CERTAINES CONDITIONS D'EXISTENCE DES RÉSIDUELS GÉNÉRALISÉS (*)

par MARIA KONSTANTINIDOU (à Thessaloniki) (**)

SOMMARIO. - *Si studiano alcune condizioni di esistenza di residuali e di residuati generalizzati in certe classi di iperstrutture* [o] *ordinate.*

SUMMARY. - *We study existence conditions of residuals and generalized residuals in some classes of ordinated hyperstructures* [o].

DÉFINITION 1 - Dans un hypergroupoïde ordonné [1] H $(H_d \cdot 0)$

(*) Pervenuto in Redazione il 23 aprile 1987.

(**) Indirizzo dell'Autore: Ecole Polytêchnique de l'Université Aristote de Thessaloniki - Departement des Sciences Physiques et Mathématiques - 54006 Thessaloniki (Grèce).

(o) On appelle *hyperstructure* un ensemble E muni au moins d'une hyperoperation (c'est-à-dire d'une application $E \times E \to \mathcal{P}(E)$, où $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des sous-ensembles de E [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14]).

(1) On appelle *hypergroupoïde ordonné* [4] un ensemble H muni d'une hyperopération $a \cdot b$, ou simplement ab, et d'une relation d'ordre $\leqslant$, telles que l'on ait:

I. $(H, \cdot)$ est un hypergroupoïde.

II. ab est un segment de H, pour tout $a, b \in H$.

III. $x \leqslant y \Rightarrow (\forall \xi \in xa)(\exists \eta \in ya)[\xi \leqslant \eta]$ et $(\forall \vartheta \in ax)(\exists k \in ay)[\vartheta \leqslant k]$, quels que soient x, y, $a \in H$.

Si de plus,
$x \leqslant y \Rightarrow (\forall \eta_1 \in ya)(\exists \xi_1 \in xa)[\xi_1 \leqslant \eta_1]$ et $(\forall k_1 \in ay)(\exists \vartheta_1 \in ax)[\vartheta_1 \leqslant k_1]$, pour tout $a \in H$, on qu'on a un *hypergroupoïde strictement ordonné,* $(H_d . S . 0)$.

Si $(H, \cdot)$ est un demi-hypergroupe (hypergroupe, hypergroupe canonique, hypergroupe cyclique [9] [10] [3]) on l'appelle alors un *demi-hypergroupe (hypergroupe, hypergroupe canonique, hypergroupe cyclique)* ordonné.

on appelle *résiduel a gauche de ab par cd*, où $a, b, c, d \in H$, le[(2)] $ab \cdot . cd = \max \mathfrak{X}_{ab \cdot . cd} = \max \{x \in H : x(cd) \leqslant ab\}$.

Définition 2 - Dans un $H_d \cdot 0\ H$, on appelle *résiduel généralisé a gauche de ab par cd*, où $a, b, c, d \in H$, le[(3)]

$$g(ab \cdot . cd) = \max \mathfrak{R}_{g(ab \cdot . cd)} = \max \{x \in H : x(cd) \overset{/}{\leqq} ab\}.$$

On notera $\mathfrak{R}_{g(ab \cdot . cd)} - \mathfrak{X}_{ab \cdot . cd} = \mathfrak{D}_{ab \cdot . cd}$.

On définit de manière analogue les *résiduels* et les *résiduels généralisés à droite* [$ab . \cdot cd$ et $g(ab . \cdot cd)$ respectivement].

Dans le cas où le résiduel (résiduel généralisé) à gauche coïncide avec le résiduel (résiduel généralisé) à droite, on le note par $ab : cd$ [$g(ab : cd)$]. C'est le cas p.e. si H est commutatif.

Si pour tout couple d'élements d'un $H_d \cdot 0$ les résiduels (les résiduels généralisés) à gauche (à droite) existent on dit qu'on a un *hypergroupoïde résidué (résidué généralisé) à gauche (à droite)*.

Enfin, dans le cas ou H est résidué (résidué généralisé) à gauche et à droite on dit alors que H est *résidué* [*résidué généralisé*].

Dans un hypergroupoïde ordonné en treillis [12] il est facile de voir que l'ensemble $\mathfrak{X}_{a \cdot . b}$ est stable par l'intersection. En effet, si $x_1, x_2 \in \mathfrak{X}_{a \cdot . b}$ c'est-à-dire $x_1 b \leqslant a$, $x_2 b \leqslant a$, on a $(x_1 \wedge x_2)\, b \leqslant a$, car $x_1 \wedge x_2 \leqslant x_1$ [13].

De même, on démontre que dans un hypergroupoïde strictement ordonné, en treillis [12] alors $\mathfrak{R}_{g(a \cdot . b)}$ est stable par l'intersection.

En ce qui concerne la stabilité des $\mathfrak{X}_{a \cdot . b}$, $\mathfrak{R}_{g(a \cdot . b)}$ par l'union, on a les propositions:

Proposition 1 - *Dans un hypergroupoïde strictement réticulé*[(4)] *$(H_d \cdot S \cdot R)$ H on a*

i) $\mathfrak{X}_{a \cdot . b} \neq \phi \Rightarrow \mathfrak{X}_{a \cdot . b}$ *stable par l'union*
ii) *H treillis complet et* $\mathfrak{X}_{a \cdot . b} \neq \phi \Rightarrow a \cdot . b = \bigvee x_i$, $x_i \in \mathfrak{X}_{a \cdot . b}$
iii) *L'existence de $a \cdot . b$ entraine que $\mathfrak{X}_{a \cdot . b}$, est un idéal principal du treillis H engendré par $a \cdot . b$.*

---

(2) Si $A, B \in \mathfrak{P}(H)$, où H un $H_d \cdot 0$, on note $A \leqslant B$ si et seulement si $a \leqslant b$ pour tout $(a, b) \in A \times B$.

(3) Si $C, D \in \mathfrak{P}(H)$, où H un $H_d \cdot 0$, on note $C \overset{/}{\leqq} D$ si et seulement si
i) $(\forall d \in D)(\exists c \in C)\ [c \leqslant d]$
ii) $c' \ngtr d'$, quelque soit $(c', d') \in C \times D$.

(4) Un hypergroupoïde réticulé est un hypergroupoïde ordonné et un hypergroupoïde strictement réticulé est un hypergroupoïde strictement ordonné [12].

La démonstration de la proposition ci-dessus est analogue à celle de la théorie classique.

Dans tout ce qui suit on suppose que $\mathfrak{D}_{a\cdot\cdot b} \neq \phi$.

REMARQUE 1 - Dans un $H_d \cdot 0$ on a

$$(x_1, x_2) \in \mathfrak{D}_{a\cdot\cdot b} \times \mathfrak{R}_{g(a\cdot\cdot b)} \Rightarrow x_1 \vee x_2 \notin \mathfrak{X}_{a\cdot\cdot b}.$$

En effet, si $x_1 \vee x_2 \in \mathfrak{X}_{a\cdot\cdot b}$, puisque $x_1, x_2 \leqslant x_1 \vee x_2$, on aurait [13] $x_1, x_2 \in \mathfrak{X}_{a\cdot\cdot b}$, ce qui est absurde.

Soit un hypergroupoïde réticulé $(H_d \cdot R)$.

PROPOSITION 2 - $(x_1, x_2) \in \mathfrak{D}_{a\cdot\cdot b} \times \mathfrak{R}_{g(a\cdot\cdot b)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow [x_1 \vee x_2 \in \mathfrak{D}_{a\cdot\cdot b} \Leftrightarrow a \notin (x_1 \vee x_2)\, b].$$

Démonstration. Soit $x_1, x_2 \in \mathfrak{D}_{a\cdot\cdot b}$, $x_1 \vee x_2 \in \mathfrak{D}_{a\cdot\cdot b}$ et on suppose que $a \in (x_1 \vee x_2)\, b$. Alors évidement $\max [x_1 \vee x_2)\, b] \geqslant a$. Mais comme la relation $\max [(x_1 \vee x_2)\, b]$ est exlue par supposition on aura $\max [(x_1 \vee x_2)\, b] = a$ et donc $x_1 \vee x_2 \in \mathfrak{X}_{a\cdot\cdot b}$, ce qui est absurde.

Réciproquement, soit $x_1, x_2 \in \mathfrak{D}_{a\cdot\cdot b}$, $a \notin (x_1 \vee x_2)\, b$; on suppose que $x_1 \vee x_2 \notin \mathfrak{D}_{a\cdot\cdot b}$. Puisque $x_1, x_2 \in \mathfrak{D}_{a\cdot\cdot b}$, c'est-à-dire $x_1 b \not\leqq a$, $x_2 b \not\leqq a$, il existe des élements $z_1 \in x_1 b$ et $z_2 \in x_2 b$ tels que $z_1, z_2 \leqslant a$, donc $z = z_1 \vee z_2 \leqslant a$. D'autre part,

$$z = z_1 \vee z_2 \in x_1 b \vee x_2 b \subseteq (x_1 \vee x_2)\, b.$$

Mais puisque $x_1 \vee x_2 \notin \mathfrak{D}_{a\cdot\cdot b}$, il existe un élément $w \in (x_1 \vee x_2)\, b$ tel que $w > a$, donc $w > a \geqslant z$, c'est-à-dire $a \in (x_1 \vee x_2)\, b$, ce qui est contradictoire.

D'une manière analogue, on démontre que

$$(x_1, x_2) \in \mathfrak{D}_{a\cdot\cdot b} \times \mathfrak{X}_{a\cdot\cdot b} \Rightarrow [x_1 \vee x_2 \in \mathfrak{D}_{a\cdot\cdot b} \Leftrightarrow a \notin (x_1 \vee x_2)\, b].$$

COROLLAIRE 1 - *$\mathfrak{R}_{g(a\cdot\cdot b)}$ est stable par l'union si et seulement si $a \notin (\bigvee_{j=1}^{k} x_j)\, b$, pour tout $k \in N$, tel que*

$$(x_1, \ldots, x_{l-1}, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_k) \in \mathfrak{R}^{l-1}_{g(a\cdot\cdot b)} \times \mathfrak{D}_{a\cdot\cdot b} \times \mathfrak{R}^{k-1}_{g(a\cdot\cdot b)}$$

et dans ce cas on a $\bigvee_{j=1}^{k} x_j \in \mathfrak{D}_{a\cdot\cdot b}$.

REMARQUE 2 - Si H en tant que treillis satisfait à la condition de chaine ascendante, on sait qu'il existe un $k \in N$ [2] tel que

$$\bigvee_{x_i \in \mathfrak{R}_{g(a\cdot\cdot b)}} x_i = \bigvee_{j=1}^{k} x_j,\ x_j \in \mathfrak{R}_{g(a\cdot\cdot b)},\ \text{pour tout } j \in \{1, \ldots, k\}.$$

D'autre part, si $\mathfrak{R}_{g(a \cdot . b)}$ est stable par l'union, parmi les elements x_j il existe un x_l tel que $x_l \in \mathfrak{D}_{a \cdot . b}$. Car, si $x_j \in \mathfrak{D}_{a \cdot . b}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$, alors $x_j \in \mathfrak{X}_{a \cdot . b}$ et par consequent

$$\bigvee_{x_i \in \mathfrak{R}_{g(a \cdot . b)}} x_i = \bigvee_{j=1}^{k} x_j \in \mathfrak{X}_{a \cdot . b},$$

ce qui contredit le fait que $\mathfrak{R}_{g(a \cdot . b)} \supset \mathfrak{X}_{a \cdot . b}$, puisque $\mathfrak{D}_{a \cdot . b} \neq \phi$. Donc il en résulte la proposition:

PROPOSITION 3 -

$$g(a \cdot . b) = \bigvee_{x_i \in \mathfrak{R}_{g(a \cdot . b)}} x_i \Rightarrow g(a \cdot . b) = \bigvee_{x_m \in \mathfrak{D}_{a \cdot . b}} x_m .$$

PROPOSITION 4 - *Dans un $H_d.S.R\ H$, où la condition de chaine ascendante est satisfaite, les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $(\forall k \in N)\ [(x_1, \ldots, x_{l-1}, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_k) \in \mathfrak{R}^{l-1}_{g(a \cdot . b)} \times \mathfrak{D}_{a \cdot . b} \times \times \mathfrak{R}^{k-1}_{g(a \cdot . b)} \Rightarrow a \notin (\bigvee_{j=1}^{k} x_j)\ b$

ii) $a \notin (\bigvee_{x_i \in \mathfrak{R}_{g(a \cdot . b)}} x_i)\ b$

iii) $\exists\, g(a \cdot . b) = \bigvee_{x_i \in \mathfrak{R}_{g(a \cdot . b)}} x_i$

iv) $\mathfrak{R}_{g(a \cdot . b)}$ *est un idéal principal du treillis H engendré par $g(a \cdot . b)$.*

Demonstration. i) $\Rightarrow$ ii). D'après le Corollaire 1, $\mathfrak{R}_{g(a \cdot . b)}$ est stable par l'union. Compte tenu de la Remarque 2 il existe $m \in N$ tel que

$$\bigvee_{x_i \in \mathfrak{R}_{g(a \cdot . b)}} x_i = \bigvee_{j=1}^{m} x_j \in \mathfrak{D}_{a \cdot . b}, \text{ où } x_j \in \mathfrak{R}_{g(a \cdot . b)},$$

et par conséquent [cor. 1] $a \notin (\bigvee_{x_i \in \mathfrak{R}_{g(a \cdot . b)}} x_i)\ b$.

ii) $\Rightarrow$ i). En effet, ii) implique $\bigvee_{x_i \in \mathfrak{R}_{g(a \cdot . b)}} x_i \in \mathfrak{R}_{g(a \cdot . b)}$ ce qui entraîne la stabilité de $\mathfrak{R}_{g(a \cdot . b)}$ par l'union et en vertu du Corollaire 1 on obtient le i).

i) $\Rightarrow$ iii). Étant donné que H satisfait à la condition ascendante, et vu le Corollaire 1, la démonstration est immédiate.

iii) $\Rightarrow$ i). Si iii) est vérifié, alors $a \notin (\bigvee_{x_i \in \mathfrak{R}_{g(a \cdot . b)}} x_i)\ b$, d'où le i).

iii) $\Rightarrow$ iv). Comme il existe $g(a \cdot . b)$ et puisque H est strictement réticulé [14], pour tout $x \leqslant g(a \cdot . b)$ on a $x \in \mathfrak{R}_{g(a \cdot . b)}$ [4].

iv) $\Rightarrow$ iii). Evident.

REMARQUE 3 - Dans les conditions de la proposition ci-dessus.

i) Il est évident qu'on a $g(a \cdot . b) = \bigvee_{x_j \in \mathfrak{D}_{a \cdot . b}} x_j \in \mathfrak{D}_{a \cdot . b}$

ii) Pour les démonstration iii) $\Rightarrow$ i), iii) $\Rightarrow$ ii) et iii) $\Rightarrow$ iv) il faut que H soit un $H_d \cdot S . R$ tandis que pour toutes les autres il suffit que H soit un $H_d \cdot R$.

D'après la Définition 2, il résulte immédiatement que si $x \in \mathfrak{D}_{ab \cdot . cd} \neq \phi$, alors il existe un élément $\xi \in cd$ tel que $x \xi \overset{/}{=} ab$.

Alors, si pour tout $a, b, c, d \in H$ tels que $\mathfrak{D}_{ab \cdot . cd} \neq \phi$ et pour tout $(x, \eta) \in \mathfrak{D}_{ab \cdot . cd} \times (cd)$ on a $x\eta \overset{/}{=} ab$, on dit que H satisfait à la condition (B_g). De même, on peut définir la condition (B_d) concernante les résiduels généralisés à droite.

Dans [4] on a démontré, que si H est un $H_d \cdot S . 0$ satisfaisant à la condition (B_g) alors on a

$$\mathfrak{R}_{g(ab \cdot . cd)} = \mathfrak{R}_{g\,[\min(ab) \cdot . \max(cd)]} \cdot$$

Donc, de ce qui précède et selon la Proposition 4 on en deduit la proposition suivante:

PROPOSITION 4' - *Dans un $H_d . S . R$ H satisfaisant à la condition de chaîne ascendante et à la condition* (B_g), *les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $(\forall k \in N) \Big[[(x_1, \ldots, x_{l-1}, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_k) \in \mathfrak{R}^{l-1}_{g(ab \cdot . cd)} \times \mathfrak{D}_{ab \cdot . cd} \times$

$\times \mathfrak{R}_{g(ab \cdot . cd)}] \Rightarrow \min(ab) \notin [(\bigvee_{j=1}^{k} x_j) \max(cd)] \Big]$

ii) $\min(ab) \notin \left[\bigvee_{x_i \in \mathfrak{R}_{g(ab \cdot . cd)}} (x_i) \max(cd) \right]$

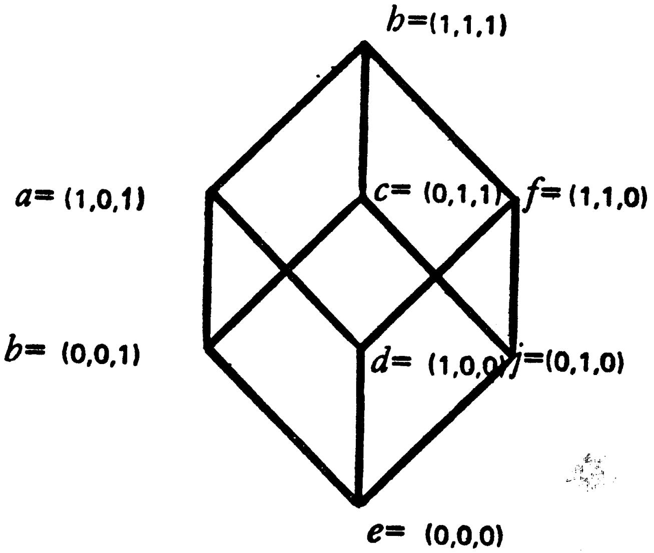
iii) $\exists\, g(ab \cdot . cd) = \bigvee_{x_i \in \mathfrak{R}_{g(ab \cdot . cd)}} x_i$

iv) $\mathfrak{R}_{g(ab \cdot . cd)}$ *est un idéal principal du treillis H engendré par* $g(ab \cdot . cd)$.

EXAMPLE - Si dans l'ensemble $B = \{0, 1\}$ on définit une hyperoperation $+$ comme suit, $0+0=0$, $0+1=1+0=1$, $1+1=\{0,1\}$, on démontre que la structure $(B, +)$ est un hypergroupe canonique.

Si on définit dans l'ensemble $B^n, n \in N$ (qui est un treillis distributif par rapport à une relation convenable d'ordre $\leqslant$) une hyperopération $+$ moyennant celle de B comme suit, $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = \{z_1, \dots, z_n) : z_j \in x_j + y_j , j = 1, \dots, n\}$ on démontre que la structure $(B^n, \leqslant, +)$ est un hypergroupe canonique réticulé (non strictement) [11].

Prenons par exemple l'ensemble B^3. Cet ensemble peut être ordonné comme dans le diagramme suivant:



La structure ci-dessus n'est ni résiduée, ni résiduée généralisée, car par exemple il n'existe ni $f:c$, ni(5) $g(f:f)$. Pourtant, il existe les résiduels généralisés des certaines couples. Ainsi, $g(f:c) = c$ puisque $\mathfrak{R}_{g(f:c)} = \{b, c\}$. L'ensemble $\mathfrak{R}_{g(f:c)}$ n'est pas un idéal principal, car H n'est pas strictement réticulé. De même on a $f:j = f$ vu que $\mathfrak{X}_{f:j} = \{e, j, d, f\}$. L'ensemble $\mathfrak{X}_{j:d}$ est un idéal principal engendré par f.

On sait qu'un groupe réticulé est un treillis distributif [1] [2]. Un hypergroupe canonique strictement réticulé H est un treillis distributif, si pour tout $x, y \in H$ tel que $x < y$ on a $0 < y\text{-}x$ [car normalement on a $x < y \Rightarrow (\exists \xi \in y\text{-}x) [0 < \xi]$] [14].

Alors, on en deduit la proposition:

PROPOSITION 5 - *Dans un hypergroupe canonique strictement réticulé H, où la relation $x < y$ entraîne $0 < y\text{-}x$, l'existence de $g(a:b)$ entraîne que l'idéal principal $\mathfrak{R}_{g(a:b)}$ est $\vee$-distribuant dans l'ensemble des idèaux de H et par conséquence dèfinit au moins une congruence du treillis ayant $\mathfrak{R}_{g(a:b)}$ pour classe.*

On peut encore énoncer:

PROPOSITION 5' - *Dans un $H_d \cdot R$ distributif H l'existence de $a \cdot . b$*

(5) Par contre, dans la théorie classique, un groupe réticulé est résidué [1], [2].

entraîne que l'idéal principal $\mathfrak{X}_{a\cdot.b}$ définit au moins une congruence du treillis ayant $\mathfrak{X}_{a\cdot.b}$ pour classe.

Dans l'exemple précédent une certaine congruence du treillis B^3 qui a $\mathfrak{X}_{f:j}$ pour classe est constituée par les classes(6) $\{e,j,d,f\}$ $\{b,c,a,h\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIRKOFF, G., *Lattice-ordered groups.* Annals of Mathematics, vol. 43, n. 2, avril 1942.

[2] DUBREIL-JACOTIN, M. L., LESIEUR, L., CROISOT, R., *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algèbriques ordonnées et des treillis géométriques.* Gauthier-Villars, Paris, 1953.

[3] BOUGIOUKLES, Th., *Kyklikóteta yperomadon.* Didaktoriké diatribé. Polytechniké Skolé tou Demokriteiou Panepistemiou Thrákes. Xánthe 1980 (Thèse de doctorat).

[4] KONSTANTINIDOU, M., *Sur les hypergroupoïdes résidués généralisés.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 35, 1986.

[5] KRASNER, M., *Approximation des corps valués complets de caractéristique* $p \neq 0$ *par ceux de caractéristique* 0. Actes du colloque d'Algèbre supérieure C.B.R.M., Bruxelles, 1956.

[6] KRASNER, M., *Théorie de Galois.* Cours de la faculté des Sciences de l'Université Paris VI, 1967.

[7] KRASNER, M., *Une nouvelle présentation de la théorie des groupes de permutations et ses application à la théorie de Galois et de produit d'entrelachement* (Wreath product) *de groupes.* Mathematica Balkanica, t. 3, pp. 229-280, Beograd 1973.

[8] MARTY, FR., *Sur une généralisation de la notion du groupe.* Actes du 8me Congrés des mathématiciens Scandinaves, pp. 45-49, Stockholm, 1934.

[9] MITTAS, J., *Sur une classe d'hypergroupes commutatifs.* C. R. Acad. Sc., Paris, t. 269, pp. 485-488, 29 septembre 1969, Serie A.

[10] MITTAS, J., *Hypergroupes canoniques.* Mathematica Balkanica, t. 2, Beograd, 1972.

[11] SERAFIMIDIS, K., *Diktyoménes kanonikés yperomádes.* Didaktoriké diatribé. Aristotéleio Panepistémio Thessalonikes. Epistemoniké Epeterída tes Polytechnikés Skolés. Parartema arithmos 7 tou th' tómou. Thessalonike 1983. (Thèse de doctorat. École Polytéchnique de l'Université de Thessaloniki).

[12] SERAFIMIDIS, Ch., *Sur les hypergroupoïdes réticulés.* Bollettino dell'Unione Matematica Italiana (6) 5-B (1986), 345-357.

[13] SERAFIMIDIS, Ch., *Sur les hypergroupoïdes residués.* Bollettino dell'Unione Matematica Italiana (6) 5-A (1986), 217-225.

[14] SERAFIMIDIS, K., KONSTANTINIDOU, M., MITTAS, J., *Sur les hypergroupes canoniques strictement réticulés.* (Non encore publié).

(6) Cette congruence a été définie comme suit:

$$x \equiv y \Leftrightarrow (\exists z \in \mathfrak{X}_{f:j})\ [x \vee z = y \vee z]\ [2].$$