondo membro della (1), essa riducesi alla formula di Bouzitat

(1) Per quanto riguarda i polinomi di Jacobi e tutte le proprietà ad collegate che, per il seguito, utilizzeremo cfr. [1], nn. 3, 4.

(2) Cfr., ad esempio, [2], Teorema 1.1.

(3) Cfr., ad esempio, [2], Teorema 3.1.

di prima specie, [3], e, in particolare, per $\alpha = \beta = 0$, alla formula di Radau [4].

Per $\mu = \nu = 1$, essa riducesi alla formula di Bouzitat di seconda specie, [3], e, in particolare, per $\alpha = \beta = 0$, alla formula di Lobatto [5].

2. - Sul calcolo dei coefficienti $A_j^{(\alpha,\beta)}$.

Applicando la formula (1) al polinomio

$$f_j(x) = \frac{(1-x)^\mu (1+x)^\nu P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(x)}{(1-x_{nj}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)})^\mu \, (1+x_{nj}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)})^\nu \, (x-x_{nj}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)})} \cdot \left[\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(x)\right]^{-1}_{x = x_{nj}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}}$$

di grado $\mu + \nu + n - 1$, essendo, come subito si verifica,

$f_j^{(h)}(-1) = 0 \ (h = 0, 1, \dots, \nu - 1)$, $f_j(x_{ni}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}) = \delta_{ij}$ [6],

$f_j^{(h)}(1) = 0 \ (h = 0, 1, \dots, \mu - 1)$, ed in virtù della (2), $R(f_j) = 0$,

si ottiene

$$A_j^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{(1-x_{nj}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)})^\mu \, (1+x_{nj}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)})^\nu} \cdot \left[\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(x)\right]^{-1}_{x = x_{nj}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}} \cdot \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+\mu}(1+x)^{\beta+\nu} \frac{P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(x)}{x - x_{nj}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}} \, dx$$

dalla quale, per essere

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+\mu}(1+x)^{\beta+\nu} \frac{P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(x)}{x - x_{nj}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}} \, dx =$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta+\mu+\nu+1}\,\Gamma(\alpha+\mu+n+1)\,\Gamma(\beta+\nu+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+\beta+\mu+\nu+n+1)\,[1-(x_{nj}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)})^2]} \left[\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(x)\right]^{-1}_{x = x_{nj}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}} \quad [7]$$

(4) Cfr. anche [1], n. 4.7.
(5) Cfr. anche [1], n. 4.8.
(6) δ_{ij} simbolo di Kronecker.
(7) $\Gamma(z)$ funzione euleriana di seconda specie o funzione gamma.

e

$$\left[\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(x)\right]_{x = x_{nj}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}} =$$

$$= \frac{2(\beta+\nu+n)}{1-(x_{nj}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)})^2} P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu-1)}(x_{nj}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}),$$

segue

$$A_j^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+\mu+\nu-1}\Gamma(\alpha+\mu+n+1)\Gamma(\beta+\nu+n)}{n!\,\Gamma(\alpha+\beta+\mu+\nu+n+1)(\beta+\nu+n)(1-x_{nj}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)})^{\mu-1}} \cdot \tag{3}$$
$$\cdot \frac{[P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu-1)}(x_{nj}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)})]^{-2}}{(1+x_{nj}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)})^{\nu-1}} \,.$$

3. - Sul calcolo dei coefficienti $B_h^{(\alpha,\beta)}$ e $C_h^{(\alpha,\beta)}$.

Consideriamo i polinomi seguenti

$$e_k(x) = \frac{(1-x)^\mu}{2^\mu}\frac{(1+x)^k}{k!}\frac{P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(x)}{P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(-1)} \quad (k=0,1,\dots,\nu-1),$$

$$g_k(x) = \frac{(1+x)^\nu}{2^\nu}\frac{(1-x)^k}{k!}\frac{P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(x)}{P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(1)} \quad (k=0,1,\dots,\mu-1),$$

entrambi di grado $\leq \mu+\nu+n+1$.

Si verifica subito che, per essi, comunque sia fissato k, rispettivamente risulta

$$e_k(x_{nj}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}) = 0\,,$$
$$e_k^{(h)}(1) = 0 \; (h=0,1,\dots,\mu-1),\; e_k^{(h)}(-1) = 0 \; (h=0,1,\dots,k-1),$$
$$e_k^{(k)}(-1) = 1\,;$$

$$g_k(x_{nj}^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}) = 0\,,$$
$$g_k^{(h)}(-1) = 0 \; (h=0,1,\dots,\nu-1),\; g_k^{(h)}(1) = 0 \; (h=0,1,\dots,k-1),$$
$$g_k^{(k)}(1) = (-1)^k\,.$$

Pertanto, applicando la formula (1) ad $e_k(x)$ e $g_k(x)$, essendo, in virtù della (2), $R(e_k) = R(g_k) = 0$, il calcolo dei coefficienti $B_h^{(\alpha,\beta)}$ e $C_h^{(\alpha,\beta)}$ si riconduce alla risoluzione dei due seguenti sistemi lineari

$$\sum_{h=k}^{\nu-1} e_k^{(h)}(-1)\, B_h^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2^\mu k!\, P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(-1)} \cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+\mu}(1+x)^{\beta+\nu}\, P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(x)\, dx$$
$$(k = 0\,,1\,,\ldots,\nu-1),$$

$$\sum_{h=k}^{\mu-1} g_k^{(h)}(1)\, C_h^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2^\nu k!\, P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(1)} \cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+\mu}(1+x)^{\beta+\nu}\, P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(x)\, dx$$
$$(k = 0\,,1\,,\ldots,\mu-1),$$

entrambi di tipo triangolare superiore.

Essendo, per $h > k$,

$$e_k^{(h)}(x) = \frac{\binom{h}{h-k}}{2^\mu P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(-1)} \sum_{i=0}^{h-k} \binom{h-k}{i} (-1)^i \frac{\mu!}{(\mu-i)!} (1-x)^{\mu-i} \cdot$$
$$\cdot \frac{d^{h-k-i}}{dx^{h-k-i}} P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(x),$$

$$g_k^{(h)}(x) = \frac{\binom{h}{h-k}}{2^\nu P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(1)} \sum_{i=0}^{h-k} \binom{h-k}{i} \frac{\nu!}{(\nu-i)!} (1+x)^{\nu-i} \cdot$$
$$\cdot \frac{d^{h-k-i}}{dx^{h-k-i}} P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(x),$$

e, $\forall \alpha^*, \beta^* > -1$,

$$\frac{d^s}{dx^s} P_n^{(\alpha^*,\beta^*)}(x) = \frac{1}{2^s} \frac{\Gamma(\alpha^*+\beta^*+n+s+1)}{\Gamma(\alpha^*+\beta^*+n+1)} P_{n-s}^{(\alpha^*+s,\beta^*+s)}(x),$$

$$P_{n-s}^{(\alpha^*+s,\beta^*+s)}(1) = \binom{\alpha^*+n}{n-s},\quad P_{n-s}^{(\alpha^*+s,\beta^*+s)}(-1) = (-1)^{n-s}\binom{\beta^*+n}{n-s},$$

risulta

$$e_k^{(h)}(-1) = \frac{(-1)^{h-k}\binom{h}{h-k}}{2^{h-k}\binom{\beta+\nu+n}{n}\Gamma(\alpha+\beta+\mu+\nu+n+1)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{h-k} \binom{h-k}{i} \frac{\mu!}{(\mu-i)!} \Gamma(\alpha+\beta+\mu+\nu+n+h-k-i+1) \binom{\beta+\nu+n}{n-h+k+i},$$

$$g_k^{(h)}(1) = \frac{\binom{h}{h-k}}{2^{h-k}\binom{\alpha+\mu+n}{n}\Gamma(\alpha+\beta+\mu+\nu+n+1)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{h-k}\binom{h-k}{i}\frac{\nu!}{(\nu-i)!}\Gamma(\alpha+\beta+\mu+\nu+n+h-k-i+1)\binom{\alpha+\mu+n}{n-h+k+i}.$$

Essendo, inoltre, $\forall \gamma, \delta, \alpha^*, \beta^*$ reali >-1,

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\gamma}(1+x)^{\delta} P_n^{(\alpha^*,\beta^*)}(x)\,dx = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{\alpha^*+n}{i}\binom{\beta^*+n}{n-i}\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}(1-x)^{\gamma+n-i}(1+x)^{\delta+i}\,dx,$$

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\gamma+n-i}(1+x)^{\delta+i}\,dx = 2^{\gamma+\delta+n+1}\int_{0}^{1} t^{\gamma+n-i}(1-t)^{\delta+i}\,dt =$$

$$= 2^{\gamma+\delta+n+1}\frac{\Gamma(\gamma+n-i+1)\;\Gamma(\delta+i+1)}{\Gamma(\gamma+\delta+n+2)},$$

i sistemi detti possono, poi, scriversi, rispettivamente, nella forma:

$$\sum_{h=k}^{\nu-1}\frac{(-1)^{h-k}\binom{h}{h-k}}{2^{h+1}\Gamma(\alpha+\beta+\mu+\nu+n+1)}\Big\{\sum_{i=0}^{h-k}\binom{h-k}{i}\frac{\mu!}{(\mu-i)!}\Gamma(\alpha+\beta+\mu+\nu+$$

$$+n+h-k-i+1)\cdot\binom{\beta+\nu+n}{n-h+k+i}\Big\}B_h^{(\alpha,\beta)} =$$

(4)

$$= \frac{2^{\alpha+\beta}}{k!\;\Gamma(\alpha+\beta+\mu+k+n+2)}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{\alpha+\mu+n}{i}\binom{\beta+\nu+n}{n-i}\Gamma(\alpha+\mu+$$

$$+n-i+1)\cdot\Gamma(\beta+k+i+1) \qquad (k=0,1,\dots,\nu-1),$$

$$\sum_{h=k}^{\mu-1}\frac{\binom{h}{h-k}}{2^{h+1}\Gamma(\alpha+\beta+\mu+\nu+n+1)}\Big\{\sum_{i=0}^{h-k}\binom{h-k}{i}\frac{\nu!}{(\nu-i)!}\Gamma(\alpha+\beta+\mu+\nu+$$

$$+n+h-k-i+1)\cdot\binom{\alpha+\mu+n}{n-h+k+i}\Big\}C_h^{(\alpha,\beta)} =$$

(5)

$$= \frac{2^{\alpha+\beta}}{k!\;\Gamma(\alpha+\beta+\nu+k+n+2)}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{\alpha+\mu+n}{i}\binom{\beta+\nu+n}{n-i}\Gamma(\alpha+$$

$$+k+n-i+1)\cdot\Gamma(\beta+\nu+i+1) \qquad (k=0,1,\dots,\mu-1).$$

4. - Sul nucleo di Peano.

Poiché il nucleo di Peano $K(t)$ della formula (1) si mantiene di segno costante sull'intervallo $[-1,1]$ (8), per il polinomio

$$U(x)=(1-x)^{\mu}(1+x)^{\nu}[P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(x)]^2,$$

di grado $\mu+\nu+2n$, risulta (9)

$$R(U)=(-1)^{\mu}(\mu+\nu+2n)!\,a_n^2\int_{-1}^{1}K(t)\,dt,$$

con a_n coefficiente di x^n nel polinomio $P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(x)$.

Applicando ad $U(x)$ la formula (1) si ottiene, allora, l'uguaglianza

$$\int_{-1}^{1}K(t)\,dt=\frac{(-1)^{\mu}}{(\mu+\nu+2n)!\,a_n^2}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}U(x)\,dx,$$

dalla quale, essendo

$$a_n=\frac{1}{2^n n!}\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+\mu+\nu+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\mu+\nu+n+1)}$$

e

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}U(x)\,dx=$$

$$=\frac{2^{\alpha+\beta+\mu+\nu+1}}{\alpha+\beta+\mu+\nu+2n+1}\,\frac{\Gamma(\alpha+\mu+n+1)\,\Gamma(\beta+\nu+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+\beta+\mu+\nu+n+1)},$$

segue

$$\int_{-1}^{1}K(t)\,dt=(-1)^{\mu}\,\frac{2^{\alpha+\beta+\mu+\nu+2n+1}\,n!\,\Gamma(\alpha+\beta+\mu+\nu+n+1)}{(\mu+\nu+2n)!\,(\alpha+\beta+\mu+\nu+2n+1)}\,\cdot$$

$$\cdot\,\frac{\Gamma(\alpha+\mu+n+1)\,\Gamma(\beta+\nu+n+1)}{[\Gamma(\alpha+\beta+\mu+\nu+2n+1)]^2}\,.\tag{6}$$

5. - Il caso $\alpha=\beta$ e $\mu=\nu$.

Se $\alpha=\beta$ e $\mu=\nu$, essendo gli estremi di integrazione, così come gli zeri del polinomio (ultrasferico) $P_n^{(\alpha+\mu,\beta+\nu)}(x)$, simmetrici rispetto all'origine ed il peso $(1-x^2)^{\alpha}$ una funzione pari, risulta (10)

(8) Cfr. [2], Teorema 4.1.

(9) Cfr., ad esempio, [2], Teorema 5.1 e relativa osservazione.

(10) Cfr., ad esempio, [2], n. 2, osservazione 4.

$$C_h^{(\alpha,\alpha)} = (-1)^h B_h^{(\alpha,\alpha)} \qquad (h = 0, 1, \ldots, \mu - 1),$$
$$A_j^{(\alpha,\alpha)} = A_{n-j+1}^{(\alpha,\alpha)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Pertanto, la formula (1) assume, in tal caso, la forma:

$$(1') \quad \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^\alpha f(x)\, dx = \sum_{h=0}^{\mu-1} B_h^{(\alpha,\alpha)} [f^{(h)}(-1) + (-1)^h f^{(h)}(1)] +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} A_j^{(\alpha,\alpha)} [f(x_{nj}^{(\alpha+\mu,\alpha+\mu)}) + f(-x_{nj}^{(\alpha+\mu,\alpha+\mu)})] + R(f)$$

se $n = 2m$,

$$(1'') \quad \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^\alpha f(x)\, dx = \sum_{h=0}^{\mu-1} B_h^{(\alpha,\alpha)} [f^{(h)}(-1) + (-1)^h f^{(h)}(1)] +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} A_j^{(\alpha,\alpha)} [f(x_{nj}^{(\alpha+\mu,\alpha+\mu)}) + f(-x_{nj}^{(\alpha+\mu,\alpha+\mu)})] + A_{m+1}^{(\alpha,\alpha)} f(0) + R(f)$$

se $n = 2m + 1$.

Si osservi infine che, per $\alpha = \beta = 0$ e $\mu = \nu$, essendo $\forall \lambda \in N$, $\Gamma(\lambda + 1) = \lambda!$, la (3), la (4) e la (6) assumono, rispettivamente, la forma

$$(3') \quad A_j^{(0,0)} = \frac{2^{2\mu-1} [(\mu+n-1)!]^2 [P_n^{(\mu,\mu-1)} (x_{nj}^{(\mu,\mu)})]^{-2}}{n!\, (2\mu+n)!\, [1 - (x_{nj}^{(\mu,\mu)})^2]^{\mu-1}},$$

$$(4') \quad \sum_{h=k}^{\mu-1} \frac{(-1)^{h-k} \binom{h}{h-k}}{2^{h+1} (2\mu+n)!} \left\{ \sum_{i=0}^{h-k} \binom{h-k}{i} \frac{\mu!}{(\mu-i)!} (2\mu+n+h-k-i)! \binom{\mu+n}{n-h+k+i} \right\}.$$

$$\cdot B_h^{(0,0)} = \frac{1}{k!\, (\mu+k+n+1)!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{\mu+n}{i} \binom{\mu+n}{n-i} (\mu+n-i)!\, (k+i)!,$$
$$(k = 0, 1, \ldots, \mu - 1),$$

$$(6') \quad \int_{-1}^{1} K(t)\, dt = (-1)^\mu \frac{2^{2\mu+2n+1} n!\, (2\mu+n)!\, [(\mu+n)!]^2}{(2\mu+2n+1)!\, [(2\mu+2n)!]^2}.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. GHIZZETTI, A. OSSICINI, *Quadrature formulae*, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart (1970).

[2] S. GUERRA, *Sulle formule di quadratura esatte per polinomi algebrici*, Rend. Ist. Matem. Univ. Trieste, vol. XVI (1984).

[3] J. BOUZITAT, *Sur l'intégration numerique approchée par la méthode de Gauss generalisée et sur une extension de cette méthode*, C. R. Acad. Sc. Paris, 229 (1949).