INDIPENDENZA DAL PESO DELLA CONVERGENZA DI FUNZIONALI SUBLINEARI SU MISURE VETTORIALI ED APPLICAZIONI (*)

di Carlo Bardaro (a Perugia) (**)

Sommario. - *Si studia la convergenza di funzionali sub-lineari su misure vettoriali pesate e si applicano i risultati ottenuti allo studio della variazione globale generalizzata, del perimetro e dell'Integrale del Calcolo delle Variazioni di Serrin.*

Summary. - *We study the convergence of sub-linear functionals on weighted vector measures and we apply the obtained results to the study of the generalized global variation, the perimeter and the Serrin Integral of Calculus of Variation.*

Introduzione.

In un recente lavoro P. Brandi [13] ha stabilito un teorema di indipendenza dal peso μ della convergenza in μ-variazione (classica e generalizzata) di successioni di funzioni reali definite sui sottoinsiemi di $\mathbf{R}$, allo scopo di fornire alcuni criteri di convergenza uniforme ed uniforme quasi ovunque.

In [7] abbiamo definito un concetto di μ-variazione globale generalizzata per funzioni definite in rettangoli (anche non compatti) di $\mathbf{R}^2$, (utilizzando il ben noto algoritmo di integrazione alla Burkill-

(*) Pervenuto in Redazione il 3 febbraio 1987. Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.
(**) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Perugia - Via Vanvitelli, 1 - 06100 Perugia.

Cesari [16]) ed abbiamo esteso ad esso il teorema di indipendenza di Brandi.

Scopo di questo lavoro è quello di estendere i teoremi di indipendenza di [13] e [7] al caso generale in cui la variazione è sostituita dall'Integrale del Calcolo delle Variazioni alla J. Serrin [28], $I_S(\psi, f, \Omega)$, dove $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ è un aperto limitato, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e ψ è un integrando che dipende solo dal gradiente di f.

A questo scopo abbiamo introdotto il concetto di Integrale del Calcolo delle Variazioni alla Serrin con peso ν, dove ν è una misura (scalare) non negativa ed assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue m, definita sulla σ-algebra di Borel $\mathcal{B}(\Omega)$ relativa ad Ω.

Come in [11], [12], [3], [4], [5], [6], abbiamo seguito un procedimento astratto, ideato da C. Goffman e J. Serrin [21], mediante il quale si opera con funzionali sub-lineari limitati $\mathcal{F} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+_0$ su misure vettoriali $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathbf{R}^n$; con una operazione di sup si ottiene una misura scalare definita dalla:

$$\mathcal{F}\mu(E) = \sup \sum_{i=1}^{n} \mathcal{F}(\mu(E_i)), \quad E \in \mathcal{B}(\Omega),$$

dove il sup è esteso a tutte le partizioni di Borel di $E, \{E_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$.

E' noto che se $\mathcal{F}(p) = |p|$, per ogni $p \in \mathbf{R}^n$ e se μ_f è la derivata distribuzionale di $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, allora $\mathcal{F}\mu_f(\Omega)$ rappresenta la variazione globale generalizzata di f su Ω; più in generale (cfr. [21], Theorem 5) si prova che $\mathcal{F}\mu_f(\Omega) = I_S(\psi, f, \Omega)$, nel caso in cui $\mathcal{F}$ sia legato a ψ da una opportuna relazione.

Sia ν la misura definita dalla:

$$\nu(E) = \int_E g\,dx, \quad E \in \mathcal{B}(\Omega),$$

con $g \in L^\infty(\Omega)$, $g > 0$.

Allora ad ogni misura $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathbf{R}^n$, viene associata la misura $\tilde{\mu} : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathbf{R}^n$, definita dalla:

$$\tilde{\mu}(E) = \int_E g\,d\mu.$$

Se quindi $\mathcal{F} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+_0$ è un funzionale sub-lineare limitato, legato a ψ da un'opportuna relazione (cfr. § 4, (c)), definiamo «Integrale del Calcolo delle Variazioni con peso ν della f su Ω rispetto a ψ», il numero $I^\nu_S(\psi, f, \Omega) := \mathcal{F}\tilde{\mu}_f(\Omega)$.

Nel Teorema 1 proviamo che se (μ^k), $k = 0, 1, \dots,$ è una successione di misure convergente debolmente a μ^0, (cfr. def. 2), allora risulta che $\mathcal{F}\mu^k(\Omega) \to \mathcal{F}\mu^0(\Omega)$ se e solo se $\mathcal{F}\tilde{\mu}^k(\Omega) \to \mathcal{F}\tilde{\mu}^0(\Omega)$, ritrovando così i teoremi di indipendenza di [13], [7], nel caso particolare $\mathcal{F}(p) = |p|$ e nel caso in cui le μ^k sono le misure derivate di funzioni $f_k \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Si osservi che in [13] e [7] si utilizza la convergenza in misura delle f_k verso f_0, mentre nel presente assetto si parte dalla convergenza debole delle derivate μ^k. Come mostriamo con esempi, le due convergenze non sono confrontabili.

Il Teorema 1 ha anche interessanti applicazioni: esso ci permette di stabilire una versione pesata di un teorema alla L. C. Young - M. Boni per l'Integrale $\mathcal{F}\mu$ (cfr. [12]); inoltre suggerisce una naturale definizione di $\mathcal{F}$-perimetro con peso di $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, formalmente analoga a quelle date in [18] e [29], e si prova che esso coincide con $\mathcal{F}\tilde{\mu}_f(\Omega)$. Questo implica, in particolare, che il perimetro (classico) di una funzione f coincide con la sua variazione generalizzata alla Cesari, risultato questo che è stato stabilito da C. Vinti in [29].

Desidero ringraziare il prof. C. Vinti ed il prof. D. Candeloro per le utili conversazioni avute sull'argomento.

1. - Definizioni.

Sia $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^m$ un aperto non vuoto, $\mathcal{B}(\Omega_0)$ la σ-algebra di Borel relativa ad Ω_0. Indichiamo con $\mathcal{M}^n(\Omega_0)$ la classe di tutte le misure vettoriali $\mu : \mathcal{B}(\Omega_0) \to \mathbf{R}^n$, con $|\mu|(\Omega_0) < +\infty$, (ciascuna componente di μ è una misura con segno, finita, regolare). Ogni $\mu \in \mathcal{M}^n(\Omega_0)$ ha pertanto una decomposizione di Lebesgue del tipo

(1) $\mu(E) = \int_E a(x)\, dx + \beta(E)$, $E \in \mathcal{B}(\Omega_0)$,

dove $a \in L^1(\Omega_0, \mathbf{R}^n)$, $\beta \perp m$, essendo m la misura di Lebesgue su $\mathcal{B}(\Omega_0)$.

Sia $\nu : \mathcal{B}(\Omega_0) \to \mathbf{R}^+_0$ una misura (scalare) tale che:

(2) $\nu(E) = \int_E g(x)\, dx$, $E \in \mathcal{B}(\Omega_0)$,

con g non negativa, limitata e misurabile.

Ciò posto, associamo a μ un'altra misura $\tilde{\mu} : \mathcal{B}(\Omega_0) \to \mathbf{R}^n$, definita ponendo:

(3) $\tilde{\mu}(E) = \int_E g(x)\, d\mu = \int_E a(x)\, d\nu + \int_E g(x)\, d\beta$, $E \in \mathcal{B}(\Omega_0)$.

Posto $\tilde{\beta}(E) = \int g(x)\, d\beta$, è ovvio che $\tilde{\beta} \perp m$, $\tilde{\beta} \perp \nu$.

DEFINIZIONE 1 (cfr. [21], [11], [5]) - Sia $(\mu^k)_k$, $k = 0, 1, \ldots$, una successione di misure in $\mathfrak{M}^n(\Omega_0)$ con:

$$\mu^k(E) = \int_E a^k(x)\, dx + \beta^k(E) = \mu^k_a(E) + \beta^k(E), \tag{4}$$

$$k = 0, 1, \ldots, \; a^k \in L^1(\Omega_0, \mathbf{R}^n), \; \beta^k \perp m.$$

Diremo che $(\mu^k)_k$ *converge debolmente* a μ^0 su Ω_0, se per ogni $\varphi \in C^0_c(\Omega_0)$, con φ reale

$$\lim_{k \to +\infty} \int \varphi(x)\, d\mu^k = \int \varphi(x)\, d\mu^0. \tag{5}$$

Questo verrà indicato con $\mu^k \rightharpoonup \mu^0$.

DEFINIZIONE 2 (cfr. per es. [24]) - La successione $(\mu^k)_k$ si dirà *debolmente limitata* su Ω_0, se per ogni $\varphi \in C^0_c(\Omega_0)$, risulta:

$$\sup_k \int |\varphi|\, d|\mu^k| < +\infty. \tag{6}$$

E' noto che (cfr. [24], pag. 227), se $(\mu^k)_k$ è debolmente limitata, nella definizione di convergenza debole la classe $C^0_c(\Omega_0)$ può essere sostituita dalla classe $C^\infty_c(\Omega_0)$. Questo tipo di convergenza, più debole, verrà denotato con $\mu^k \rightharpoonup \mu^0 (C^\infty_c)$. Nel seguito le funzioni in $C^k_c(\Omega_0)$, $0 \leqslant k \leqslant +\infty$, saranno sempre supposte a valori reali.

Sia $\mathfrak{F} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+_0$ un funzionale sub-lineare continuo, cioè $\mathfrak{F}$ verifica le seguenti condizioni:

(i) $\mathfrak{F}(p + q) \leqslant \mathfrak{F}(p) + \mathfrak{F}(q)$,

(ii) $\mathfrak{F}(\alpha p) = \alpha \mathfrak{F}(p)$,

(iii) esiste $C > 0$ tale che $\mathfrak{F}(p) \leqslant C|p|$,

per ogni $p, q \in \mathbf{R}^n$, $\alpha \in \mathbf{R}^+_0$, $|p| = \{p_1^2 + \ldots + p_n^2\}^{1/2}$.

Se $\mu \in \mathfrak{M}^n(\Omega_0)$ definiamo, per ogni $E \in \mathfrak{B}(\Omega_0)$,

$$\mathfrak{F}\mu(E) = \sup \sum_{i=1}^N \mathfrak{F}(\mu(E_i)),$$

dove il sup è preso su tutte le partizioni finite di E con $E_i \cap E_j = \phi$ $i \neq j$, $E_i \in \mathfrak{B}(\Omega_0)$.

Le seguenti proprietà sono ben note (cfr. [21], [3]):

p. 1) $\mathfrak{F}\mu$ è una misura positiva su $\mathfrak{B}(\Omega_0)$;

p. 2) Se $\mu = \alpha + \beta$, allora $\mathfrak{F}\mu \leqslant \mathfrak{F}\alpha + \mathfrak{F}\beta$ e vale l'uguaglianza se α e β hanno supporti disgiunti.

p. 3) Se η è una misura positiva su $\mathfrak{B}(\Omega_0)$ e se μ è definita dalla (1), allora:

$$\mathcal{F}\mu(E) = \int_E \mathcal{F}(a(x))\, d\eta + \mathcal{F}\beta(E), \quad E \in \mathcal{B}(\Omega_0).$$

p. 4) Se $\mu^k \rightharpoonup \mu^0(C_c^\infty)$ in $\mathcal{M}^n(\Omega_0)$, allora $\varliminf_{k\to+\infty} \mathcal{F}\mu^k(\Omega) \geqslant \mathcal{F}\mu^0(\Omega)$, per ogni aperto $\Omega \subset \Omega_0$.

p. 5) Se μ e $\mu' \in \mathcal{M}^n(\Omega_0)$, $|\mathcal{F}\mu - \mathcal{F}\mu'| \leqslant C\,|\mu - \mu'|$.

Infine se $A \in \mathcal{B}(\Omega_0)$, con ∂A indicheremo la frontiera di A e con χ_A la sua funzione caratteristica.

2. - **Alcuni lemmi.**

Nel seguito faremo riferimento a successioni di misure del tipo (4) ed indicheremo con $\tilde{\mu}^k$ le misure associate alle μ^k mediante la (3). Come nella (4), $\tilde{\mu}_a^k$ indicherà la parte assolutamente continua di $\tilde{\mu}^k$ e $\tilde{a}^k$ la derivata di Radon-Nikodym di $\tilde{\mu}_a^k$ rispetto ad m. Tutte le misure che verranno prese in considerazione saranno in $\mathcal{M}^n(\Omega_0)$. Infine con ν indicheremo la misura definita dalla (2).

Sussiste il seguente:

LEMMA 1 - *Se $g \in C^0(\Omega_0)$, allora $\mu^k \rightharpoonup \mu^0$ implica $\tilde{\mu}^k \rightharpoonup \tilde{\mu}^0$.*

Dimostrazione. Sia $\varphi \in C_c^0(\Omega_0)$. Si ha:

(7) $$\int \varphi(x)\, d\tilde{\mu}^k = \int \varphi(x)\, d\tilde{\mu}_a^k + \int \varphi(x)\, d\tilde{\beta}^k = \int \varphi(x)\, a^k(x)\, g(x)\, dx + {} + \int \varphi(x)\, g(x)\, d\beta^k.$$

Poiché $\varphi g \in C_c^0(\Omega_0)$, dall'ipotesi, si ha:

$$\int \varphi(x)\, g(x)\, d\mu^k \to \int \varphi(x)\, g(x)\, d\mu^0, \quad k \to +\infty,$$

da cui l'asserto per le (3), (7).

OSSERVAZIONE 1 - Se $(\mu^k)_k$ è debolmente limitata su Ω_0, allora il Lemma 1 sussiste anche se $\mu^k \rightharpoonup \mu^0(C_c^\infty)$.

LEMMA 2 - *Sia $\mu^k \rightharpoonup \mu^0$ in $\mathcal{M}^n(\Omega_0)$ e supponiamo che per un aperto Ω, con $\bar{\Omega} \subset \Omega_0$, risulta:*

(8) $$\lim_{k\to+\infty} \mathcal{F}\mu^k(\Omega) = \mathcal{F}\mu^0(\Omega).$$

Allora per ogni sottoinsieme $G \subset \Omega$, tale che $|\mu^0|(\partial G) = 0$ risulta:

(9) $$\lim_{k\to+\infty} \mathcal{F}\mu^k(G) = \mathcal{F}\mu^0(G).$$

Dimostrazione. Sia $G \subset \Omega$, con $|\mu^0|(\partial G) = 0$. In virtù della p. 5) risulta anche $\mathfrak{F}\mu^0(\partial G) = 0$. Inoltre:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\mu^k(\Omega) &= \mathfrak{F}\mu^k(G^0) + \mathfrak{F}\mu^k(\partial G) + \mathfrak{F}\mu^k((\Omega \setminus G)^0)\\ &= \mathfrak{F}\mu^k(\bar{G}) + \mathfrak{F}\mu^k((\Omega \setminus G)^0)\\ &\geqslant \mathfrak{F}\mu^k(G) + \mathfrak{F}\mu^k((\Omega \setminus G)^0),\end{aligned}$$

da cui

$$\mathfrak{F}\mu^k(G) \leqslant \mathfrak{F}\mu^k(\Omega) - \mathfrak{F}\mu^k((\Omega \setminus G)^0).$$

Applicando ora la (8) e la p. 4) risulta:

$$\begin{aligned}(10)\quad \overline{\lim_{k\to+\infty}}\ \mathfrak{F}\mu^k(G) &\leqslant \mathfrak{F}\mu^0(\Omega) - \mathfrak{F}\mu^0((\Omega \setminus G)^0)\\ &= \mathfrak{F}\mu^0(\Omega) - \mathfrak{F}\mu^0(\partial G) - \mathfrak{F}\mu^0((\Omega \setminus G)^0)\\ &= \mathfrak{F}\mu^0(\Omega) - \mathfrak{F}\mu^0\overline{((\Omega \setminus G))} = \mathfrak{F}\mu^0(G^0) \leqslant \mathfrak{F}\mu^0(G).\end{aligned}$$

D'altra parte:

$$(11)\quad \underline{\lim}_{k\to+\infty}\ \mathfrak{F}\mu^k(G) \geqslant \underline{\lim}_{k\to+\infty}\ \mathfrak{F}\mu^k(G^0) = \mathfrak{F}\mu^0(G),$$

a causa dell'ipotesi $|\mu^0|(\partial G) = 0$. Dalle (10), (11) segue l'asserto.

Il lemma seguente fornisce una speciale decomposizione di un aperto limitato Ω, che ci sarà utile nel seguito.

LEMMA 3 - *Sia $\Omega \subset \Omega_0$ un aperto limitato tale che $\bar{\Omega} \subset \Omega_0$ e $|\mu|(\partial\Omega) = 0$, con $\mu \in \mathfrak{M}^n(\Omega_0)$. Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una partizione di $\Omega, \{H_i\}, i = 1, \ldots, N$ tale che* $\operatorname{diam}(H_i) < \varepsilon, |\mu|(\partial H_i) = 0$, *per ogni $i = 1, \ldots, N$.*

Dimostrazione. Sia $\mu \in \mathfrak{M}^n(\Omega_0)$, $\varepsilon > 0$. Dalla precompattezza di Ω, esiste un ricoprimento $\{B_i^\varepsilon\}, i = 1, \ldots, N$ di Ω costituito da bocce tali che $\operatorname{diam}(B_i^\varepsilon) < \varepsilon$. Poiché $|\mu|(\Omega_0) < +\infty$, possiamo supporre $|\mu|(\partial B_i^\varepsilon) = 0$, $i = 1, \ldots, N$ (cfr. [8] pag. 14). Poniamo allora:

$$V_1^\varepsilon = B_1^\varepsilon,\ V_i^\varepsilon = B_i^\varepsilon \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j^\varepsilon,\ i = 2, \ldots, N.$$

In tal modo $\{V_i^\varepsilon\}$, $i = 1, \ldots, N$ è un ricoprimento di Ω, gli insiemi $\{V_i^\varepsilon\}$ sono disgiunti e $|\mu|(\partial V_i^\varepsilon) = 0$, $i = 1, \ldots, N$. Posto allora $H_i = \Omega \cap V_i^\varepsilon$, $\{H_i\}$ è la partizione cercata.

Le misure $\mathfrak{F}\mu, \mathfrak{F}\tilde{\mu}$ sono legate da una precisa relazione che è una estensione di un noto risultato relativo alla variazione totale di misure vettoriali definite da una densità (cfr. [19], pag. 278). Ciò è messo in luce dal seguente (cfr. anche [21], alla fine del Theorem 2):

LEMMA 4 - *Sia $\mathcal{F} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_0^+$ un funzionale sub-lineare limitato. Per ogni $\mu \in \mathcal{M}^n(\Omega_0)$, indicata con $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^n(\Omega_0)$ la misura definita dalla* (3), *risulta:*

$$\mathcal{F}\tilde{\mu}(E) = \int_E g(x)\, d\mathcal{F}\mu\,, \tag{12}$$

per ogni $E \in \mathcal{B}(\Omega_0)$.

Dimostrazione. Dividiamo in passi la dimostrazione e proveremo la (12) per ogni g non negativa e $|\mu|$-sommabile.

I caso: supponiamo $g = \chi_B$, $B \in \mathcal{B}(\Omega_0)$. In tal caso, detta μ_B la misura definita su $\mathcal{B}(\Omega_0)$ dalla $\mu_B(E) = \mu(B \cap E)$, si ha:

$$\tilde{\mu}(E) = \int_{E\cap B} d\mu = \mu(B \cap E) = \mu_B(E),\ E \in \mathcal{B}(\Omega_0).$$

Pertanto $\mu_B = \tilde{\mu}$ e quindi:

$$\mathcal{F}\tilde{\mu}(E) = \mathcal{F}\mu_B(E) = \sup \sum_{i=1}^{N} \mathcal{F}(\mu_B(E_i)) = \sup \sum_{i=1}^{N} \mathcal{F}(\mu(E_i \cap B)).$$

Tenendo conto che ogni partizione $\{E_i\}$ di E induce una partizione $\{B \cap E_i\}$ di $B \cap E$ e viceversa, segue che:

$$\mathcal{F}\tilde{\mu}(E) = \mathcal{F}\mu(E \cap B) = \int_E g(x)\, d\mathcal{F}\mu\,. \tag{13}$$

La (12) sussiste quindi con $g = \chi_B$.

II caso: supponiamo $g = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{B_j}$, $\bigcup_{j=1}^{k} B_j = \Omega_0$, $B_i \cap B_j = \phi$, $i \neq j$, $B_i \in \mathcal{B}(\Omega_0)$, $a_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, k$.

Indichiamo con $\mu_{Bj} : \mathcal{B}(\Omega_0) \to \mathbf{R}^n$ le misure definite dalle:

$$\mu_{Bj}(E) = \mu(B_j \cap E),\ \text{per ogni } j = 1, \ldots, k.$$

Si ha:

$$\tilde{\mu}(E) = \sum_{j=1}^{k} a_j \mu_{Bj}(E). \tag{14}$$

Poiché le misure μ_{Bj} hanno supporti disgiunti, applicando la p. 2) si ha:

$$\mathcal{F}\tilde{\mu}(E) = \sum_{j=1}^{k} a_j \mathcal{F}\mu_{Bj}(E). \tag{15}$$

In virtù della (13) abbiamo quindi:

$$\mathcal{F}\tilde{\mu}(E) = \sum_{j=1}^{k} a_j \mathcal{F}\mu(B_j \cap E) = \int_E g(x)\, d\mathcal{F}\mu\,. \tag{16}$$

da cui la (12) nel caso g semplice.

III caso: sia g una funzione $|\mu|$-sommabile, non negativa su Ω_0. Esiste una successione di funzioni semplici misurabili su $\Omega_0, \{\omega_k\}$, tale che:

(i) $0 \leqslant \omega_k \leqslant g$,

(ii) $\lim\limits_{k \to +\infty} \omega_k = g \quad |\mu| - q.o.$

Dalla (ii) tenendo conto del fatto che (cfr. [19], pag. 278):

$$|\tilde{\mu}|(E) = \int_E g d|\mu|, E \in \mathcal{B}(\Omega_0),$$

segue che $\lim\limits_{k \to +\infty} \omega_k = g \; |\tilde{\mu}| - q.o.$ ed anche, per la p. 5):

$$\lim_{k \to +\infty} \omega_k = g \; \mathfrak{F}\mu - q.o.$$

Posto per ogni k:

$$\tilde{\mu}^k(E) = \int_E \omega_k d\mu \; , \; E \in \mathcal{B}(\Omega_0),$$

otteniamo per il teorema di convergenza dominata:

(17) $|\tilde{\mu}^k - \tilde{\mu}|(E) = \int_E (g - \omega_k) \, d|\mu| \to 0$, per ogni $E \in \mathcal{B}(\Omega_0)$, ed

anche:

(18) $\int_E \omega_k d\mathfrak{F}\mu \to \int_E g \, d\mathfrak{F}\mu \; , \; k \to +\infty$.

Dalla (17) applicando la p. 5)

(19) $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathfrak{F}\tilde{\mu}^k(E) = \mathfrak{F}\tilde{\mu}(E) \; , \; E \in \mathcal{B}(\Omega_0)$.

Da quanto detto nel II caso, dalle (18) e (19) segue:

$$\mathfrak{F}\tilde{\mu}^k(E) = \int_E \omega_k d\mathfrak{F}\mu \to \int_E g \, d\mathfrak{F}\mu = \mathfrak{F}\tilde{\mu}(E).$$

COROLLARIO 1 - *Se λ, Λ sono costanti tali che $0 \leqslant \lambda \leqslant g(x) \leqslant \Lambda$, per ogni $x \in \Omega_0$, allora per ogni $E \in \mathcal{B}(\Omega_0)$ risulta:*

(20) $\lambda \mathfrak{F}\mu(E) \leqslant \mathfrak{F}\tilde{\mu}(E) \leqslant \Lambda \mathfrak{F}\mu(E)$.

Dimostrazione. Dal Lemma 4 segue che:

$$\lambda \mathfrak{F}\mu(E) = \lambda \int_E d\mathfrak{F}\mu \leqslant \int_E g(x) \, d\mathfrak{F}\mu \leqslant \Lambda \int_E d\mathfrak{F}\mu = \Lambda \mathfrak{F}\mu(E).$$

3. - Indipendenza dal peso della convergenza rispetto ad $\mathfrak{F}$.

In questo paragrafo supporremo che $g \in C^0(\Omega_0)$ e $0 < \lambda \leqslant g \leqslant \Lambda$. Sussiste il seguente:

TEOREMA 1 - *Sia* $(\mu^j)_j$, $j = 0, 1, \ldots,$ *una successione di misure in* $\mathfrak{M}^n(\Omega_0)$, *tali che* $\mu^j \rightharpoonup \mu^0$. *Sia* Ω *un aperto non vuoto tale che* $\bar{\Omega} \subset \Omega_0$ *e* $|\mu^0|(\partial\Omega) = 0$. *Allora condizione necessaria e sufficiente affinché risulti:*

$$(21)\qquad \lim_{j\to+\infty} \mathfrak{F}\tilde{\mu}^j(\Omega) = \mathfrak{F}\tilde{\mu}^0(\Omega)$$

è che:

$$(22)\qquad \lim_{j\to+\infty} \mathfrak{F}\mu^j(\Omega) = \mathfrak{F}\mu^0(\Omega).$$

Dimostrazione. Supponiamo anzitutto che Ω sia limitato. Se vale la (21), a causa della p. 4) basterà provare che:

$$\overline{\lim_{j\to+\infty}}\ \mathfrak{F}\mu^j(\Omega) \leqslant \mathfrak{F}\mu^0(\Omega).$$

Fissato $\varepsilon > 0$, esistono un $\delta(\varepsilon) > 0$ ed una partizione $\{H_i\}$, $i = 1, \ldots, k$, di Ω, con $\operatorname{diam}(H_i) < \delta(\varepsilon)$ e tale che se $x, y \in H_i$, risulta $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ ed inoltre $|\mu^0|(\partial H_i) = 0$ (Lemma 3). Si osservi che è anche $|\tilde{\mu}^0|(\partial H_i) = |\tilde{\mu}^0|(\partial\Omega) = 0$.

Per i Lemmi 1 e 2 esiste $\bar{n}$ tale che per ogni $j > \bar{n}$,

$$(23)\qquad |\mathfrak{F}\tilde{\mu}^j(H_i) - \mathfrak{F}\tilde{\mu}^0(H_i)| < \varepsilon / k,\ i = 1, \ldots, k.$$

Posto $\lambda_i = \inf_{H_i} g$, $\Lambda_i = \sup_{H_i} g$, $i = 1, \ldots, k$, in virtù del Corollario 1 otteniamo dalla (23):

$$(24)\qquad \mathfrak{F}\mu^j(H_i) - \mathfrak{F}\mu^0(H_i) \leqslant \lambda_i^{-1}\mathfrak{F}\tilde{\mu}^j(H_i) - \Lambda_i^{-1}\mathfrak{F}\tilde{\mu}^0(H_i) =$$

$$= \lambda_i^{-1}\{\mathfrak{F}\tilde{\mu}^j(H_i) - \mathfrak{F}\tilde{\mu}^0(H_i)\} + [\lambda_i^{-1} - \Lambda_i^{-1}]\,\mathfrak{F}\tilde{\mu}^0(H_i) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_i^{-1}(\varepsilon/k) + \lambda^{-2}\varepsilon\,\mathfrak{F}\tilde{\mu}^0(H_i),\ i = 1, \ldots, k.$$

Sommando rispetto ad i otteniamo:

$$\mathfrak{F}\mu^j(\Omega) - \mathfrak{F}\mu^0(\Omega) \leqslant \lambda^{-1}\varepsilon + \lambda^{-2}\varepsilon\,\mathfrak{F}\mu^0(\Omega),$$

da cui l'asserto, passando al massimo limite.

Viceversa, assumiamo la (22). Considerata ancora una partizione $\{H_i\}, i = 1, \ldots, k$, con le analoghe proprietà utilizzate prima, esiste un $\bar{n}$ tale che per ogni $j > \bar{n}$ si ha:

$$(25)\qquad |\mathfrak{F}\mu^j(H_i) - \mathfrak{F}\mu^0(H_i)| < \varepsilon/k, i = 1, \ldots, k$$

e quindi

$$\mathfrak{F}\tilde{\mu}^j(H_i) - \mathfrak{F}\tilde{\mu}^0(H_i) \leqslant \Lambda_i \mathfrak{F}\mu^j(H_i) - \lambda_i \mathfrak{F}\mu^0(H_i) =$$
$$= \Lambda_i \{\mathfrak{F}\mu^j(H_i) - \mathfrak{F}\mu^0(H_i)\} - (\Lambda_i - \lambda_i)\,\mathfrak{F}\mu^0(H_i) \leqslant \Lambda(\varepsilon/k) + \varepsilon\,\mathfrak{F}\mu^0(H_i).$$

Sommando quindi rispetto ad i si ottiene l'asserto nel caso in cui Ω è un aperto limitato.

Proviamo ora il caso generale. Esiste una successione di aperti limitati $\{G_r\}_{r\in\mathbf{N}}$ con le seguenti proprietà: (i) $G_r \subset \Omega, G_r \subset G_{r+1}$, per ogni $r \in \mathbf{N}$; (ii) $|\mu^0|(\partial G_r) = 0$, per ogni r; (iii) $\bigcup_{r=1}^{\infty} G_r = \Omega$. Infatti, posto $\mu^0_{\Omega_0}(E) = \mu^0(\Omega_0 \cap E)$, per ogni $E \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$, si ha

$$|\mu^0_{\Omega_0}|(\mathbf{R}^m) = |\mu^0|(\Omega_0) < +\infty,$$

e quindi esiste una successione di bocce con centro l'origine $B(0, \varepsilon_r)$ tale che $\bigcup_{r=1}^{\infty} B(0, \varepsilon_r) = \mathbf{R}^m$ ed inoltre $|\mu^0_{\Omega_0}|(\partial B(0, \varepsilon_r)) = 0$. Basta quindi porre $G_r = \Omega \cap \mathring{B}(0, \varepsilon_r)$, poiché

$$|\mu^0|(\partial G_r) \leqslant |\mu^0|(\partial\Omega) + |\mu^0_{\Omega_0}|(\partial\mathring{B}(0, \varepsilon_r)) = 0.$$

In virtù delle proprietà della successione $\{G_r\}$, poiché $\mathfrak{F}\mu^0(\Omega) < +\infty$, si ha:

$$\mathfrak{F}\mu^0(\Omega) = \lim_r \mathfrak{F}\mu^0(G_r) = \sup_r \mathfrak{F}\mu^0(G_r),$$

e quindi fissato $\varepsilon > 0$, esiste un aperto limitato $G_r \subset \Omega$ tale che:

$$\mathfrak{F}\mu^0(\Omega) < \mathfrak{F}\mu^0(G_r) + \varepsilon/3 \;,\; \mathfrak{F}\tilde{\mu}^0(\Omega) < \mathfrak{F}\tilde{\mu}^0(G_r) + \varepsilon/3.$$

Supponiamo che sussista la (21). Per il Lemma 2 risulta:

$$\lim_{j\to+\infty} \mathfrak{F}\tilde{\mu}^j(G_r) = \mathfrak{F}\tilde{\mu}^0(G_r),$$

da cui per quanto detto nella prima parte della dimostrazione, segue:

$$\lim_{j\to+\infty} \mathfrak{F}\mu^j(G_r) = \mathfrak{F}\mu^0(G_r).$$

Ma ora si ha:

$$0 \leqslant \mathfrak{F}\tilde{\mu}^j(\Omega) - \mathfrak{F}\tilde{\mu}^j(G_r) \leqslant |\mathfrak{F}\tilde{\mu}^j(\Omega) - \mathfrak{F}\tilde{\mu}^0(\Omega)| +$$
$$+ |\mathfrak{F}\tilde{\mu}^0(\Omega) - \mathfrak{F}\tilde{\mu}^0(G_r)| + |\mathfrak{F}\tilde{\mu}^0(G_r) - \mathfrak{F}\tilde{\mu}^j(G_r)|,$$

e quindi esiste un $\bar{n}(\varepsilon)$, tale che per ogni $j > \bar{n}$,

$$0 \leqslant \mathfrak{F}\tilde{\mu}^j(\Omega) - \mathfrak{F}\tilde{\mu}^j(G_r) = \mathfrak{F}\tilde{\mu}^j(\Omega \setminus G_r) < \varepsilon.$$

D'altra parte è anche:

$$0 \leqslant \mathfrak{F}\mu^j(\Omega) - \mathfrak{F}\mu^j(G_r) = \mathfrak{F}\mu^j(\Omega \setminus G_r) \leqslant \lambda^{-1}\tilde{\mathfrak{F}}\mu^j(\Omega \setminus G_r) < \lambda^{-1}\varepsilon .$$

Infine dalla relazione

$$|\mathfrak{F}\mu^j(\Omega) - \mathfrak{F}\mu^0(\Omega)| \leqslant |\mathfrak{F}\mu^j(\Omega) - \mathfrak{F}\mu^j(G_r)| +$$
$$+ |\mathfrak{F}\mu^j(G_r) - \mathfrak{F}\mu^0(G_r)| + |\mathfrak{F}\mu^0(G_r) - \mathfrak{F}\mu^0(\Omega)| ,$$

e da quanto precede, segue la (22).

Viceversa, supposta la (22), procedendo come prima, si prova che

$$0 \leqslant \mathfrak{F}\mu^j(\Omega) - \mathfrak{F}\mu^j(G_r) = \mathfrak{F}\mu^j(\Omega \setminus G_r) < \varepsilon ,$$

per j sufficientemente grande, da cui:

$$0 \leqslant \tilde{\mathfrak{F}}\mu^j(\Omega) - \tilde{\mathfrak{F}}\mu^j(G_r) = \tilde{\mathfrak{F}}\mu^j(\Omega \setminus G_r) \leqslant \Lambda\mathfrak{F}\mu^j(\Omega \setminus G_r) < \Lambda\,\varepsilon ,$$

da cui segue la (21), ed il teorema è così completamente provato.

OSSERVAZIONE 2 - Sia $\Omega \subset \Omega_0$ un aperto non vuoto. Per ogni $\mu \in \mathfrak{M}^n(\Omega_0)$ definiamo la misura:

$$\mu_\Omega : \mathfrak{B}(\Omega_0) \rightarrow \mathbf{R}^n \text{ mediante la:}$$
$$\mu_\Omega(E) = \mu(\Omega \cap E).$$

In tal caso risulta $|\mu_\Omega|(\partial\Omega) = 0$ e quindi il Teorema 1 può essere applicato alle misure $(\mu^j_\Omega)_j$; basta tener conto del fatto che $\mu^j \rightharpoonup \mu^0$ implica $\mathfrak{F}\mu^0_\Omega(\Omega) = \mathfrak{F}\mu^0(\Omega) \leqslant \underline{\lim}\,\mathfrak{F}\mu^j(\Omega) = \underline{\lim}\,\mathfrak{F}\mu^j_\Omega(\Omega)$.

Pertanto l'asserto del Teorema 1 sussiste anche senza l'ipotesi che $|\mu^0|(\partial\Omega) = 0$. Le stesse considerazioni si applicano ad Ω_0.

Nel caso in cui il funzionale $\mathfrak{F}$ verifica la condizione:

$$(*)\ \mathfrak{F}(p) = 0 \text{ se e solo se } p = 0 ,$$

il Teorema 1 può essere provato con la condizione (più debole) che $\mu^j \rightharpoonup \mu^0(C^\infty_c)$. Sussiste infatti il seguente:

TEOREMA 2 - *Con le notazioni del Teorema* 1, *se* $\mathfrak{F}$ *verifica la* (*) *e se* $\mu^j \rightharpoonup \mu^0(C^\infty_c)$ *su* Ω, *condizione necessaria e sufficiente affinché sussista la* (21) *è che valga la* (22).

Dimostrazione. L'ipotesi (*) implica che esiste $a > 0$ tale che: $a|p| \leqslant \mathfrak{F}(p)$. Se vale la (21), esiste $T > 0$ tale che $\tilde{\mathfrak{F}}\mu^j(\Omega) \leqslant T$ per ogni $j \in \mathbf{N}$, da cui $|\mu^j|(\Omega) \leqslant T/a\lambda$, per ogni j. Se allora $\varphi \in C^0_c(\Omega)$, $\int |\varphi|\,d|\mu^j| \leqslant \|\varphi\|_\infty T/a\lambda$; quindi (μ^j) è debolmente limitata su Ω, da cui $\mu^j \rightharpoonup \mu^0$ su Ω (cfr. per es. le tecniche usate in [24], pag. 227). Analogamente si procede a partire dalla (22). Basta quindi applicare il Teorema 1, con $\Omega = \Omega_0$ (cfr. anche Osservazione 1).

4. - **Applicazioni.**

a) *Una definizione di $\mathfrak{F}$ - perimetro.*

Denotiamo con $\mathcal{W}$ la classe di tutte le funzioni continue

$$W : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}_0^+ ,$$

tali che:

(i) $W(.,t) \in L^1(\mathbf{R}^m)$ e $\int_{\mathbf{R}^m} W(x,t)\,dx = 1$, per ogni $t \in \mathbf{R}^+$;

(ii) per ogni $\delta > 0$, si ha:
$\lim_{t \to 0^+} \int_{|x| > \delta} W(x,t)\,dx = 0$.

Sia $\mu \in \mathfrak{M}^n(\mathbf{R}^m)$ e sia $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ un aperto non vuoto. Definiamo: $\mu_\Omega(E) = \mu(\Omega \cap E)$, per ogni $E \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$.

Fissato $W \in \mathcal{W}$, definiamo le misure:

$$U_t(W,\mu) : \mathcal{B}(\mathbf{R}^m) \to \mathbf{R}^n ,$$

$$U_t(W,\mu)(E) = \int_{\mathbf{R}^m} \mu_\Omega(E - x)\, W(x,t)\, dx . \tag{26}$$

E' noto che (cfr. [9]) le misure $U_t(W,\mu)$ sono assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue m, nel senso che $m(E) = 0$ implica $|U_t(W,\mu)|(E) = 0$.

Inoltre la derivata di Radon-Nikodym di $U_t(W,\mu)$ è data dalla:

$$u_W^\Omega(x,t) = \int_{\mathbf{R}^m} W(x-y,t)\, d\mu_\Omega(y) = \int_\Omega W(x-y,t)\, d\mu(y). \tag{27}$$

Sia $\mathfrak{F} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_0^+$ un funzionale sub-lineare limitato.

Definizione 3 - Definiamo *operatore $\mathfrak{F}$-perimetro su Ω*, la funzione $\mathrm{P}(\mathfrak{F}, W, \Omega) : \mathfrak{M}^n(\mathbf{R}^m) \to \mathbf{R}_0^+$, definita dalla:

$$P(\mathfrak{F}, W, \Omega)(\mu) = \overline{\lim_{t \to 0^+}} \int_{\mathbf{R}^m} \mathfrak{F}(u_W^\Omega(x,t))\, dx . \tag{28}$$

Sussiste il seguente teorema:

Teorema 3 - *Nella* (28) *esiste il limite e risulta:*

$$P(\mathfrak{F}, W, \Omega)(\mu) = \mathfrak{F}\mu(\Omega),$$

per ogni $W \in \mathcal{W}$, $\mu \in \mathfrak{M}^n(\mathbf{R}^m)$.

Dimostrazione. In virtù del Teorema 15.3 in [9] (cfr. anche Teorema 3 in [21]), le misure $\{U_t(W,\mu)\}_{t \geq 0}$ convergono debolmente a μ_Ω e quindi per il Teorema 4 in [21] e per la p. 4) segue subito l'asserto (i nuclei adoperati in [21] sono più regolari di quelli della classe $\mathcal{W}$, ma è facile osservare che il Teorema 4 in [21] sussiste anche per i nuclei di $\mathcal{W}$).

Se $\mu \in \mathcal{M}^n(\mathbf{R}^m)$ indichiamo con $\tilde{\mu}$ la misura associata a μ mediante la (3). Allora è facile osservare che se Ω è un aperto in $\mathbf{R}^m$, $(\tilde{\mu})_\Omega$ è la misura associata a μ_Ω.

Definiamo le misure $\tilde{U}_t(W,\mu): \mathcal{B}(\mathbf{R}^m) \to \mathbf{R}^n$ ponendo:

$$\tilde{U}_t(W,\mu)(E) = \int_E g(x)\, dU_t(W,\mu) = \int_E \{ \int_\Omega W(x-y,t)\, d\mu(y) \} g(x)\, dx.$$

Se ν è la misura definita dalla (2), ove $\Omega_0 = \mathbf{R}^m$, poniamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE 4 - Definiamo *operatore $\mathcal{F}$-perimetro con peso ν*, la funzione definita dalla:

$$(29) \quad \tilde{P}_\nu(\mathcal{F}, W, \Omega)(\mu) = \overline{\lim_{t\to 0^+}} \int_{\mathbf{R}^m} \mathcal{F}(u_W^\Omega(x,t))\, g(x)\, dx.$$

Sussiste il seguente:

TEOREMA 4 - *Per ogni $W \in \mathcal{W}$, $\mu \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$ e per ogni aperto non vuoto $\Omega \subset \mathbf{R}^m$, risulta:*

$$(30) \quad \tilde{P}_\nu(\mathcal{F}, W, \Omega)(\mu) = \mathcal{F}\tilde{\mu}(\Omega).$$

Dimostrazione. Per il Teorema 15.3 in [9] le misure

$$\{U_t(W,\mu)\}_{t\geq 0}$$

convergono debolmente a μ_Ω e quindi dal Lemma 1 segue che

$$\{\tilde{U}_t(W,\mu)\}_{t\geq 0}$$

converge debolmente a $\tilde{\mu}_\Omega$. Tenendo conto dell'assoluta continuità delle $U_t(W,\mu)$ e della p. 3) ed applicando il Lemma 4 otteniamo:

$$\int_\Omega \mathcal{F}(u_W^\Omega(x,t))\, g(x)\, dx = \int_\Omega g(x)\, d\mathcal{F}\, U_t(W,\mu) = \mathcal{F}\, \tilde{U}_t(W,\mu)(\Omega).$$

L'asserto segue allora applicando direttamente il Teorema 1 (cfr. anche Osservazione 1).

OSSERVAZIONE 3 - I Teoremi 2 e 3 implicano l'indipendenza dal nucleo $W \in \mathcal{W}$, della definizione di «operatore $\mathcal{F}$-perimetro con o senza peso», sicché possiamo scrivere $P(\mathcal{F},\Omega)$, $\tilde{P}_\nu(\mathcal{F},\Omega)$ in luogo di $P(\mathcal{F}, W, \Omega)$, $\tilde{P}_\nu(\mathcal{F}, W, \Omega)$.

b) *Variazione globale generalizzata e perimetro.*

Sia $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^m$ un aperto non vuoto, $f: \Omega_0 \to \mathbf{R}$ una funzione localmente sommabile in Ω_0, debolmente differenziabile (d.d.) (cfr. [27]), con misura derivata μ_f.

Se $\mathfrak{F}: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}_0^+$ è definito dalla $\mathfrak{F}(p) = |p|$, allora $|\mu_f|(\Omega_0)$ rappresenta la variazione globale della f su Ω_0.

Per un'altra definizione di variazione globale della f vedasi [15]; in particolare la definizione proposta in [14] e [15], si ispira ad un processo di integrazione dovuto a L. Cesari [16], [17]; è facile vedere che in un senso precisato in [14], [15] le due definizioni coincidono. Se $\tilde{\mu}_f$ è la misura associata a μ_f mediante la (3) allora $|\tilde{\mu}_f|(\Omega_0)$ rappresenta la *variazione globale con peso della f su (Ω_0)*.

Una definizione diversa di variazione con peso è stata proposta in [7], in un assetto bidimensionale. Essa si ispira all'Integrale di Burkill-Cesari.

Sia (f_j), $j = 0, 1, \dots$, una successione di funzioni d.d. in $L^1_{\text{loc}}(\Omega_0)$ e denotiamo con μ_{f_j} la misura derivata di f_j, per ogni $j = 0, 1, \dots$

DEFINIZIONE 5 - Diciamo che f_j *converge vagamente* ad f_0 se ri-

(31) $$\lim_{j \to +\infty} \int f_j(x)\, \varphi(x)\, dx = \int f_0(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_0)$.

Sia ν la misura definita dalla (2) con $g \in C^0(\mathbf{R}^m)$, $0 < \lambda \leq g(x) \leq \Lambda$, per ogni $x \in \Omega_0$. Allora il Teorema 1 fornisce il seguente Corollario (cfr. anche Osservazione 1):

COROLLARIO 2 - *Sia (f_j), $j = 0, 1, \dots$, una successione di funzioni d. d. in $L^1_{\text{loc}}(\Omega_0)$, vagamente convergente su Ω_0 ad f_0. Condizione necessaria e sufficiente affinché risulti:*

(32) $$\lim_{j \to +\infty} |\tilde{\mu}_{f_j}|(\Omega_0) = |\tilde{\mu}_{f_0}|(\Omega_0),$$

è che

(33) $$\lim_{j \to +\infty} |\mu_{f_j}|(\Omega_0) = |\mu_{f_0}|(\Omega_0).$$

Dimostrazione. Proviamo anzitutto che $\mu_{f_j} \rightharpoonup \mu_{f_0}(C_0^\infty)$ su Ω_0.

Sia $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)$. Risulta:

$$\int f_j \nabla\varphi\, dx = -\int \varphi\, d\mu_{f_j}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

da cui:

$$\left|\int \varphi\, d\mu_{f_j} - \int \varphi\, d\mu_{f_0}\right| = \left|\int f_j \nabla\varphi\, dx - \int f_0 \nabla\varphi\, dx\right| =$$
$$= \left|\int (f_j - f_0)\, \nabla\varphi\, dx\right| \leq \sum_{i=1}^m \left|\int (f_j - f_0)\, (\partial\varphi/\partial x_i)\, dx\right|.$$

Poiché $\partial\varphi/\partial x_i \in C_c^\infty(\Omega_0)$, segue l'asserto per la (31).

Basta allora applicare il Teorema 2 al funzionale $\mathfrak{F}(p) = |p|$.

OSSERVAZIONE 4 - Nel caso unodimensionale e in quello bidimensionale un risultato analogo a quello espresso dal Corollario 2 è stato dato in [13] [7] rispettivamente, nell'assetto dell'Integrale di Burkill-Cesari, adoperando la convergenza in misura in luogo di quella vaga.

Gli esempi che seguono mettono in luce che la convergenza vaga non è confrontabile con la convergenza in misura.

Esempio 1 - Sia $\Omega_0 =]-1, 1[$ e consideriamo la successione:

$$f_n(x) = n\chi_{[-1/n, 1/n]}(x).$$

Tale successione converge quasi ovunque alla $f_0 = 0$ su Ω_0; tuttavia la (31) non può essere verificata per tutte le $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_0)$ poiché:

$$\lim_{n\to+\infty} \int \varphi(x) f_n(x)\, dx = 2\varphi(0).$$

Né si può affermare che $\mu_{f_n} \rightharpoonup \mu_{f_0}$. Infatti essendo:

$$\mu_{f_n}(E) = \begin{cases} -n & ,\text{se } n^{-1} \in E,\ -n^{-1} \notin E, \\ n & ,\text{se } n^{-1} \notin E,\ -n^{-1} \in E, \\ 0 & ,\text{altrimenti}, \end{cases} \quad , \quad \mu_{f_0} = 0,$$

per ogni $E \in \mathcal{B}(\Omega_0)$, per ogni $\varphi \in C_c^0(\Omega_0)$ risulta:

$$\int \varphi(x)\, d\mu_{f_n} = -n[\varphi(n^{-1}) - \varphi(-n^{-1})],$$

ed il limite nella precedente relazione non esiste per tutte le $\varphi \in C_c^0$. Inoltre se $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_0)$, il limite è $-2\varphi'(0)$, mentre $\mu_{f_0} = 0$.

Esempio 2 - Sia $\Omega_0 =]0, 1[$ e consideriamo la successione definita dalla $f_n(x) = \cos 2\pi nx$, $x \in]0, 1[$. Allora in virtù del classico lemma di Riemann-Lebesgue, $f_n \to 0$ debolmente in $L^1(]0, 1[)$ e quindi sussiste la (31). Inoltre $\|f_n\|_1 = 2/\pi$ da cui f_n non converge a 0 in L^1 e questo implica che (f_n) non converge a 0 in misura (cfr. [32], pag. 122).

OSSERVAZIONE 5 - Si osservi che, in generale, la convergenza vaga della (f_j) verso f_0 non garantisce la convergenza debole delle misure derivate come è messo in evidenza dalla seguente Proposizione:

PROPOSIZIONE 1 - *Sia* (f_j), $j = 0, 1, \ldots$, *una successione di funzioni in* $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_0)$, *debolmente differenziabili tale che:*

$$\lim_{j\to+\infty} \int \varphi f_j\, dx = \int \varphi f_0\, dx, \quad \textit{per ogni } \varphi \in C_c^k(\Omega_0),$$

con $k \in \mathbf{N}_0$. *Allora risulta:*

$$\lim_{j\to+\infty} \int \varphi\, d\mu_{f_j} = \int \varphi\, d\mu_{f_0}, \quad \textit{per ogni } \varphi \in C_c^{k+1}(\Omega_0).$$

Dimostrazione. Basta seguire il ragionamento svolto nel Corollario 2, per provare che $\mu_{f_j} \rightharpoonup \mu_{f_0}(C_c^\infty)$.

Se oltre alla (31), imponiamo la condizione che la successione delle misure derivate dalle f_j è debolmente limitata, allora si ottiene $\mu_{f_j} \rightharpoonup \mu_{f_0}$ su Ω_0, come si evince dalla dimostrazione del Corollario 2.

I seguenti esempi mostrano che la convergenza debole delle misure derivate non è confrontabile con quella in L^1 delle funzioni f_j.

Esempio 3 - Si consideri la successione $(f_n)_n$ definita su

$$\Omega_0 =]0,1[$$

dalla legge:

$$f_n(x) = n\chi_{]0,1/n]}(x).$$

Tale successione non converge in $L^1(]0,1[)$. Tuttavia è facile verificare che sussiste la (31) in quanto le funzioni φ che vi intervengono hanno supporto compatto in $]0,1[$.

La misura derivata della f_n è data dalla:

$$\mu_{f_n}(E) = \begin{cases} -n & ,\text{se } 1/n \in E, \\ 0 & ,\text{se } 1/n \notin E. \end{cases}$$

Tale successione converge debolmente alla misura nulla poiché risulta, per $\varphi \in C_c^0(\Omega_0)$:

$$\int \varphi(x)\, d\mu_{f_n} = -n\varphi(1/n),$$

che tende a 0, poiché φ è a supporto compatto in $]0,1[$.

Esempio 4 - Sia $\Omega_0 =]0,1[$ e per $x \in \Omega_0$ definiamo:

$$v_{h,x}(t) = (1/2h^2)\,\chi(t)_{[x-h^2,x+h^2]}\,,\ g_h(t) =$$

$$= h^{-1/2}\{v_{h,c+h}(t) - v_{h,c}(t)\},\ f_h(x) = \int_0^x g_h(t)\,dt,$$

con $0 < c < 1$ e per ogni h positivo e sufficientemente piccolo.

Posto:

$$\mu^h(A) = \int_A g_h(t)\,dt\ ,\ A \in \mathscr{B}(]0,1[),$$

μ^h è la misura derivata della funzione f_h. Per ogni $\varphi \in C_c^0(\Omega_0)$, risulta:

$$\int \varphi\, d\mu^h = h^{-1/2}(\varphi(c + h + \vartheta_h h^2) - \varphi(c + \eta_h h^2)),$$

dove ϑ_h, η_h sono opportuni numeri in $]0,1[$.

Allora non può sussistere la convergenza debole poiché il limite per $h \to 0^+$ nella precedente relazione non esiste per tutte le $\varphi \in C^0_c(\Omega_0)$, mentre non è difficile provare che le f_h convergono in $L^1(]0,1[)$ alla funzione nulla.

OSSERVAZIONE 6 - Se nella definizione di convergenza debole la classe $C^0_c(\Omega_0)$ è sostituita dalla classe $C^1_c(\Omega_0)$ allora la convergenza in $L^1_{\text{loc}}(\Omega_0)$ implica quella debole delle misure derivate (rispetto alla classe C^1_c).

OSSERVAZIONE 7 - Da quanto detto in a) e b) segue che il perimetro con peso di f coincide con la sua variazione globale con peso: ciò estende un risultato di Vinti ([29]), relativo al perimetro in assenza di peso.

c) *Integrale Multiplo del Calcolo delle Variazioni.*

Sia $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^n$ un aperto limitato, $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega_0)$ una funzione debolmente differenziabile e μ_f la misura derivata di f definita su $\mathcal{B}(\Omega_0)$.

Definiamo la misura $\mu^*_f : \mathcal{B}(\Omega_0 \to \mathbf{R}^{n+1}$, ponendo: $\mu^*_f = (\mu_f, m)$.

Sia $\psi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+_0$ una funzione non negativa e convessa in $\mathbf{R}^n$. Diremo che ψ gode della proprietà (α_1) se esiste finito il limite:

$$\lim_{t \to 0^+} t\psi(p/t) \equiv \psi^*(p).$$

In tal caso (cfr. [21], [11], [12]) si può definire un funzionale sub-lineare limitato $\mathcal{F}(p,t)$ ponendo per $p \in \mathbf{R}^n$ e $t \geqslant 0$:

$$(34) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}(p,t) &= t\,\psi(p/t) \quad &, t > 0, \\ &= \psi^*(p) \quad &, t = 0. \end{aligned}$$

Allora (cfr. [21], Teorema 5) $\mathcal{F}\mu^*_f(\Omega_0)$ rappresenta l'Integrale del Calcolo delle Variazioni alla J. Serrin (cfr. [28]), denotato con $I_S(\psi, f, \Omega_0)$, relativamente ad f su Ω_0.

Se $\tilde{\mu}^*_f$ è la misura associata a μ^*_f mediante la (3) e se $\mathcal{F}$ è definito dalla (34), definiamo l'*Integrale del Calcolo delle Variazioni alla Serrin con peso* ν *relativamente ad* f *su* Ω_0 *il numero:*

$$I^\nu_S(\psi, f, \Omega_0) = \mathcal{F}\tilde{\mu}^*_f(\Omega_0).$$

Il Lemma 4 implica in tal caso una interessante relazione tra I_S e I^ν_S:

$$(35) \quad \mathcal{F}\tilde{\mu}^*_f(E) = \int_E g(x)\, d\mathcal{F}\mu^*_f,$$

per ogni $E \in \mathcal{B}(\Omega_0)$.

E' possibile in tal caso stabilire, come applicazione del Teorema 1 un teorema di indipendenza dal peso della convergenza degli integrali I_S qualora ν soddisfi alle condizioni imposte in quel teorema e nelle ipotesi del Corollario 2.

OSSERVAZIONE 8 - Se

$$n = 2\,,\ \Omega_0 \subset \mathbf{R}^2,\ f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_0),\ \psi = \{1 + p^2 + q^2\}^{1/2}$$

e se $\mathfrak{F}$ è definito dalla (34) a partire dalla ψ, allora $\mathfrak{F}\mu^*_f(\Omega_0)$ è l'area generalizzata della f su Ω_0; così $\mathfrak{F}\tilde{\mu}^*_f(\Omega_0)$ è l'area generalizzata con peso della f su Ω_0.

d) *Una versione «pesata» di un teorema di approssimazione alla L. C. Young - M. Boni.*

Ci limiteremo al caso $m = 2$. Così Ω_0 è un aperto limitato di $\mathbf{R}^2$, $\mu : \mathfrak{B}(\Omega_0) \to \mathbf{R}^3$ è definita dalla $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, dove:

$$\mu_i(E) = \int_E a_i(x, y)\, dxdy + \beta_i(E),$$

$$a_i \in L^1(\Omega_0),\ \beta_i \perp m \text{ e } \beta_3 = 0\,, \text{ cioè } \mu_3 << m\,.$$

Poniamo inoltre $\beta = (\beta_1, \beta_2, 0)$, $\beta^*_1 = (\beta_1, 0, 0)$, $\beta^*_2 = (0, \beta_2, 0)$.

Sia $\mathfrak{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^+_0$ un funzionale sub-lineare continuo.

DEFINIZIONE 6 - Diremo che $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ è una misura A.C.Y. rispetto ad $\mathfrak{F}$ su un aperto $\Omega \subset \Omega_0$, se risulta (cfr. [12], [15]):

$$\mathfrak{F}\beta(\Omega) = \mathfrak{F}\beta^*_1(\Omega) + \mathfrak{F}\beta^*_2(\Omega)\,.$$

Supponiamo che μ_1 sia decomponibile rispetto ad y e μ_2 rispetto ad x (cfr. [23], [12], [5], [6]). Poniamo allora per h, k positivi e sufficientemente piccoli:

$$X_h(x, y) = (2h)^{-1}\mu_{1,y}([x - h, x + h]),$$

$$Y_k(x, y) = (2k)^{-1}\mu_{2,x}([y - k, y + k]),$$

e per ogni $E \in \mathfrak{B}(\Omega_0)$ definiamo le misure:

$$\mu_1^{(h)}(E) = \int_E X_h(x, y)\, dxdy\,,\ \mu_2^{(k)}(E) = \int_E Y_k(x, y)\, dxdy\,,$$

$$\mu^{(h,k)}(E) = (\mu_1^{(h)}(E),\ \mu_2^{(k)}(E),\ \mu_3(E)).$$

TEOREMA 5 (cfr. [12]) - *Sia Ω un aperto, $\bar{\Omega} \subset \Omega_0$. Se μ è A.C.Y. su Ω, risulta:*

$$\lim_{(h,k)\to 0} \int_\Omega \mathfrak{F}(X_h(x, y),\ Y_k(x, y),\ a_3(x, y))\, dxdy = \mathfrak{F}\mu(\Omega).$$

Applicando il Teorema 5 ed il Teorema 1, possiamo provare il seguente:

TEOREMA 6 - *Sia Ω un aperto $\bar{\Omega} \subset \Omega_0$; sia μ A.C.Y. su Ω e suppo-*

niamo che il peso $\nu = \int g dx$ *soddisfi alle condizioni imposte nel Teorema 1. Allora risulta:*

$$\lim_{(h,k)\to 0} \int_\Omega \mathcal{F}(X_h(x,y), Y_k(x,y), a_3(x,y))\, g(x,y)\, dxdy = \mathcal{F}\tilde{\mu}(\Omega),$$

dove $\tilde{\mu}$ *è la misura associata alla* μ *tramite la* (3).

Dimostrazione. E' facile provare che le misure $\mu^{(h,k)}$ convergono debolmente a μ (cfr. [12]). Pertanto l'asserto segue dalla p. 3), dal Teorema 5 e dal Teorema 1.

OSSERVAZIONE 9 - Nello stesso modo si possono dare versioni con peso di altre formule di approssimazione per $\mathcal{F}\mu$ (e quindi per I_S) provate in [5], [6].

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BAIADA, *Convergence in variation and convergence in length,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, *15* (1966), 98-102.

[2] C. BARDARO, *Nuclei, derivata simmetrica e perimetro di una misura,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, *28* (1979), 373-386.

[3] C. BARDARO, *La disuguaglianza generalizzata di Steiner per funzionali sub-lineari su misure,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, *30* (1981), 114-130.

[4] C. BARDARO, *Alcuni teoremi di convergenza per l'Integrale Multiplo del Calcolo delle Variazioni,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, *31* (1982), 302-324.

[5] C. BARDARO, D. CANDELORO, *Sull'approssimazione dell'Integrale alla Burkill-Cesari per funzionali sub-lineari su misure e applicazioni all'Integrale Multiplo del Calcolo delle Variazioni,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, *26* (1977), 339-362.

[6] C. BARDARO, D. CANDELORO, *Teoremi di approssimazione per l'Integrale Multiplo del Calcolo delle Variazioni,* Rend. Circ. Mat. Palermo, *30* (1981), 63-82.

[7] C. BARDARO, G. VINTI, *Perimetro e variazione generalizzata rispetto ad una misura in* $\mathbf{R}^2$, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, *35* (1987), 173-190.

[8] P. BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures,* J. Wiley and Sons, New York, 1968.

[9] S. BOCHNER, *Harmonic Analysis and the theory of probability,* Berkeley and Los Angeles, 1955.

[10] M. BONI, *Variazione generalizzata con peso e quasi additività,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, *25* (1976), 195-210.

[11] M. BONI, *Sull'approssimazione dell'Integrale Multiplo del Calcolo delle Variazioni,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, *20* (1971), 187-211.

[12] M. BONI, *Teoremi di approssimazione per funzionali sub-lineari su misure e applicazioni all'Integrale del Calcolo delle Variazioni,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, *21* (1972), 237-263.

[13] P. BRANDI, *Convergenza in variazione con peso. Criteri di convergenza uniforme e uniforme quasi ovunque,* Boll. U.M.I. *15*-B (1978), 869-884.

[14] P. BRANDI, A. SALVADORI, *Sull'area generalizzata,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, *28* (1979), 33-62.

[15] P. BRANDI, A. SALVADORI, *On convergence in area in generalized sense*, J. Math. Anal. Appl. *92* (1983), 119-138.

[16] L. CESARI, *Quasi additive set functions and the concept of integral over a variety*, Trans. Amer. Math. Soc. *102* (1962), 94-113.

[17] L. CESARI, *Extension problem for quasi additive set functions and Radon-Nikodym derivatives*, Trans. Amer. Math. Soc. *102* (1962), 114-145.

[18] E. DE GIORGI, *Su una teoria generale della misura $(n-1)$-dimensionale in uno spazio ad n dimensioni*, Ann. Mat. Pura e Appl. (IV), *36* (1954), 191-213.

[19] N. DINCULEANU, *Vector Measures*, Pure Appl. Math., Pergamon Press 1967.

[20] C. GOFFMAN, *Lower semicontinuity and area functionals - I. The non parametric case*, Rend. Circ. Mat. Palermo, II (2) (1953), 203-235.

[21] C. GOFFMAN, J. SERRIN, *Sub-linear functions of measures and Variational Integrals*, Duke Math. J. *31* (1964), 159-178.

[22] P. R. HALMOS, *Measure theory*, Springer-Verlag, 1974.

[23] K. KRICKBERG, *Distributionen, Funktionen beschranter, Variation und Lebesguescher, Inhalt Nichparametrischer Flachen*, Ann. Mat. Pura e Appl. *44* (1967), 105-133.

[24] G. LETTA, *Teoria elementare dell'Integrazione*, Boringhieri, 1976.

[25] T. RADÒ, *Length and area*, Amer. Math. Colloquium Publications, vol. *25*, 1948.

[26] T. RADÒ, P. REICHELDERFER, *Convergence in length and convergence in area*, Duke Math. J. *9* (1942), 527-565.

[27] J. SERRIN, *On differentiability of functions of several variables*, Arch. Rational Mech. Anal. 7 (1961), 358-372.

[28] J. SERRIN, *On the definition and properties of certain Variational Integrals*, Trans. Amer. Math. Soc., *101* (1961), 139-167.

[29] C. VINTI, *Perimetro-Variazione*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, III, *18* (1964), 201-231.

[30] C. VINTI, *Convergenza in area*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, *17* (1968), 29-46.

[31] C. VINTI, *Espressioni che danno l'area di una superficie*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, *17* (1968), 289-350.

[32] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, 5th Edition, Springer-Verlag, 1978.

[33] L. C. YOUNG, *An expression connected with area of a surface $z=f(x,y)$*, Duke Math. J. *11* (1944), 43-57.