ALBERI CONNESSI PER ARCHI. PUNTI PERIODICI DI UNA FUNZIONE CONTINUA DI UN ALBERO CONNESSO PER ARCHI IN SÉ (*)

di G. DI LENA (a Bari) e B. MESSANO (a Napoli) (**)

SOMMARIO. - *In questo lavoro si caratterizzano gli alberi connessi per archi ed i sottoalberi di un albero connesso per archi. Considerato poi un albero X connesso per archi ed una funzione continua f di X in X, si indicano condizioni equivalenti all'esistenza di un punto periodico di f.*

SUMMARY. - *In this paper characterizations of the arcwise connected trees and of a subtree of an arcwise connected tree are given. Moreover, considering an arcwise connected tree X and a continuous function f of X into X, conditions equivalent to the existence of a periodic point of f are indicated.*

Introduzione.

Un teorema di [4], cfr. Teorema 3, permette di caratterizzare in modo semplice e significativo, nell'ambito degli spazi topologici, gli alberi connessi per archi.

Da tale caratterizzazione, indicata nel Teorema 2.1 di questa nota, consegue, cfr. Teorema 2.2, che, detto X un albero connesso

(*) Pervenuto in Redazione il 25 novembre 1986.
Lavoro svolto nell'ambito del programma nazionale di ricerche del M.P.I. (40%, 1985).
(**) Indirizzi degli Autori: Dipartimento di Matematica - Università di Bari - Via G. Fortunato - 70125 Bari e, risp., Dipartimento di Matematica e Applicazioni - Università di Napoli - Via Claudio, 21 - 80125 Napoli.

per archi, i sottoalberi di X sono i suoi sottoinsiemi chiusi e connessi, il che permette di determinare il più piccolo sottoalbero di X contenente un dato sottoinsieme chiuso e non vuoto di X.

Nel numero tre si dà la nozione di punto terminale di un sottoinsieme chiuso C di X e si caratterizzano i punti terminali di C.

La questione che ha dato origine a questo lavoro è quella dell'esistenza di punti periodici di una funzione continua f di X in sé. In proposito, cfr. Teorema 5.1, viene rilevato che ognuna delle proposizioni seguenti è equivalente all'esistenza di un punto periodico della funzione f:

$a_1)$ *Esistono $x, y \in X$, con $x \neq y$, ed esistono m e n tali che:*

$$(f^n(y)\, x\, y\, f^m(x)).$$

$a_2)$ *Esiste $w \in X$, con $w \neq f(w)$, ed esistono r e s (interi positivi) tali che:*

$$(f^s(w)\, w\, f^r(w)).$$

[Per il significato delle scritture $(a\,b\,c)$ e $(a\,b\,c\,d)$ cfr. n. 3].

Nel caso in cui X è un intervallo compatto di $\mathbf{R}$ l'esistenza di un punto periodico della funzione f è anche equivalente ad ognuna delle proposizioni seguenti (cfr. Teorema 6.1):

$a_4)$ *Esiste un punto periodico di f di periodo due.*

$a_5)$ *Esiste $w \in X$, con $w \neq f(w)$, tale che:*

$$(f^2(w)\, w\, f(w)).$$

$a_6)$ *Esistono $x, y \in X$, con $x \neq y$, tali che:*

$$(f(y)\, x\, y\, f(x)).$$

Gli Autori ringraziano il prof. A. Zitarosa per gli utili colloqui avuti con lui.

Le linee generali della ricerca e i nn. 4, 5 e 6 vanno attribuiti ad entrambi gli Autori; i nn. 2 e 3 sono dovuti principalmente al secondo Autore.

2. - Sia S uno spazio topologico connesso e di Hausdorff.

Si dice che un punto p di S *separa* i punti a e b di S quando esistono due aperti M e N disgiunti e tali che $a \in M$, $b \in N$ e $S - \{p\} = M \cup N$.

Come facilmente si verifica, un punto p di S separa almeno due punti di S se e solo se $S - \{p\}$ non è connesso e cioè, come suol dirsi, p è un *cut point* di S.

Si dice che lo spazio connesso e di Hausdorff S è un *albero* se è compatto e per ogni coppia di punti distinti di S esiste un terzo punto di S che li separa.

I due teoremi seguenti, il secondo dei quali può dedursi dal primo, forniscono rispettivamente una caratterizzazione degli alberi connessi per archi e una caratterizzazione dei sottoalberi di un albero connesso per archi. [Se a e b sono punti distinti di uno spazio topologico T, un sottoinsieme Y di T dicesi *arco* di T di estremi a e b se esiste un omeomorfismo g di $[0,1]$ su Y tale che $g(\{0,1\}) = \{a,b\}$].

Teorema 2.1 - *Uno spazio topologico T è un albero connesso per archi se e solo se soddisfa le seguenti condizioni:*

(a) T è compatto e di Hausdorff.

(b) Per ogni coppia di punti distinti x e y di T esiste uno e un solo arco avente per estremi x e y.

(c) Ogni sottoinsieme connesso di T è connesso per archi.

Dim. Ci limitiamo ad osservare che:

ricalcando la seconda parte della dimostrazione del Teorema 3, pag. 109, di [4] (che si riferisce ad una nozione di *arc* che generalizza la nostra di *arco*) si prova che se T è di Hausdorff, la *(b)* e la *(c)* implicano l'esistenza di un punto di T che separa due punti distinti di T;

nell'ipotesi che T sia un albero connesso per archi l'esistenza, per ogni coppia (x,y) di punti distinti di T, di un arco di estremi x e y e di un unico *arc* di *end points* x e y (cfr. Teorema 3 di [4]) implica che ogni *arc* è un arco, e da ciò conseguono la *(b)* e la *(c)* in virtù dello stesso Teorema 3 di [4].

Teorema 2.2 - *I sottoalberi di un albero T connesso per archi sono i sottoinsiemi chiusi e connessi di T.*

Dai Teoremi 2.1 e 2.2 consegue che: *i sottoalberi di un albero connesso per archi sono connessi per archi.*

D'ora in poi, salvo avviso contrario, *denotiamo con X un albero, non degenere, connesso per archi e, qualunque siano i punti x e y di X, denotiamo con $\overset{\frown}{x\ y}$ l'arco di estremi x e y, se $x \neq y$, oppure $\{x\}$, se $x = y$.*

La caratterizzazione dei sottoalberi di X fornita dal Teorema 2.2 è utile per dimostrare che:

Teorema 2.3 - *Se C è un sottoinsieme chiuso e non vuoto di X il più piccolo sottoalbero di X contenente C è l'insieme:*

$$Y = \bigcup_{a,b \in C} \widehat{a\ b}\,.$$

Dim. Siccome, qualunque siano i punti x, y e z di X si ha $\widehat{x\ y} \subseteq \widehat{z\ x} \cup \widehat{z\ y}$, per ogni punto $c \in C$ risulta:

$$Y = \bigcup_{b \in C} \widehat{c\ b}\,.$$

Allora Y è connesso; ne consegue facilmente, per il Teorema 2.2, che il più piccolo sottoalbero di X contenente C è la chiusura di Y.

L'asserto sarà pertanto dimostrato non appena avremo fatto vedere che Y è chiuso.

Supponiamo per assurdo che esista un punto $p \in \bar{Y} - Y$. Per il Teorema 158, pag. 96, di [8], esiste un intorno U di p disgiunto da C e avente frontiera finita. L'insieme degli archi aventi gli estremi in FrU e godenti della proprietà di essere inclusi in qualche arco con gli estremi in C è non vuoto, in quanto fissato un punto x di Y interno a U esistono ovviamente un arco A con gli estremi in C e un arco B con gli estremi in FrU tali che $x \in B \subseteq A$.

Poiché l'unione K degli archi con gli estremi in FrU godenti della suddetta proprietà è un chiuso incluso in Y esiste un intorno aperto I di p incluso in U e disgiunto da K; risultando:

$$\emptyset \neq I \cap Y = I \cap K = \emptyset$$

si ha l'assurdo. L'asserto è così dimostrato.

Osserviamo infine che:

TEOREMA 2.4 - *Per ogni terna (a, p, b) di punti di X le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. *p separa a e b.*

2. *a e b appartengono a componenti distinte di $X - \{p\}$.*

3. *$a \neq p \neq b$ e $p \in \widehat{a\ b}$.*

3. - Utile in questo lavoro è la seguente notazione:

denotati con a, b e c tre punti di X, scriveremo $(a\,b\,c)$ se b appartiene all'arco di estremi a e c oppure se $a = b = c$.

Sono facilmente verificabili le seguenti proprietà della relazione ternaria sopra definita:

I. $(a\,b\,c) \Leftrightarrow (c\,b\,a)$.

II. $[(a\,b\,c)$ e $a = c] \Leftrightarrow a = b = c$.

III. $[(a\,b\,c)$ e $(a\,c\,b)] \Leftrightarrow b = c$.

IV. $[(a\,b\,c)$, $(b\,c\,d)$ e $b \neq c] \Rightarrow [(a\,b\,d)$ e $(a\,c\,d)]$.

V. $[(a\,b\,c)$ e $(b\,x\,c)] \Leftrightarrow [(a\,x\,c)$ e $(a\,b\,x)]$.

Diremo che:

un punto β *di un sottoalbero* Y *di* X *è un punto terminale di* Y *se* $Y - \{\beta\}$ *è connesso (cioè se* β *non è un cut point di* Y*);*
un punto β *di un sottoinsieme chiuso* C *di* X *è un punto terminale di* C *se è un punto terminale del più piccolo sottoalbero di* X *che contiene* C.

Osservazione - Dal Teorema 118, di [8], pag. 81, consegue banalmente che: *ogni sottoinsieme chiuso di* X*, costituito da almeno due punti, è dotato di almeno due punti terminali.*

Diamo ora una caratterizzazione dei punti terminali di un dato sottoinsieme chiuso di X.

Teorema 3.1 - *Se* C *è un sottoinsieme chiuso di* X *e* p *è un punto di* C*, le seguenti proprietà sono equivalenti:*

a_1) *p è un punto terminale di C.*

a_2) *non esistono due punti x e y di $C - \{p\}$ tali che $(x\,p\,y)$.*

Dim. Osserviamo dapprima che, a norma del Teorema 2.3, i punti terminali di C sono tutti e soli i punti terminali di:

$$Y = \bigcup_{a,b \in C} \overset{\frown}{a\;b}\,.$$

$a_1) \Rightarrow a_2)$. Per la $a_1)$, p è un punto terminale di Y. Supponiamo per assurdo che esistano due punti x e y di $C - \{p\}$ tali che $(x\,p\,y)$; in tali ipotesi, essendo $\overset{\frown}{x\;y}$ l'unico arco di Y di estremi x e y, si ha che $Y - \{p\}$ non è connesso. Ma ciò è assurdo in quanto p è un punto terminale di Y.

$a_2) \Rightarrow a_1)$. Supponiamo per assurdo che p non sia un punto terminale di C; allora p non è un punto terminale di Y dunque $Y - \{p\}$ non è connesso.

Conseguentemente p separa almeno due punti, denotiamoli con a e b, di Y. Da cui, per il Teorema 2.4, risulta: $a \neq p \neq b$ e $p \in \overset{\frown}{a\;b}$.

Detti x e y due punti di C tali che $\overset{\frown}{a\;b} \subseteq \overset{\frown}{x\;y}$, si ha: $p \in \overset{\frown}{x\;y}$ e $x \neq p \neq y$, cioè: $x, y \in C - \{p\}$ e $(x\,p\,y)$.

Ma ciò è in contrasto con la $a_2)$. L'asserto è così dimostrato.

Utile per il seguito è la seguente definizione:

qualunque sia la $n-pla$ $(x_1,\dots,x_n)$, $n \geqq 3$, *di punti di X, scriveremo* $(x_1\dots x_n)$ *se* $x_1 = x_i$, *per ogni* $i \in \{2,\dots,n\}$, *oppure, se* $x_1 \neq x_n$, *denotato con g un omeomorfismo di* $[0,1]$ *su* $\widehat{x_1\, x_n}$, *quando risulta:* $g^{-1}(x_1) \leqq g^{-1}(x_2) \leqq \dots \leqq g^{-1}(x_n)$ *oppure* $g^{-1}(x_1) \geqq g^{-1}(x_2) \geqq \dots \geqq g^{-1}(x_n)$.

Concludiamo questo numero con la proposizione seguente, di facile verifica:

PROPOSIZIONE 3.2 - *Qualunque sia la* $n-pla$ $(x_1,\dots,x_n)$, $n \geqq 3$, *di punti di X, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

A) $(x_1\dots x_n)$.

B) $(x_{\sigma(1)}\dots x_{\sigma(u)})$, *per ogni* $u \in \{3,\dots,n\}$ *e per ogni applicazione* σ *strettamente crescente di* $\{1,\dots,u\}$ *in* $\{1,\dots,n\}$.

4. - In questo numero dimostriamo due proposizioni che ci saranno utili nel numero cinque.

TEOREMA 4.1 - *Siano: S uno spazio topologico,* f_1, f_2 *e* f_3 *tre funzioni continue di S in X. L'insieme:*

$$H = \{t \in S : (f_1(t)\, f_2(t)\, f_3(t))\}$$

è chiuso.

Dim. Supponiamo per assurdo che esista un punto t_0 appartenente a FrH tale che $f_2(t_0) \notin \widehat{f_1(t_0)\, f_3(t_0)}$.

Siano I_1, I_2 e I_3 tre intorni connessi (che esistono per il Teorema 159 di [8], pag. 96), risp., di $f_1(t_0)$, $f_2(t_0)$ e $f_3(t_0)$ tali che:

$$(1) \qquad I_2 \cap (I_1 \cup \widehat{f_1(t_0)\, f_3(t_0)} \cup I_3) = \emptyset,$$

a norma della continuità delle funzioni f_1, f_2 e f_3 esiste un intorno I del punto t_0 tale che:

$$f_1(I) \subseteq I_1,\ f_2(I) \subseteq I_2,\ f_3(I) \subseteq I_3.$$

D'altro canto, essendo $t_0 \in FrH$, esiste un punto $t \in I \cap H$ tale che:

$$f_1(t) \in I_1,\ f_2(t) \in I_2,\ f_3(t) \in I_3,$$

conseguentemente, per la (1), si ha che: $f_2(t) \notin \widehat{f_1(t)\, f_3(t)}$; ma ciò è assurdo in quanto $t \in H$.

L'asserto è così dimostrato.

TEOREMA 4.2 - *Qualunque siano le funzioni continue* f_1 *e* f_2 *di X in sé e qualunque sia il punto a di X, l'insieme:*

$$H = \{ t \in X : (f_1(t) \ a \ f_2(t)), \text{ con } f_1(t) \neq a \neq f_2(t) \}$$

è aperto.

Dim. Sia x un punto di H, denotate con C_1 e C_2, risp., le componenti di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ in $X - \{a\}$, a norma della continuità delle funzioni f_1 e f_2 esiste un intorno I di x tale che:

(2) $$f_1(I) \subseteq C_1, \ f_2(I) \subseteq C_2 .$$

D'altro canto, risultando:

$$(x_1 \, a \, x_2), \text{ per ogni } x_1 \in C_1 \text{ e per ogni } x_2 \in C_2 ,$$

per la (2) si ha:

$$(f_1(t) \ a \ f_2(t)), \text{ per ogni } t \in I .$$

L'asserto è così dimostrato.

5. - Prima di passare alla dimostrazione del prossimo teorema, richiamiamo la seguente definizione:

Un punto x di X si dice punto periodico di f di periodo $k > 1$ quando:

$$f^k(x) = x \ e \ f^i(x) \neq x, \text{ per ogni } i \in \{1, \dots, k-1\}.$$

TEOREMA 5.1 - *Se f è una funzione continua di X in sé le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

1) *Esistono $x, y \in X$, con $x \neq y$, ed esistono m e n tali che:*

$$(f^n(y) \ x \, y \, f^m(x)).$$

2) *Esiste $w \in X$, con $w \neq f(w)$, ed esistono r e s, entrambi non nulli, tali che:*

$$(f^s(w) \ w \, f^r(w)).$$

3) *Esiste un punto periodico di f.*

Dim. 1) $\Rightarrow$ 2). Distinguiamo due casi:

i) *Esiste* $w \in \overset{\frown}{x \ f^m(x)} : f^n(w) = x$.

ii) $f^n(t) \neq x$, *per ogni* $t \in \overset{\frown}{x \ f^m(x)}$.

Nel caso i), dalla 1) e dalla Proposizione 3.2 si ha che:

$$(f^n(w) \ w \, f^{m+n}(w)).$$

Inoltre, $f(w) \neq w$; infatti se fosse $w = f(w)$ risulterebbe $x = f^m(x)$, conseguentemente si avrebbe $x = y$, contro le ipotesi.

Nel caso ii) risulta: $x \notin f^n(\overset{\frown}{x\ f^m(x)})$; inoltre è ovvio che:

$$f^n(y) \in f^n(\overset{\frown}{x\ f^m(x)}) \text{ e } f^n(x) \in f^n(\overset{\frown}{x\ f^m(x)}).$$

Denotiamo con C e C' le componenti di $X - \{x\}$ alle quali appartengono, risp., $f^n(y)$ e $f^m(x)$, ovviamente C e C' sono distinte. D'altro canto, essendo $f^n(\overset{\frown}{x\ f^m(x)})$ un connesso al quale appartiene $f^n(y)$, si ha che $f^n(\overset{\frown}{x\ f^m(x)}) \subseteq C$; quindi $f^n(x) \in C$.

Conseguentemente, $f^n(x)$ e $f^m(x)$ appartengono a componenti distinte di $X - \{x\}$, cioè risulta:

$$(f^n(x)\ x\, f^m(x)) \text{ e } f(x) \neq x.$$

L'asserto è così dimostrato.
2) $\Rightarrow$ 3). Distinguiamo due casi:

$$f^s(w) = w \text{ oppure } f^r(w) = w;$$

$$f^s(w) \neq w \neq f^r(w).$$

Nel primo caso l'implicazione è evidente.
Passando al secondo caso supponiamo, tanto per fissare le idee, che s sia maggiore di r e consideriamo l'insieme: $\{w, f(w), \dots, f^s(w)\}$.

Per le ipotesi fatte nella 2) i termini della successione $(f^n(w))_{n \in N}$ non appartengono tutti a una stessa componente di $X - \{w\}$; detta C la componente di $X - \{w\}$ alla quale appartiene $f(w)$, denotiamo con j il più piccolo intero positivo tale che: $f^j(w) \notin C$. Ovviamente risulta:

$$(f^j(w)\ w\, f^i(w)), \text{ per ogni } i \in \{1, \dots, j-1\}.$$

Se $f^j(w) = w$ l'asserto è dimostrato; supponiamo, quindi, $f^j(w) \neq w$ e consideriamo l'insieme:

$$H_1 = \{t \in X - C : \text{ per ogni } i \in \{1, \dots, j-1\},\ (f^j(t)\ t\, w\, f^i(t))\}.$$

Per il Teorema 4.1 H_1 è chiuso.

Ora facciamo vedere che:

(1) $\quad w \neq f^i(t)$, per ogni $t \in H_1$ e per ogni $i \in \{1, \dots, j-1\}$.

Siccome $f^i(w) \in C$, per ogni $i \in \{1, \dots, j-1\}$, si ha che $w \neq f^i(w)$, per ogni $i \in \{1, \dots, j-1\}$; supponiamo per assurdo che esistano un $t \in H_1 - \{w\}$ e un $k \in \{1, \dots, j-1\}$ tali che: $f^k(t) = w$.

Dall'appartenenza di t a $X - C$ e di $f^i(w)$ a C, per ogni $i \in \{1, \dots, j-1\}$ si ha che:

(2) $\quad (t\, w\, f^i(w))$, per ogni $i \in \{1, \dots, j-1\}$.

Conseguentemente, dalla (2) e dall'appartenenza di t a H_1 si ha:

(3) $(f^j(t)\, t\, w\, f^i(w))$, per ogni $i \in \{1, \ldots, j-1\}$.

Infine, essendo $f^k(t) = w$ e quindi $f^j(t) = f^{j-k}(w)$, dalla (3) e dalla Proposizione 3.2, consegue:

$$(f^{j-k}(w)\, w\, f^i(w)), \text{ per ogni } i \in \{1, \ldots, j-1\},$$

e questo è assurdo in quanto $f^i(w) \in C$, per ogni $i \in \{1, \ldots, j-1\}$, e $w \notin C$.

La (1) è così dimostrata.

Adesso facciamo vedere che H_1 è infinito. Siano: per ogni $i \in \{1, \ldots, j-1\}$, I_i un intorno connesso di $f^i(w)$ incluso in C, I_j e I due intorni connessi, risp., di $f^j(w)$ e di w tali che:

$$I_j \cap I = \emptyset \text{ e } f^i(I) \subseteq I_i, \text{ per ogni } i \in \{1, \ldots, j\}.$$

Ovviamente risulta: $I \cap \widehat{f^j(w)\, w} \subseteq H_1$. Quindi H_1 è infinito.

Concludiamo facendo vedere che un punto terminale α di H_1 distinto da w, (la cui esistenza è conseguenza dell'Osservazione del n. 3), è un punto periodico di f di periodo j.

Supponiamo per assurdo che $\alpha \neq f^j(\alpha)$. Essendo $\alpha \in H_1$ si ha:

$$(f^j(\alpha)\, \alpha\, w\, f^i(\alpha)), \text{ per ogni } i \in \{1, \ldots, j-1\},$$

da cui, per la Proposizione 3.2 $(\alpha\, w\, f^i(\alpha))$, per ogni $i \in \{1, \ldots, j-1\}$; inoltre, $\alpha \neq w \neq f^i(\alpha)$, per ogni $i \in \{1, \ldots, j-1\}$, in quanto $\alpha \in H_1 - \{w\}$ e vale la (1).

Allora, per il Teorema 4.2, per ogni $i \in \{1, \ldots, j-1\}$ esiste un intorno J_i *di* α tale che:

$$(t\, w\, f^i(t)), \text{ per ogni } t \in J_i.$$

Inoltre, essendo $f^j(\alpha) \neq \alpha$, esiste un punto p di X tale che:

$$(f^j(\alpha)\, p\, \alpha), \text{ con } f^j(\alpha) \neq p \neq \alpha,$$

e ancora, per il Teorema 4.2, si ha che esiste un intorno J_j di α tale che:

$$(f^j(t)\, p\, t), \text{ per ogni } t \in J_j.$$

Per quanto detto sopra, considerato l'arco $\widehat{p\ \alpha}$, si ha:

(4) $(f^j(t)\, p\, t\, \alpha\, w\, f^i(t))$, per ogni $i \in \{1, \ldots, j-1\}$ e per ogni $t \in \widehat{p\ \alpha} \cap (\bigcap_{i=1}^{j} J_i)$.

Quindi dalla (4) e per la Proposizione 3.2 risulta $t \in H_1$ e

$(t\alpha w)$; ma $w \in H_1$ quindi il punto α, a norma del Teorema 3.1, non è un punto terminale di H_1, contro le ipotesi.

Allora risulta: $\alpha = f^j(\alpha)$; inoltre, essendo $f^i(\alpha) \neq \alpha$, per ogni $i \in \{1, \ldots, j-1\}$, si ha che α è un punto periodico di f di periodo j.
3) $\Rightarrow$ 1). Se z è un punto periodico di f di periodo k, detti x e y due elementi dell'insieme:

$$\{z, f(z), \ldots, f^{k-1}(z)\},$$

esistono m e n tali che $f^m(x) = y$ e $f^n(y) = x$; dunque si ha:

$$(f^n(y)\, x\, y\, f^m(x)).$$

Il Teorema è così completamente dimostrato.

OSSERVAZIONI - Conseguenze immediate del Teorema 5.1 sono:

p1) *Se f è priva di punti periodici allora, qualunque sia $x \in X$, con $x \neq f(x)$, la successione $(f^n(x))_{n \in N}$ è contenuta in un'unica componente di $X - \{x\}$.*

p2) Tenendo presente la dimostrazione dell'implicazione 2) $\Rightarrow$ 3), si può dire che: *se è verificata la* 2) *esiste un punto periodico di f di periodo minore o uguale al massimo tra r e s.*

p3) Dalla dimostrazione dell'implicazione 1) $\Rightarrow$ 2) si deduce che: *se è verificata la* 1) *esiste un punto $\gamma \in X$ tale che $(f^r(\gamma)\, \gamma\, f^r(\gamma))$, con $s > r > 0$ e $s \leq m + n$.*

6. - Consideriamo ora il caso in cui X è una parte di $\mathbf{R}$ che, in quanto sottospazio della retta reale, sia un albero connesso per archi (e cioè il caso in cui X è un intervallo compatto di $\mathbf{R}$). Sussiste allora il Teorema seguente che completa il Teorema 5.1 nel caso considerato:

TEOREMA 6.1 - *Se f è una funzione continua di X in sé le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

a1) *Esistono $x, y \in X$ ed esistono m e n tali che:*

$$f^n(y) \leq x < y \leq f^m(x).$$

a2) *Esiste $w \in X$, con $w \neq f(w)$, ed esistono r e s, entrambi non nulli, tali che:*

$$f^s(w) \leq w \leq f^r(w).$$

a3) *Esiste un punto periodico di f.*

a4) *Esiste un punto periodico di f di periodo due.*

a5) *Esiste $w \in X$ tale che:*

$$f^2(w) \leq w < f(w).$$

a_6) *Esistono* $x, y \in X$ *tali che:*

$$f(y) \leqq x < y \leqq f(x).$$

Dim. Poiché, a norma del Teorema 5.1, le proposizioni a_1), a_2) e a_3) sono equivalenti, e, a norma del Teorema I di [7] o del Teorema 2.1 di [2], lo sono anche le proposizioni a_4) e a_6), basta dimostrare che:

$a_3) \Rightarrow a_4) \Rightarrow a_5) \Rightarrow a_2)$.

$a_3) \Rightarrow a_4)$. Cfr. Teorema (2.2) di [2], equivalenza tra le proprietà 4) e 6).

$a_4) \Rightarrow a_5)$. Detto x un punto periodico di f di periodo due risulta:

(1) $\quad f^2(x) = x < f(x)$ oppure $f^2(x) = x > f(x)$.

Se vale la prima delle (1) la a_5) è verificata ponendo $w = x$; se, invece, vale la seconda delle (1) la a_5) è verificata ponendo $w = f(x)$.

$a_5) \Rightarrow a_2)$. Evidente.

L'asserto e così dimostrato.

Osservazione - Se X è un qualunque albero connesso per archi (sia pure sottospazio di uno spazio euclideo), e f è una funzione continua di X in sé, non è detto che le proposizioni a_3) e a_4), di cui al Teorema 6.1, siano equivalenti.

Ciò può essere provato con l'esempio che conclude questo numero.

Peraltro com'è noto (cfr. [2]), l'equivalenza tra le proposizioni a_3) e a_4) vale, più in generale, per una funzione continua f di un insieme totalmente ordinato S in S, con S completo e denso in sé.

Per un dato spazio topologico S e per una data funzione continua f di S in sé, la questione della implicazione $a_3) \Rightarrow a_4)$ può essere vista nell'ambito della questione dell'esistenza di punti periodici di un dato periodo p come conseguenza dell esistenza di punti periodici di un dato periodo q, in questo ordine di idee, cfr. [1], [3], [5], [6], [7].

Esempio - Qualunque sia l'intero positivo $p > 2$, indichiamo con $O, A_1, A_2, \ldots, A_p$, $p+1$ punti distinti di $\mathbf{R}^h$ e poniamo:

$$Y = \bigcup_{i=1}^{p} \overline{O\,A_i},$$

dove, per ogni $i \in \{1, \ldots, p\}$, con $\overline{O\,A_i}$ indichiamo il segmento di $\mathbf{R}^h$ di estremi O e A_i. Ovviamente Y è un albero.

Ora, consideriamo una funzione continua f di Y in sé tale che:

$$f(O) = O\,, \quad f(\overline{O\ A_i}) = \overline{O\ A_{i+1}}\,, \text{ per ogni } i \in \{1\,, \dots, p-1\},$$

$$f(\overline{O\ A_p}) = \overline{O\ A_1}\,, \quad f^p(x) = x\,, \quad \forall x \in Y.$$

Naturalmente, qualunque sia un punto x di Y distinto da O, si ha che x è un punto periodico di f di periodo p; conseguentemente esistono solo punti periodici di f di periodo p.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. GRIMALDI, *Il teorema di Sarkovskii generalizzato,* tesi di laurea, Facoltà di Scienze, Università degli Studi di Napoli, (1983).

[2] B. MESSANO, *Sulla condizione Fixf = Fixf₂ per una applicazione f di un insieme totalmente ordinato in sé,* Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, Vol. XV (1983), 50-60.

[3] B. MESSANO, *Sull'esistenza di punti periodici di una applicazione di un insieme totalmente ordinato in sé,* Le Matematiche, Vol. XXXV, Fasc. I-II (1980). 287-300, (1983).

[4] T. B. MUNZENBERGER, R. E. SMITHSON, L. E. WARD, Jr., *Characterizations of arboroids and dendritic spaces,* Pacific Journal of Math., Vol. 102, n. 1 (1982), 107-121.

[5] A. N. SARKOVSKII, *Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself,* Ukr. Mat. Z., 16 (1964), 61-71.

[6] P. STEFAN, *A theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphisms of Real Line,* Commun. Math. Phys., 54 (1977), 237-248.

[7] A. VOLČIČ, *Some remarks on a S. C. Chu and R. D. Moyer's theorem,* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 49, (1970), 122-127.

[8] L. E. WARD, jr., *Topology,* Pure and Applied Mathematics (1972).