# CERTAINES PROPRIÉTÉS SUPPLÉMENTAIRES DES HYPERGROUPOÏDES RÉTICULÉS. ÉLÉMENTS PREMIERS ET ÉTRANGERS ENTRE EUX (*)

par KAROLOS SERAFIMIDIS (a Thessaloniki) (**)

SOMMARIO. - *In questo lavoro, che si basa su* [10], *si studiano alcune proprietà supplementari degli elementi relativamente primi e disgiunti degli ipergruppoidi e dei semi-ipergruppi reticolati. Come è noto, gli ipergruppoidi reticolati si includono fra le strutture ipercomposizionali* ([4], [5], [6], [7], [8], [9]) *e costituiscono una generalizzazione dei gruppoidi reticolati della teoria classica* ([1], [2], [3]).

SUMMARY. - *In the present paper, based on reference* [10], *some complementary properties of the relatively prime and disjoint elements of the hypergroupoids and the l-ordered demi-hypergroups are studied. It is well known* ([4], [5], [6], [7], [8], [9]), *that the l-ordered hypergroupoids belong to the hypercomposed structures and they consist in a generalization of the l-ordered groupoids of the classical theory* ([1], [2], [3]).

## § 1. Généralités.

Nous rappelons tout d'abord de [10] les définitions nécéssaires pour ce qui suit :

DÉFINITION (1.1) - On appelle *hypergroupoïde réticulé* une structure $(H, ., \vee, \wedge)$ qui vérifie les axiomes suivants:

---

(*) Pervenuto in Redazione il 14 settembre 1986.

(**) Indirizzo dell'Autore: École Polytéchnique de l'Université Aristote de Thessaloniki - Departement des Sciences Physiques et Mathématiques - Thessaloniki (Grèce).

I. $(H,.)$ est un hypergroupoïde.

II. $(H, \vee, \wedge)$ est un treillis (par rapport à une relation d'ordre $\leq$).

III. Pour tout $x, y \in H$ le produit $x \cdot y$, ou simplement $xy$, est un segment de $H$.

Enfin, quels que soient $x, y, a$ dans $H$

IV. $(x \vee y)\, a \supseteq (xa) \vee (ya)$ et $a(x \vee y) \supseteq (ax) \vee (ay)$.

Si $(H,.)$ est un *demi-hypergroupe,* on a alors un *demi-hypergroupe réticulé.* Si les relations de l'axiome IV sont vérifiées pour l'égalité seulement, c'est-à-dire si pour tout $x, y, a \in H$ *on a*

IV'. $(x \vee y)\, a = (xa) \vee (ya)$ et $a(x \vee y) = (ax) \vee (ay)$

on dit alors que l'on a un *hypergroupoïde strictement réticulé.*

DÉFINITION (1.2) - Un hypergroupoïde réticulé $H$, s'appelle *dual* s'il satisfait en plus à l'axiome suivant:

I. $(x \wedge y)\, a \subseteq (xa) \wedge (ya)$ et $a(x \wedge y) \subseteq (ax) \wedge (ay)$

pour tout $x, y, a \in H$.

Si les relations de cet axiome sont vérifiées pour l'égalité seulement, c'est-à-dire si pour tout $x, y, a \in H$ on a

I'. $(x \wedge y)\, a = (xa) \wedge (ya)$ et $a(x \wedge y) = (ax) \wedge (ay)$

on a alors un *hypergroupoïde* $\wedge$*-strictement réticulé dual.*

Si $H$ est un hypergroupoïde réticulé dual, dont les relations IV' sont vérifiées à la place des relations IV, on dit que l'on a un *hypergroupoïde* $\vee$*-stsrictement réticulé dual* et s'il est en même temps un $\wedge$-strictement réticulé dual, alors on a un *hypergroupoïde strictement réticulé dual.*

On sait que dans un groupoide réticulé, la multiplication est isotone par rapport à la relation d'ordre. La propriété de l'isotonie dans la présente théorie est conséquence de l'axiome IV de la Definition (1.1) et s'exprime comme suit [10]:

PROPOSITION (1.1) - *Dans un hypergroupoïde réticulé $H$ si $x \leqslant y$, alors pour tout $s \in xa$ il existe un élément $t \in ya$ tel que $s \leqslant t$, et pour tout $s' \in ax$ il existe un élément $t' \in ay$ tel que $s' \leqslant t'$.*

D'autre part on démontre facilement que les propriétés exprimées par les axiomes IV et I des Définitions (1.1) et (1.2) respectivement peuvent se généraliser comme suit:

PROPOSITION (1.2) - *Pour tout $a; x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m; z \in H$, où $H$ est un hypergroupoïde réticulé, on a* (1)

(1) $\bigvee\limits_{k=1}^{n} x_k = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$, $\prod\limits_{k=1}^{n} x_k = x_1 x_2 \ldots x_n$

i) $(\bigvee_{k=1}^{n} x_k)\, a \supseteq \bigvee_{k=1}^{n} (x_k a)$

ii) $[(\prod_{k=1}^{n} x_k) \vee z]\, a \supseteq [(\prod_{k=1}^{n} x_k)\, a] \vee (za)$

iii) $[(\prod_{k=1}^{n} x_k) \vee (\prod_{l=1}^{m} y_l)]\, a \supseteq [(\prod_{k=1}^{n} x_k)\, a] \vee [(\prod_{l=1}^{m} y_l)\, a]$.

Dans le cas où $H$ est un hypergroupoïde réticulé dual, alors on a la proposition respective suivante, démontrée de même facilement:

Proposition (1.3) - *Pour tout* $a\,; x_1, \ldots, x_n\,; y_1, \ldots, y_m\,; z \in H$ *on a* [2]

i) $(\bigwedge_{k=1}^{n} x_k)\, a \subseteq \bigwedge_{k=1}^{n} (x_k a)$

ii) $[(\prod_{k=1}^{n} x_k) \wedge z]\, a \subseteq [(\prod_{k=1}^{n} x_k)\, a] \wedge (za)$

iii) $[(\prod_{k=1}^{n} x_k) \wedge (\prod_{l=1}^{m} y_l)]\, a \subseteq [(\prod_{k=1}^{n} x_k)\, a] \wedge [(\prod_{l=1}^{m} y_l)\, a]$.

Les propositions ci-dessous constituent une génération de la Proposition (1.1).

Soit $H$ un hypergroupoïde réticulé.

Proposition (1.4) - *Si* $H_1, H_2 \subseteq H$, *tels que* [3] $H_1 \leqslant H_2$ *et* $a \in H$ *quelconque, alors pour tout* $s \in H_1 a$ *il existe un élément* $t \in H_2 a$ *tel que* $s \leqslant t$.

*Démonstration* - Puisque $H_1 \leqslant H_2$ pour tout $(u, v) \in H_1 \times H_2$ on a $u \leqslant v$. Par conséquent pour tout $w \in ua$ il existe un élément $w' \in va$ tel que $w \leqslant w'$. Soit donc $Y \subseteq va$ l'ensemble des éléments $w'$. Alors pour tout $s \in \bigcup_{u \in H_1} (ua) = (H_1 a)$ il existe un élément

$$t \in \bigcup_{w' \in Y} (w'a) \subseteq \bigcup_{v \in H_2} (va) = H_2 a$$

tel que $s \leqslant t$.

Proposition (1.5) - *Si* $x, y, a, b \in H$ *quelconques et si* $x \leqslant y$, *alors pour tout* $s \in (xa)\, b$ *il existe un élément* $t \in (ya)\, b$ *tel que* $s \leqslant t$.

*Démonstration* - En effet, puisque $x \leqslant y$, pour tout $u \in xa$ il existe un élément $v \in ya$ tel que $u \leqslant v$ (1). Donc pour tout $w \in ub$ il existe un $w' \in vb$ tel que $w \leqslant w'$. Soit $Y \subseteq ya$ l'ensemble des éléments $v$ qui vérifient la relation (1). Alors pour tout $s \in \bigcup_{u \in xa} (ub) = (xa)\, b$ il existe un élément $t \in \bigcup_{v \in Y} (vb) \subseteq (ya)\, b$ tel que $s \leqslant t$.

---

(2) $\bigwedge_{k=1}^{n} x_k = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$.

(3) On note $H_1 \leqslant H_2$, si $h_1 \leqslant h_2$ pour tout $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$.

Des deux propositions précédentes, il est évident d'énoncer les propositions plus générales:

PROPOSITION (1.6) - *Si* $H_1, H_2 \subseteq H$, *où* $H$ *est un hypergroupoïde réticulé,* $H_1 \leqslant H_2$ *et* $a, b \in H$, *alors pour tout* $s \in (H_1 a)\, b$ *il existe un élément* $t \in (H_2 a)\, b$ *tel que* $s \leqslant t$.

Si $H$ est un demi-hypergroupe réticulé on a évidemment les généralisations suivantes:

PROPOSITION (1.7) - *Si* $a_1, \ldots, a_n; x, y \in H$ *et* $x \leqslant y$, *alors pour tout* $s \in xa_1 \ldots a_n$ *il existe un élément* $t \in ya_1 \ldots a_n$ *tel que* $s \leqslant t$.

PROPOSITION (1.8) - *Si* $H_1, H_2 \subseteq H$, $H_1 \leqslant H_2$ *et* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in H$ *quelconques, alors pour tout* $s \in H_1 a_1 \ldots a_n$ *il existe un élément* $t \in H_2 a_1 \ldots a_n$ *tel que* $s \leqslant t$.

Puisque dans un hypergroupoïde réticulé $H$ les produits $ab$ pour $a, b \in H$ sont des segments de $H$, il existe le $\max(ab)$. Donc, si $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sont des éléments d'un demi-hypergroupe réticulé $H$, on a la proposition suivante:

PROPOSITION (1.9) - *Il existe le* $\max(a_1 \ldots a_{n-1} a_n)$ *et on a*

$$\max(a_1 \ldots a_{n-1} a_n) = \max[\max(a_1 \ldots a_{n-1})\, a_n].$$

*Démonstration* - En effet, la proposition est valable pour $k = 2$ et supposons qu'elle est valable pour $k = n - 1$. Si l'on pose $\max(a_1 \ldots a_{n-1}) = M_{n-1}$, il est clair que pour tout $z \in a_1 \ldots a_{n-1}$ on a $z \leqslant M_{n-1}$ et $\max(za_n) \leqslant \max(M_{n-1} a_n)$ [10]. Par conséquent

$$za_n \leqslant \max(za_n) \leqslant \max(M_{n-1} a_n) \text{ et}$$

$$\bigcup_{z \in a_1 \ldots a_{n-1}} (za_n) = a_1 \ldots a_{n-1} a_n \leqslant \max(M_{n-1} a_n). \tag{1}$$

D'autre part, puisque $M_{n-1} \in a_1 \ldots a_{n-1}$ on a $M_{n-1} a_n \subseteq (a_1 \ldots a_{n-1})\, a_n$ et par suite

$$\max(M_{n-1} a_n) \in (a_1 \ldots a_{n-1})\, a_n. \tag{2}$$

D'après les relations (1) et (2) on obtient: $\max(a_1 \ldots a_{n-1} a_n) = \max(M_{n-1} a_n)$, c'est-à-dire que la proposition est aussi valable pour $k = n$.

*Si* $x, y, a \in H$, *où* $H$ *est un hypergroupoïde réticulé, et* $x \leqslant y$, *on a les propositions suivantes:*

PROPOSITION (1.10) - *Les conditions ci-dessous sont équivalentes*

i) $xa \subseteq ya$

ii) $\min(ya) \leqslant \min(xa)$

iii) $(\forall s \in xa)\ (\exists t \in ya)\ [s \geqslant t]$.

*Démonstration* - i)$\Rightarrow$ii). Si $xa \subseteq ya$, on a $\min(xa) \in xa \subseteq ya$. Par conséquent $\min(xa) \in ya$ et $\min(ya) \leqslant \min(xa)$.

ii) $\Rightarrow$ i). Si $\min(ya) \leqslant \min(xa)$, alors pour tout $w \in xa$ on a $\min(ya) \leqslant \min(xa) \leqslant w \leqslant \max(xa) \leqslant \max(ya)$.
Par conséquent $w \in ya$ et alors $xa \subseteq ya$.

ii) $\Rightarrow$ iii). En effeft, si pour $x \leqslant y$ on a $\min(ya) \leqslant \min(xa)$ pour tout $a \in H$, on a alors $t = \min(ya) \leqslant s$ pour tout $s \in xa$.

iii) $\Rightarrow$ ii). Si pour tout $s \in xa$ il existe un élément $t \in ya$ tel que $s \geqslant t$, alors, puisque $\min(xa) \in xa$, il existe un élément $z \in ya$ tel que $\min(xa) \geqslant z \geqslant \min(ya)$.

PROPOSITION (1.11) - *Si* $(xa) \cap (ya) = z$, *alors* $z = \max(xa)$. *En plus*

i) *Si* $\min(xa) \leqslant \min(ya)$, *alors* $z = \min(ya) = \max(xa)$

ii) *Si* $\min(ya) \leqslant \min(xa)$, *alors* $xa = z$.

*Démonstration* - En effet, puisque $z = (xa) \cap (ya)$ on a

$$\min(ya) \leqslant z \leqslant \max(xa) \leqslant \max(ya)$$

d'où il résulte que $\max(xa) \in ya$. Mais puisqu'on a aussi $\max(xa) \in xa$, on a donc $\max(xa) = z$.

i) Maintenant si $\min(xa) \leqslant \min(ya)$, alors

$$\min(xa) \leqslant \min(ya) \leqslant z = \max(xa) \leqslant \max(ya).$$

Par conséquent $\min(ya)$, $\max(xa) \in (xa) \cap (ya)$ et on a donc

$$\min(ya) = \max(xa) = z.$$

ii) Si $\min(ya) \leqslant \min(xa)$, d'après la proposition précédente on a $xa \subseteq ya$, d'où

$$xa = (xa) \cap (ya) = z.$$

PROPOSITION (1.12) - *Si* $\min(ya) = \max(xa) = z$, *alors*

$$(xa) \cap (ya) = z.$$

*Démonstration* - En effet, si $w \in (xa) \cap (ya)$ on a $w \geqslant \min(ya)$ et $w \leqslant \max(xa)$. Mais puisque $\min(ya) = \max(xa)$, *on a*

$$w = \min(ya) = \max(xa) = z.$$

Si au lieu des $xa, ya$ nous prendrons les ensembles $ax, ay$, on obtient des résultats analogues aux précédents.

## § 2. Éléments particuliers éventuels.

Dans ce paragraphe j'étudie les propriétés d'un hypergroupoïde réticulé $H$, qui a un élément neutre e scalaire [4] par rapport à la multiplication et j'étudie aussi quelques propriétés des éléments premiers et étrangers entre eux. Ces éléments sont définis exactement comme dans les groupoïdes réticulés de la théorie classique; c'est-à-dire on dit que deux éléments $a, b \in H$ sont premiers entre eux si $a \vee b = e$ et étrangers entre eux si $a \wedge b = e$.

Si $H$ est un hypergroupoïde réticulé, on a les proposition suivantes :

PROPOSITION (2.1) - *Si $a, b \in H$ sont premiers entre eux, alors*

$$a \wedge v = \max [(ab) \vee (ba)] .$$

*Démonstration* - Puisque $a \vee b = e$, on a $a \wedge b = (a \wedge b)\, e = (a \wedge b)(a \vee b) \supseteq [(a \wedge b) a] \vee [(a \wedge b)\, b]$, c'est-à-dire

$$a \wedge b = [(a \wedge b)\, a] \vee [(a \wedge b)\, b] . \tag{3}$$

Par conséquent pour tout $x \in (a \wedge b)\, a$ et pour tout $y \in (a \wedge b)\, b$ on a $a \wedge b = x \vee y$ et par suite $x, y \leqslant a \wedge b$. De même, puisque $a \wedge b \leqslant a$ on a [Prop. (1.1)] que pour tout $w \in (a \wedge b)\, b$ il existe un élément $c_1 \in ab$ tel que $w \leqslant c_1$, et puisque $a \wedge b \leqslant b$, pour tout $z \in (a \wedge b)\, a$ il existe donc un $c_2 \in ba$ tel que $z \leqslant c_2$.

Mais d'après la relation (3) on a

$$a \wedge b = x \vee y = z \vee w \leqslant c_1 \vee c_2 = c ,$$

où $c = c_1 \vee c_2 \in (ab) \vee (ba)$. D'autre part, puisque $a \vee b = e$ on a $a \leqslant e$, $b \leqslant e$, d'où $ab \leqslant a, b$ et $ba \leqslant a, b$ et, par conséquent, $ab \leqslant a \wedge b$, $ba \leqslant a \wedge b$. Donc $(ab) \vee (ba) \leqslant a \wedge b$ et $a \wedge b \in (ab) \vee (ba)$ et par suite

$$a \wedge b = \max [(ab) \vee (ba)] .$$

Dans le cas où $H$ est commutatif, alors on a évidemment

$$a \wedge b = \max (ab) .$$

PROPOSITION (2.2) - *Si $a, b \in H$ sont premiers entre eux, $c \in H$, $c \leqslant e$ et s'il existe un élément $x \in ac$ tel que $x \leqslant b$, alors $c \leqslant b$.*

*Démonstration* - En effet, puisque $a \vee b = e$, on a $c = ec = (a \vee b)\, c \supseteq (ac) \vee (bc)$, donc $c = (ac) \vee (bc)$.

Par conséquent pour tout $y \in ac$ et pour tout $z \in bc$ on a $c = y \vee z$. Mais, puisque $c \leqslant e$, on a aussi $bc \leqslant b$. Par conséquent $z \leqslant b$ et selon la relation $x \leqslant b$, on obtient

$$c = y \vee z = x \vee z \leqslant b \vee b = b .$$

---

(4) $ea = ae = a$ pour tout $a \in H$.

PROPOSITION (2.3) - *Si $a, b \in H$ sont premiers entre eux et si $a, c \in H$ sont aussi premiers entre eux, alors*

i) $a \vee (bc) = e$

ii) $a \vee (b \wedge c) = e$

iii) $a \wedge (b \wedge c) = \max\{[a(b \wedge c)] \vee [(b \wedge c)\, a]\}$.

*Démonstration* - i) En effet, puisque $a \vee b = e$, $a \vee c = e$, on a $a, b, c \leqslant e$ et par conséquent $bc \leqslant e$, donc

$$a \vee (bc) \leqslant e. \tag{4}$$

D'autre part on a

$$e = (a \vee b)(a \vee c) \supseteq [a(a \vee c)] \vee [b(a \vee c)] \supseteq (aa) \vee (ac) \vee (ba) \vee (bc),$$

c'est-à-dire

$$e = (aa) \vee (ac) \vee (ba) \vee (bc).$$

Mais, puisque $aa \leqslant a$, $ba \leqslant a$, $ca \leqslant a$, on a donc

$$e \leqslant a \vee a \vee a \vee (bc) = a \vee (bc). \tag{5}$$

Par conséquent, d'après les relations (4) et (5), il résulte alors

$$a \vee (bc) = e.$$

ii) D'après les relations $b \leqslant e$, $c \leqslant e$ on obtient $bc \leqslant b$, $bc \leqslant c$, d'où il résulte que $(bc) \wedge (bc) = bc \leqslant b \wedge c \leqslant e$ et par conséquent

$$e = a \vee (bc) \leqslant a \vee (b \wedge c). \tag{6}$$

D'autre part les relations $a \leqslant e$, $b \wedge c \leqslant e$ entraînent la relation

$$a \vee (b \wedge c) \leqslant e \tag{7}$$

et d'après les relations (6) et (7) on obtient le résultat annoncé.

iii) En effet, puisque les éléments $a$ et $b \wedge c$ sont premiers entre eux, selon la Proposition (2.1) on a

$$a \wedge (b \wedge c) = \max\{[a(b \wedge c)] \vee [(b \wedge c)a]\}.$$

PROPOSITION (2.4) - *Si $H$ est un demi-hypergroupe réticulé et si $a, b \in H$ sont premiers entre eux, alors*

$$a^n \vee b^m = e \quad (\textit{où } m, n \in N).$$

*Démonstration* - Selon le i) de la proposition précédente on a $a^2 \vee b = e$, c'est-à-dire tout $x \in a^2$ et $b$ sont premiers entre eux. Par conséquent on a $(xa) \vee b = e$ pour tout $x \in a^2$ et donc

$$e = \bigcup_{x \in a^2} [(xa) \vee b] = [\bigcup_{x \in a^2} (xa)] \vee b = a^3 \vee b$$

ainsi, après $n$ pas, on a

$$a^n \vee b = e$$

et par suite tout $y \in a^n$ est premier à $b$, c'est-à-dire $y \vee b = e$. Donc pour tout $y \in a^n$ on a $y \vee b^2 = e$, d'où

$$e = \bigcup_{y \in a^n} [y \vee b^2] = a^n \vee b^2 .$$

Maintenant puisque $y \vee z = e$ pour tout $y \in a^n$ et pour tout $z \in b^2$, et comme $y \vee b = e$, on a alors

$$y \vee (bz) = e$$

et on obtient ainsi

$$e = \bigcup_{y \in a^n} \{ \bigcup_{z \in b^2} [y \vee (bz)] \} = \bigcup_{y \in a^n} \{ y \vee [ \bigcup_{z \in b^2} (bz) ] \} = a^n \vee b^3 .$$

Ainsi, après $m$ pas, on aboutit finalement à

$$a^n \vee b^m = e .$$

Proposition (2.5) - *Si les éléments* $a_1, a_2, \dots, a_n \in H$ *sont deux à deux premiers entre eux, alors*

i) *Si* $H$ *est un hypergroupoïde réticulé, alors les éléments* $a_1$ *et* $a_2 \wedge a_3 \wedge \dots \wedge a_n$ *sont premiers entre eux.*

ii) *Si* $H$ *est en plus un demi-hypergroupe réticulé commutatif, alors*

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = \max(a_1 a_2 \dots a_n) .$$

*Démonstration* - i) En effet, on a démontré [Prop. (2.3 ii)] que les éléments $a_1$ et $a_2 \wedge a_3$ sont premiers entre eux. On continue par récurrence. On suppose que les éléments $a_1$ et $a_2 \wedge a_3 \wedge \dots \wedge a_{n-1}$ sont premiers entre eux. Et comme les éléments $a_1$ et $a_n$ sont aussi premiers entre eux, on aura donc que

$$a_1 \text{ et } (a_2 \wedge a_3 \wedge \dots \wedge a_{n-1}) \wedge a_n = a_2 \wedge a_3 \wedge \dots \wedge a_n$$

sont premiers entre eux.

ii) Comme on le sait [Prop. (2.1)], si $a_1, a_2 \in H$ sont des éléments premiers entre eux, alors $a_1 \wedge a_2 = \max(a_1 a_2)$. Si l'on suppose maintenant que $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-1} = \max(a_1 a_2 \dots a_{n-1})$ selon le i) de cette proposition et de la Proposition (1.9) on a

$$\begin{aligned} a_1 \wedge (a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \wedge a_n) &= (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-1}) \wedge a_n = \\ &= \max [ (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-1}) a_n ] = \\ &= \max [ \max(a_1 a_2 \dots a_{n-1}) a_n ] = \max(a_1 a_2 \dots a_n) . \end{aligned}$$

Proposition (2.6) - *Si* $H$ *est un hypergroupoïde réticulé, si* $a, b \in H$ *sont des éléments premiers entre eux et si* $x \leqslant e$, *alors*

$$x = (xa) \vee (xb) = (x \wedge a) \vee (x \wedge b).$$

*Démonstration* - En effet, puisque $a \vee b = e$, on a

$$x = xe = x(a \vee b) \supseteq (xa) \vee (xb).$$

Par conséquent $x = (xa) \vee (xb)$. D'autre part, puisque $x, a, b \leqslant e$, on aura $xa \leqslant x \wedge a$, $xb \leqslant x \wedge b$ et par conséquent

$$x = (xa) \vee (xb) \leqslant (x \wedge a) \vee (x \wedge b) \leqslant x \vee x = x$$

ce qui achève la démonstration.

Les propositions ci-dessous se rapportent aux éléments étrangers entre eux d'un hypergroupoïde strictement réticulé dual (5) et sont analogues aux précédents.

Soit donc $H$ un tel hypergroupoïde.

PROPOSITION (2.7) - *Si $a, b$ sont des éléments étrangers entre eux, alors*

$$a \vee b = \min [(ab) \wedge (ba)].$$

*Démonstratiion* - En effet, puisque $a \wedge b = e$, on aura

$$a \vee b = (a \wedge b)(a \vee b) = [a(a \vee b)] \wedge [b(a \vee b)].$$

Par conséquent on a:

$$a \vee b = x \wedge y \text{ pour tout } x \in a(a \vee b) \text{ et pour tout } y \in b(a \vee b) \quad (8)$$

et donc $a \vee b \leqslant x$ et $a \vee b \leqslant y$. De même de la relation $a \leqslant a \vee b$ et du fait que $H$ est un hypergroupoïde strictement réticulé dual, il résulte [10] que pour tout $w \in b(a \vee b)$ il existe un élément $d_1 \in ba$ tel que $w \geqslant d_1$. De même, puisque $b \leqslant a \vee b$, pour tout $z \in a(a \vee b)$ il existe un élément $d_2 \in ab$ tel que $z \geqslant d_2$. Mais selon la relation (8) on a

$$a \vee b = x \wedge y = z \wedge w \geqslant d_1 \wedge d_2 = d \in (ba) \wedge (ab).$$

D'autre part d'aprés les relations $a \geqslant e$, $b \geqslant e$ on obtient respectivement $ab \geqslant b$, $ab \geqslant a$ d'où il résulte [10] que

$$ab = (ab) \vee (ab) \geqslant a \vee b.$$

On a de même que $ba \geqslant a \vee b$ et par conséquent $(ab) \wedge (ba) \geqslant a \vee b$. Donc $a \vee b \in (ab) \wedge (ba)$ et par suite

$$a \vee b = \min [(ab) \wedge (ba)].$$

Dans le cas où $H$ est commutatif on a $a \vee b = \min(ab)$.

PROPOSITION (2.8) - *Soit $a, b, c \in H$. Si $a, b$ sont étrangers entre eux et si $a, c$ sont aussi étrangers entre eux, alors*

(5) On sait [10] que si $H$ est un hypergroupoïde strictement réticulé dual, alors

$$x \leqslant y \Rightarrow (\forall t \in ya)(\exists s \in xa)\,[s \leqslant t], \text{ pour tout } a \in H.$$

i) $a \wedge (bc) = e$

ii) $a \wedge (b \vee c) = e$.

*Démonstration* - i) En effet, puisque $a \wedge b = e$ et $a \wedge c = e$, il est clair que $a \geqslant e$, $b \geqslant e$, $c \geqslant e$, par conséquent $bc \geqslant e$ et, donc,

$$a \wedge (bc) \geqslant e. \tag{9}$$

D'autre part

$$e = (a \wedge b)(a \wedge c) = (aa) \wedge (ac) \wedge (ba) \wedge (bc) \geqslant a \wedge a \wedge a \wedge (bc) =$$
$$= a \wedge (bc) \tag{10}$$

parce que $aa \geqslant a$, $ac \geqslant a$ et $ba \geqslant a$. Ainsi les relations (9) et (10) impliquent alors le résultat annoncé.

ii) D'après les relations $b \geqslant e$, $s \geqslant e$ on obtient $bc \geqslant b$, $bc \geqslant c$ et par conséquent $(bc) \vee (bc) = bc \geqslant b \vee c \geqslant e$.

On a donc

$$e = a \wedge (bc) \geqslant a \wedge (b \vee c). \tag{11}$$

D'autre part, puisque $a \geqslant e$ et $b \vee c \geqslant e$, on a

$$a \wedge (b \vee c) \geqslant e. \tag{12}$$

Il résulte alors, d'après les relations (11) et (12), le résultat final.

PROPOSITION (2.9) - *Si $a, b \in H$ sont des éléments étrangers entre eux, on a alors*

$$a^n \wedge b^m = e \quad (\text{où } n, m \in N).$$

*Démonstration* - Selon le i) de la proposition précédente, puisque les éléments $a, b$ sont étrangers entre eux, on aura $a^2 \wedge b = e$. Par conséquent pour tout $x \in a^2$ on a $(xa) \wedge b = e$ et par suite

$$e = \bigcup_{x \in a^2} [(xa) \wedge b] = [\bigcup_{x \in a^2} (xa)] \wedge b = a^3 \wedge b.$$

Donc après $n$ pas successifs on obtient $a^n \wedge b = e$ et par conséquent on a $x \wedge b^2 = e$ pour tout $x \in a^n$. D'où

$$e = \bigcup_{x \in a^n} (x \wedge b^2) = a^n \wedge b^2.$$

Ainsi, après $m$ pas on obtient finalement $a^n \wedge b^m = e$ pour tout $m \in N$.

PROPOSITION (2.10) - *Si $a, b \in H$ sont des éléments étrangers entre eux, alors tout $x \in H$ tel que $x \geqslant e$ peut se mettre sous la forme suivante:*

$$x = (xa) \wedge (xb) = (x \vee a) \wedge (x \vee b).$$

*Démonstration* - En effet, puisque $a \wedge b = e$, on a

$$x = x(a \wedge b) = (xa) \wedge (xb).$$

D'autre part, puisque $x \geqslant e$, $a \geqslant e$, $b \geqslant e$, on aura $xa \geqslant x \vee a$ et $xb \geqslant x \vee b$ et par conséquent

$$x = (xa) \wedge (xb) \geqslant (x \vee a) \wedge (x \vee b) \geqslant x \vee x = x$$

donc ce qu'il fallait démontrer.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] BIRKHOFF, G., *Lattice-ordered groups.* Annals of Mathematics, vol. 43, n. 2, April 1942.

[2] CONRAD, P. F., *Introduction à la théorie des groupes réticulés.* Paris, Sécrétariat mathématique, 1967.

[3] DUBREIL-JACOTIN, M. L., LESIEUR, L., CROISOT, R., *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques.* Gauthier-Villars, Paris, 1953.

[4] KRASNER, M., *Approximation des corps valués complets de caractéristique $p \neq 0$ par ceux de caractéristique* 0. Actes du colloque d'Algèbre supérieure. C.B.R.M. Bruxelles, 1956.

[5] KRASNER, M., *Théorie de Galois.* Cours de la Faculté des Sciences de l'Université Paris VI, 1967.

[6] KRASNER, M., *Une nouvelle présentation de la théorie des groupes de permutations et ses applications à la théorie de Galois et de produit d'entrelacement («wreath product») de groupes.* Mathematica Balkanica, t. 3, pp. 229-280, Beograd, 1973.

[7] MITTAS, J., *Sur une classe d'hypergroupes commutatifs.* C. R. Acad. Sc., Paris, t. 269, pp. 485-488, 29 septembre 1969, Série A.

[8] MITTAS, J., *Hypergroupes canoniques.* Mathematica Balkanica, t. 2, Beograd, 1972, pp. 165-179.

[9] SERAFIMIDIS, CH., *Hypergroupes canoniques réticulés,* (Thèse de doctorat). École Polytechnique de l'Université Aristote de Thessaloniki. Annexe n. 7 du tome 9. Thessaloniki (Grèce) 1983.

[10] SERAFIMIDIS, CH., *Sur les hypergroupoïdes réticulés.* Bollettino U.M.I. (6) 5-B (1986), 345-357.