SUR LES HYPERGROUPES POLYSYMETRIQUES COMMUTATIFS (*)

par JEAN MITTAS et STAVROS IOULIDIS (à Thessaloniki) (**)

SOMMARIO. - *Si presenta un breve studio di ipergruppi polisimmetrici (risultati dalla considerazione di matrici con elementi tratti da un ipercorpo* [2], [7], [11]*) nel caso commutativo. Si generalizza poi, da un certo punto di vista, il significato di ipergruppo canonico* [6], [10].

SUMMARY. - *We present a brief study of polysymmetrical hypergroups (which resulted from the consideration of matrixes with elements from a hyperfield* [2], [7], [11]*) in the commutative case. Then we generalize, in one certain view, the sense of canonical hypergroup* [6], [10].

1. - Introduction

Dans notre travail [2] nous avons introduit la notion suivante d'un hypergroupe special [4] [5] [6] [10], qui généralise d'un certain point de vue les notions du polygroupe [1] et de l'hypergroupe canonique [6] [10]. C'est la notion de l'*hypergroupe polysymétrique*, dont la définition est comme suit:

Un ensemble H muni d'une hyperopération, notée généralement multiplicativement xy, est appelé *hypergroupe polysymétrique*, si les axiomes suivants sont satisfaits:

(*) Pervenuto in Redazione il 29 ottobre 1984.
(**) Indirizzi degli Autori: J. Mittas: 37, rue Pavlou Mela - Thessaloniki (Grèce); S. Ioulidis: 11, rue Mavrokordatou - Thessaloniki (Grèce).

P_1. $(xy)z = x(yz)$, pour tout $x, y, z \in H$.

P_2. Il existe un $e \in H$ tel que pour tout $x \in H$ on ait $ex = xe = x$ (l'élément e, évidemment unique, est appelé l'*unité* de H).

P_3. Pour tout $x \in H$ il existe un $x' \in H$ au moins tel que $e \in xx' \cap x'x$. Tout tel élément sera appelé *symétrique* ou *inverse* de x et l'ensemble de tels x' sera dit *le symétrique* de x et noté $S(x)$.

De P_3 il résulte immédiatement que pour tout $x, y, z \in H$ on a l'implication

$$z \in xy \Rightarrow (\forall z' \in S(z))\,(\exists\,(x', y') \in S(x) \times S(y))\,[x' \in yz' \wedge y' \in z'x]$$

(Car $(\forall z' \in S(z))\,[e \in (z'x)y \cap x(yz')]$).

P_4. Pour tout $x, z \in H$ et pour tout $x', x'' \in S(x)$ il existe $y_1 \in x'z$ et $y_2 \in zx''$ tels que $z \in xy_1 \cap y_2x$, ce qui entraîne tout de suite que, pour tout $x, z \in H$, il existe $y_1, y_2 \in H$ et $x', x'' \in S(x)$ tels que

$$z \in xy_1 \cap y_2x \Rightarrow (y_1 \in x'z) \text{ et } (y_2 \in zx'')$$

Il vient encore que, en général, quels que soient

$$x, y, z \in H \quad z \in xy \not\Rightarrow (\exists\,(x', y') \in S(x) \times S(y))\,[y \in x'z \vee x \in zy']$$

(comme nous le vérifions encore par l'exemple ci-dessous) et que, par contre,

$$(\forall\,(x, y) \in H^2)\,(\forall\,(x', y') \in S(x) \times S(y))\,(\exists\,(z_1, z_2) \in xy \times xy)$$
$$[y \in x'z_1 \wedge x \in z_2y']$$

[comme il résulte de P_4 pour $x = x'$, $z = y$, $x \in S(x')$, $y_1 = z_1$ et, respectivement, $x = y'$, $z = x$, $y \in S(y')$, $y_2 = z_2$].

Exemple - Comme on le sait [2], l'ensemble $\mathcal{C}_2$ des K-hypermatrices (1) non fortement singulières d'ordre 2 est un hypergroupe polysymétrique. Cet ensemble même $\mathcal{C}_2$ muni de la multiplication $A * B = AB \cap \mathcal{C}_2$, pour tout $A, B \in \mathcal{C}_2$ et où AB est la multiplication habituelle des hypermatrices, a été le point de départ pour l'introduction de l'hypergroupe polysymétrique, dont il est pour le moment le seul exemple pour le cas non commutatif. (Voir encore la remarque ε) ci-dessoous).

Remarques (1.1) - Des axiomes il résulte encore que,

α) H est non vide (puisque il existe $e \in H$).

(1) C'est-à-dire des matrices à éléments dans un hypercorps K [2] [3] [7] [11]. Si A est une K-hypermatrice carrée et det A son déterminant (qui, en général, n'est pas un singleton), A est *régulière*, si $o \notin \det A$, elle est *singulière*, si $o \in \det A$ mais $\det A \neq \{o\}$ et *fortement singulière*, si $\det A = \{o\}$.

β) Evidemment $x \in H \Rightarrow xH \subseteq H$ quel que soit $x \in H$. D'autre part pour tout $y \in H$ et pour tout $x' \in S(x)$ on a $y \in (xx')\, y = x(x'y) \subseteq xH$, donc $H \subseteq xH$ et finalement $xH = H$. On trouve de même que $Hx = H$, donc $xH = Hx = H$, qui, avec P_1, justifie la caracterisation de la structure $(H, .)$ comme hypergroupe. Il en résulte donc que $xy \neq \phi$ quels que soient x, y dans H [4] [6] [9].

γ) Tout hypergroupe polysymétrique est un hypergroupe complétement régulier au sens de Fr. Marty [2] [5].

δ) Pour le symétrique d'un $x \in H$ on a évidemment

i) $S(x) \ni x' \Leftrightarrow x \in S(x')$

ii) $x', x'' \in S(x) \Rightarrow S(x') \cap S(x'') \neq \phi$.

Inversement, quels que soient $x, y \in H$ on a

iii) $S(x) \cap S(y) \neq \phi \Rightarrow (\exists z \in H)[(x \in S(z)) \wedge (y \in S(z))]$

D'autre part $S(x) \cap S(y) \neq \phi$ n'implique pas $S(x) = S(y)$, que sous de conditions (comme on peut le voir dans l'exemple cité ci-dessus en considérant deux hypermatrices $A, B \in \mathcal{C}_2$, $A \neq B$, telles que $S(A) \cap S(B) \neq \phi$ [2]).

iv) $S(e) = e$.

ε) Tout groupe, ainsi que tout polygroupe, est hypergroupe polysymétrique. De même tout hypergroupe canonique est aussi un hypergroupe polysymétrique, même commutatif (comme d'ailleurs tous les groupes abeliens). Tous ces hypergroupes polysymétriques sont *non propres*. Un hypergroupe polysymétrique H sera appelé *propre* s'il existe un $x \in H$ au moins possédant plus qu'un inverse (P. e. l'hypergroupe polysymétrique des hypermatrices $\mathcal{C}_2$ est propre).

2. - Le cas commutatif. Généralités

Dans le présent travail nous nous limiterons à l'étude du cas commutatif comme l'analogue de l'hypergroupe canonique, qui est d'ailleurs nécessaire pour la considération ensuite des structures analogues de celles de l'hyperanneau et de l'hypercorps, dont la partie additive est un hypergroupe polysymétrique commutatif (2).

Pour le cas commutatif nous considérerons l'hyperopération de

(2) Nous notons ici que J. Mittas a étudié encore une autre espèce d'hypergroupe polysymétrique commutatif [8]. Pour éviter la confusion, s'il y a le cas, nous considérerons cet hyperstructure (au sens de Mittas) comme *hypergroupe polysymétrique commutatif de première espèce* et l'hypergroupe polysymétrique commutatif au sens du présent travail comme un tel de *seconde espèce*.

l'hypergroupe polysymétrique H notée additivement $x+y$, son élément neutre e comme o — le *zéro* de H — et les inverses d'un $x \in H$ comme ses *opposés* ou, de même, comme ses *symétriques*. Ainsi les axiomes P_1-P_4 de la définition générale prennent, ayant en vu la commutativité, la forme suivante:

Quels que soient $x, y, z \in H$ on a

I. $x+y=y+x$

II. $(x+y)+z=x+(y+z)$

III. $o+x=x$

IV. Il existe un $x' \in H$ au moins opposé de $x : o \in x+x'$.

Enfin

V. Pour tout $x, z \in H$ et pour tout $x' \in S(x)$ il existe un $y \in z+x'$ au moins tel que $z \in x+y$.

Donc, d'après les conséquences précédentes de P_3 et P_4 dans le cas géneral, on a, quels que soient $x, y, z \in H$,

$$z \in x+y \Rightarrow (\forall z' \in S(z))(\exists y' \in S(y))[y' \in z'+x],$$

tandis que

$$(\forall (x,z) \in H^2)(\exists y \in H)(\exists x' \in S(x))[z \in x+y \Rightarrow y \in z+x'].$$

D'autre part, pour tout $x, y, z \in H$

$$z \in x+y \not\Rightarrow (\exists x' \in S(x))[y \in z+x'],$$

tandis que, par contre,

$$(\forall (x,y) \in H^2)(\forall x' \in S(x))(\exists z \in x+y)[y \in z+x']. \tag{1}$$

Si, donc, $D_{xy} \subseteq x+y$ est l'ensemble de tels $z \in x+y$, on déduit le lemme

LEMME (2.1) - $(\forall (x,y) \in H^2)(\forall z \in D_{xy})(\exists x' \in S(x))[y \in D_{x'z}]$.

[En effet de (1) pour $x=x'$, $y=z$ on a qu'il existe un $y \in z+x'$ tel que $z \in x+y$, donc $y \in D_{x'z}$. Car, comme il est évident, pour montrer qu'un $z \in x+y$ est dans D_{xy} il faut montrer qu'il existe un $x' \in S(x)$ tel que $y \in z+x'$. Dans le cas présent on a $x \in S(x')$].

Les éléments $z \in x+y$ possédant la propriété ci-dessus sont appelés *éléments distingués* de $x+y$ et leur ensemble D_{xy} le *distingué* de $x+y$ (Evidemment on a $D_{xy} \neq \phi$).

La notion de l'ensemble distingué joue un rôle très considérable dans la théorie des hypergroupes polysymétriques, comme on va le voir dans la suite. En effet on a tout abord la proposition:

PROPOSITION (2.1).

i) $(\forall (x,y) \in H^2)(\forall z \in D_{xy})(\exists x' \in S(x))(\forall y' \in S(y))(\exists z' \in S(z))$
$[z' \in x'+y']$

ii) $(\forall (x,y) \in H^2)(\forall z \in D_{xy})(\exists (x',y',z') \in S(x) \times S(y) \times S(z))$
$[z' \in D_{x'y'}]$

DÉMONSTRATION - i) En effet, d'après le Lemme (2.1), pour tout $z \in D_{xy}$ il existe un $x' \in S(x)$ tel que $y \in z + x'$. Donc, pour tout $y' \in S(y)$ on aura $y + y' \subseteq z + x' + y'$ et, par conséquent, $o \in z + (x' + y')$, d'où la conclusion.

ii) De $z \in D_{xy}$ on a $z \in x + y$, donc, pour tout $z' \in S(z)$, on a $z + z' \subseteq z' + x + y$ et, par conséquent, $o \in (z' + x) + y$. Il existe donc un $y' \in S(y)$ tel que $y' \in z' + x$. Donc, en considérant comme $z' \in S(z)$ celui du cas i), on aura un $y' \in S(y)$ convenable pour la relation $y' \in z' + x$, qui implique, selon le lemme, que $z' \in D_{x'y'}$, puisque $x \in S(x')$, où $x' \in S(x)$ est celui du cas i).

COROLLAIRE (2.1) - *Quels que soient x, y dans H et pour tout $z \in D_{xy}$ on a $S(z) \cap [S(x) + S(y)] \neq \phi$, donc, à fortiori,*

$$S(x+y) \cap [S(x) + S(y)] \neq \phi .$$

Evidemment pour tout $x \in H$, $x' \in S(x)$ on a $o \in D_{xx'}$ [Car de (1) ci-dessus et pour $y = x'$ on a $z = o \in x + x'$ et $x' = o + x'$ (donc $x' \in o + x'$)].

Rien n'exclut que pour un $x \in H$ et pour quelque $x' \in S(x)$ d'avoir $D_{xx'} = \{o\}$ [Voir p.e. la proposition (2.5) ci-dessous]. Relativement on a la proposition

PROPOSITION (2.2).

i) $(\forall x \in H)(\forall x' \in S(x))(\forall z \in D_{xx'})(\exists x'' \in S(x))(\exists z' \in S(z)$
$[z' \in x + x'']$

ii) $(\forall x \in H)(\forall x' \in S(x)(\forall z \in D_{xx'})(\exists x'' \in S(x))(\exists z' \in S(z)$
$(\exists x^* \in S(x')\ [z' \in D_{x^*x''}]$.

DÉMONSTRATION - i) En effet $z \in D_{xx'}$ implique, d'après le lemme et pour $y = x'$, qu'il existe un $x'' \in S(x)$ tel que $x' \in D_{x''z} \subseteq x'' + z$, donc $o \in (x + x'') + z$, d'où la conclusion.

ii) On a succesivement, d'après le lemme

$$z \in D_{xx'} \Rightarrow (\exists x'' \in S(x))\ [x' \in D_{x''z}]$$

$$x' \in D_{x''z} \Rightarrow (\exists z' \in S(z))\ [x'' \in D_{x''z}]$$

$$x'' \in D_{x'z'} \Rightarrow (\exists x^* \in S(x'))\ [z' \in D_{x^*x''}]$$

d'où le résultat.

REMARQUES (2.1) - α) Si pour $x \in H$ on a $S(x) = x' = -x$, alors $(\forall z \in D_{x,-x})(\exists z' \in S(z))\ [z' \in x - x]$. Si, donc, pour tout $x \in H$ on a $S(x) = -x$, alors $S(-x) = -(-x) = x$ et de l'axiome V on aura que, pour tout $x, z \in H$, il existe $y \in z - x$ tel que $z \in x + y = y - (-x)$.

De même de (1) on a que $(\forall (x,y) \in H^2)(\exists z \in x+y)\ [y \in z-x]$. En d'autres termes il s'agit d'un cas particulier d'hypergroupe polysymétrique non propre, qui diffère évidemment de l'hypergroupe canonique et qui peut être appelé *hypergroupe presque canonique*. Mais la question de l'existence de tel hypergroupe différent de l'hypergroupe canonique reste ouvert.

β) Il s'ensuit que si l'hypergroupe polysymétrique H est un hypergroupe canonique, alors, pour tout $x, y \in H$, $D_{xy} = x+y$. La réciproque n'est pas vrai, comme on peut le constater par des exemples (Voir plus bas).

γ) Si l'hypergroupe polysymétrique H est un hypergroupe canonique, le Corollaire (2.1) n'exprime que

$$-(x+y) \subseteq -x-y\ [\text{car } D_{xy} = x+y \text{ et } z \in x+y \Rightarrow -z \in -x-y].$$

D'autre part, comme on le sait, dans un hypergroupe canonique on a, même toujours, l'égalité (3) $-(x+y) = -x-y$.

La propriété $S(x+y) \cap [S(x)+S(y)] \neq \phi$ du Corollaire (2.1) peut être généralisée. En effet on a la proposition:

Proposition (2.3) - *Soient $x_1, \ldots, x_n \in H$ quelconques. Alors il existe $z \in x_1 + \ldots + x_n$ et $x'_1 \in S(x_1), \ldots, x'_n \in S(x_n)$, $z' \in S(z)$ convenables de façon que l'on ait $z' \in x'_1 + \ldots + x'_n$. Autrement dit on a*

$$S(x_1 + \ldots + x_n) \cap [S(x_1) + \ldots + S(x_n)] \neq \phi .$$

Démonstration - Par récurrence sur n. La propriété est vrai pour $n = 2$. Soit vrai pour $n \in N$ arbitraire et considérons $x_1, \ldots, x_n$, $x_{n+1} \in H$ quelconques. Alors il existe un $y \in x_1 + \ldots + x_n$ et

$$x'_1 \in S(x_1), \ldots, x'_n \in S(x_n),\ y' \in S(y)$$

convenablement tels que l'on ait $y' \in x'_1 + \ldots + x'_n$. Donc pour cet y considéré et x_{n+1} et d'après la Proposition (2.1) on a que pour tout

(3) J. Mittas a remarqué que cette propriété des hypergroupes canoniques équivaut à l'axiome 5 de leur définition [6] [10].
En effet pour tout $z \in -(x+y)$ on a, en utilisant l'axiome 5: $z \in -(x+y) \Rightarrow -z \in x+y \Rightarrow y \in -z-x$, donc $y-y \subseteq -z-x-y$, d'où $o \in -z+(-x-y)$ et, par conséquent $z \in -x-y$, donc $-(x+y) \subseteq -x-y$. D'autre part, de même par l'axiome 5,

$$z \in -x-y \Rightarrow -y \in z+x \Rightarrow y-y \subseteq z+x+y \Rightarrow o \in z+ \\ +(x+y) \Rightarrow -z \in x+y,$$

donc $-x-y \subseteq -(x+y)$. Par conséquent $-(x+y) = -x-y$.
Inversement cette propriété implique l'axiome 5: En effet

$$z \in x+y \Rightarrow z-z \subseteq x+y-z \Rightarrow o \in y+ \\ +(x-z) \Rightarrow -y \in x-z \Rightarrow y \in -(x-z)$$

et, d'après la propriété en vue, $y \in z-x$, c'est-à-dire l'axiome 5 [12].

$z \in D_{x_{n+1}y}$ il existe $x'_{n+1} \in S(x_{n+1})$ tel que pour tout $y' \in S(y)$, donc pour y' considéré, il existe $z' \in S(z)$ tel que $z' \in x'_{n+1} + y'$, d'où il vient $z' \in x'_1 + \ldots + x'_n + x_{n+1}$.

COROLLAIRE (2.2) - *Si* $x_1 \in D_{y_1 y'_1}, \ldots, x_n \in D_{y_n y'_n}$, *où* $y_1, \ldots, y_n \in H$ *et* $y'_1 \in S(y_1), \ldots, y'_n \in S(y_n)$ *sont quelconques, alors il existe* $z \in x_1 + \ldots + x_n$ *et* $x'_1 \in S(x_1), \ldots, x'_n \in S(x_n)$, $z' \in S(z)$ *convenablement tele que l'on ait* $z' \in x'_1 + \ldots + x'_n$, *avec* $x'_1 \in D_{y^*_1 y''_1}, \ldots, x'_n \in D_{y^*_n y''_n}$, *où*

$$y^*_1 \in S(y'_1), \ldots, y^*_n \in S(y'_n)$$

et $y''_1 \in S(y_1), \ldots, y''_n \in S(y_n)$ [voir proposition (2,2ii)].

EXEMPLES - 1°. Un simple exemple d'hypergroupe polysymétrique commutatif propre résulte à partir d'un ensemble quelconque, ayant trois éléments au moins, H, si on separe un n'importe quel élément $a \in H$ en l'appelant *zéro* et en le répresentant par o, et, en suite, si on considére une partition quelconque de H de la forme

$$H = H_1 \cup \{a\} \cup H_2 = H_- \cup \{o\} \cup H_+ \quad (H_- = H_1, H_+ = H_2).$$

Alors l'hyperopération $x + y$ définie sur H comme suit

$$x + y = \begin{cases} H_+, & \text{si } x, y \in H_+ \\ H_-, & \text{si } x, y \in H_- \\ H, & \text{si } x \in H_+, y \in H_- \text{ ou si } x \in H_-, y \in H_+ \\ x, & \text{si } y = o \\ y, & \text{si } x = o \end{cases}$$

fait H un hypergroupe polysymétrique commutatif propre. La vérification des axiomes se réalise sans difficulté et, évidemment, on a $S(x) = H_-$, si $x \in H_+$, H_+, si $x \in H_-$ et o, si $x = o$. On trouve encore que $D_{xy} = x + y$, pour tout $x, y \in H$.

On voit ainsi que les ensembles numériques totalement ordonnés **Z**, **Q**, **R** (ou, encore, d'autres groupes et, en particulier, anneaux et corps, totalement ordonnés) donnent des hypergroupes polysymétriques commutatifs propres avec comme addition $x + y$ l'hyperopération définie comme ci-dessus à partir de leur partition symétrique. On voit même que la multiplication habituelle sur eux est distributive par rapport à l'addition $x + y$, ce qui, par conséquent, amène à l'introduction évidente des notions analogues de celles de l'hyperanneau et de l'hypercorps (disons-les, pour l'abus de langage, *hyperanneau* et *hypercorps polysymétrique*. Voir à [8] des notions paréilles, ayant comme partie additive des hypergroupes polysymétriques commutatifs de la première espèce).

2°. D'autres exemples d'hypergroupes polysymétriques commutatifs propres on obtient de même par un n'importe quel ensemble H possédant plus que deux éléments, si on considére, comme precédemment, un de ses éléments comme zéro *(o)* et si on définit sul H

une hyperaddition $x+y$ par définition commutative comme suit

$$x+y=\begin{cases} H, & \text{si } o \neq x \neq y \neq o \\ x, & \text{si } x=y, \text{ ou si } y=o. \end{cases}$$

La vérification des axiomes des hypergroupes polysymétriques commutatifs decoule facilement et on a $S(x)=H..\{o,x\}$, si $x\neq o$ et $S(o)=o$. De même on a $D_{xy}=x+y$.

On prend ainsi une infinité d'hypergroupes polysymétriques commutatifs (et, en suite d'hyperanneaux polysymétriques comme ci-dessus) en considérant comme H divers ensembles numériques, en particulier les $\mathbf{N}\cup\{o\}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$.

Remarque (2.2) - De l'exemple 1º ci-dessus il résulte que dans un hypergroupe polysymétrique H peut y avoir d'éléments $x, y\in H$ ayant les mêmes ensembles symétriques, c'est-à-dire $S(x)=S(y)$. Ainsi dans l'exemple en vu on a, pour tout $x, y\in H_+$, $S(x)=S(y)=H_-$ et pour tout $x, y\in H_-$, $S(x)=S(y)=H_+$, tandis que $S(o)=o$. Généralement la relation $S(x)=S(y)$ et une relation d'équivalence dans H, qu'il est naturel d'être appelée *équivalence symétrique* de H, ainsi que sa partition correspondante, *partition symétrique* de H. D'autre part l'exemple 2º montre que l'on peut avoir $S(x)\cap S(y)\neq\phi$ sans être $S(x)=S(y)$.

Soit $(H,+)$ un hypergroupe polysymétrique commutatif.

Proposition (2.4) - *Pour tout* $x, y, z, w\in H$ *tels que*

$$D_{xy}\cap(z+w)\neq\phi$$

il existe $x'\in S(x)$ *tel que pour tout* $y'\in S(y)$ *on ait*

$$(z+x')\cap S(w+y')\neq\phi$$

[et, de même, $S(z+x')\cap(w+y')\neq\phi$], qui généralise l'implication $(x+y)\cap(z+w)\neq\phi\Rightarrow(z-x)\cap(y-w)\neq\phi$ dans les hypergroupes canoniques. *En particulier*

$$x+y=x+z\Rightarrow(\exists x'\in S(x))(\forall y'\in S(y))\,[(x+x')\cap S(z+y')\neq\phi].$$

Démonstration - En effet il existe $u\in D_{xy}$ tel que $u\in z+w$. Donc, d'après la Proposition (2.1) $u\in D_{xy}$ implique que

$$(\exists x'\in S(x))(\forall y'\in S(y))(\exists u'\in S(u))\,[u'\in x'+y'].$$

Par conséquent $o\in u+u'\subseteq z+w+x'=(z+x')+(w+y')$, d'où le résultat.

Remarque (2.3) - De la proposition il résulte que la régle de simplification n'à pas en général lieu dans les hypergroupes polysymétriques. Toutefois si l'opposé considéré de x est tel que $x+x'=o$, alors $x+y=x+z$ implique $y=z$.

Proposition (2.5) - *Si pour $x \in H$ il existe un $x' \in S(x)$ tel que $x + x' = o$, alors x est un scalaire de H et réciproquement.*

Démonstration - Soit, selon l'énonce, $x + x' = o$ et soit une somme $x + y$ et $z \in x + y$. Alors $z + x' \subseteq x' + x + y = y$, donc $z + x' = y$ et, ensuite, $z + x' + x = y + x$. Par conséquent $x + y = z$ et x est bien un scalaire. Réciproquement si x est un scalaire de H, alors $x + x' = o$ [même pour tout $x \in S(x)$].

Corollaire (2.3) - *H est un groupe (forcément abelien) si, et seulement si, pour tout $x \in H$, il existe un opposé $x' \in S(x)$ tel que $x + x' = o$.*

Proposition (2.6) - *Pour tout scalaire $x \in H$ $S(x)$ est un singleton* [et on peut mettre $S(x) = -x$].

Démonstration - En effet, si x est scalaire, et x', $x'' \in S(x)$, alors $x + x' = x + x'' = o$ et, d'après la Remarque (2.3) et la proposition précedente, $x' = x''$, le symétrique $S(x)$ de x est bien un singleton.

Remarque (2.4) - La réciproque n'est pas, en général vrai. P.e. dans les hypergroupes cononiques on a toujours $S(x) = -x$ sans que x soit un scalaire.

Corollaire (2.2) - *Si x est un scalaire, $-x$ l'est aussi.*

Proposition (2.7) - *L'ensemble S des scalaires de H est un groupe abelien.*

Démonstration - En effet pour tout $x, y \in S$ la somme $x + y$ est un singleton. Soit $x + y = z$, lors que l'on a $D_{yx} = z$. Alors [Proposition (2.1)] il existe $z' \in -x - y$, d'où il vient

$$z + z' \subseteq x + y - x - y = (x - x) + (y - y) = o,$$

donc $z + z' = o$ eet, par conséquent $z \in S$. Il s'ensuit que S est une partie stable de H et la restriction de l'hyperopération de H sur S est une opération, évidemment associative et commutative. D'autre part $o \in S$ et, pour tout $x \in S$, $-x \in S$.

Soit maintenant un sous-ensemble X de H tel qu'il contienne en même temps qu'un élément $x \in H$ tout autre élément $y \in H$ tel que $S(x) \cap S(y) \neq \phi$ et soit $\Omega(X)$ l'ensemble des éléments de la réunion de toutes les sommes $D_{x_1 x'_1} + \ldots + D_{x_n x'_n}$, où n est un entier positif arbitraire et où $x_1, \ldots, x_n$ parcourent independamment X et

$$x'_1 \in S(x_1), \ldots, x'_n \in S(x_n)$$

sont quelconques, qui sont tels que pour tout $x \in \Omega(X)$ qu'il existe un $x' \in S(x)$ au moins appartenant à

$$\Omega(X) \text{ [autrement dit } (\forall x \in \Omega(X))\ [S(x) \cap \Omega(X) \neq \phi].$$

Evidemmen, d'après le Corollaire (2.2), pour tout sous-ensemble X

de H satisfaisant à la condition ci-dessus, $\Omega(X)$ n'est pas vide. En particulier, si $X = H$, on va noter $\Omega = \Omega(H)$. Relativement à l'ensemble $\Omega(X)$ on a la proposition:

PROPOSITION (2.8) - *$\Omega(X)$ est un sous-hypergroupe* [4] [6] [9] *de H contenant son zéro.*

DÉMONSTRATION - Évidemment $o \in \Omega(X)$. D'autre part, pour tout $x \in \Omega(X)$, il existe des éléments

$$x_1, \ldots, x_n \in X \text{ et } x'_1 \in S(x_1), \ldots, x'_n \in S)x_n)$$

tels que $x \in D_{x_1x'_1} + \ldots + D_{x_nx'_n}$, donc

$$x + \Omega(X) \subseteq D_{x_1x'_1} + \ldots + D_{x_nx'_n} + \Omega(X) \subseteq \Omega(X).$$

Réciproquement soit $y \in \Omega(X)$ quelconque. Alors il existe $y_1, \ldots, y_m \in X$ et $y'_1 \in S(y_1), \ldots, y'_m \in S(y_m)$ tels que $y \in D_{y_1y'_1} + D_{y_my'_m}$, tandis que, selon les hypothèses pour les ensembles X et $\Omega(X)$ et d'après le Corollaire (2.2), il existe un $x' \in S(x)$, $x''_1 \in S(x_1), \ldots, x''_n \in S(x_n)$ et $x^*_1 \in S(x'_1), \ldots, x^*_n \in S(x'_n)$ [donc $S(x_1) \cap S(x^*_1) \neq \phi$ etc, et, par conséquent, $x^*_1, \ldots, x^*_n \in X$] tel que $x' \in D_{x^*_1x''_1} + \ldots + D_{x^*_nx''_n}$. Donc on aura

aura $y + x' \subseteq D_{y_1y'_1} + \ldots + D_{y_my'_m} + D_{x^*_1x''_1} + \ldots + D_{x^*_nx''_n} \subseteq \Omega(X)$, d'où $y \in x + \Omega(X)$ et, par conséquent, $x + \Omega(X) = \Omega(X)$. Il résulte donc que, pour tout $x \in \Omega(X)$, $x + \Omega(X) = \Omega(X)$ et $\Omega(X)$ est bien un sous-hypergroupe de H.

REMARQUES (2.5) - α) Si l'hypergroupe polysymétrique H est un hypergroupe canonique les conditions pour les ensembles X et $\Omega(X)$ sont superflues.

β) $\Omega(X)$ considéré lui-même est par rapport à l'hyperopération $x + y$ de H [précisement à sa restriction sur $\Omega(X)$] un hypergroupe polysymétrique, dans lequel, pour tout $x \in \Omega(x)$ ses opposés x' sont évidemment dans $S(x) \cap \Omega(X)$ et, si $S_\Omega(x)$ est le symétrique de x dans $\Omega(X)$, on a $S_\Omega(x) = S(x) \cap \Omega(X)$ [en général on n'a pas $S(x) \subseteq \Omega(X)$].

La dernière remarque nous amène à définir:

On appelle *sous-hypergroupe polysymétrique* de H tout sous-hypergroupe h de H s'il est hypergroupe polysymétrique par rapport à l'hyperopération de H, aver le même zéro (donc, en particulier, $o \in h$) et dans lequel pour le symétrique $S_h(x)$ de tout $x \in h$ on a $S_h(x) = S(x) \cap h$.

Mais l'étude detaillée de sous-hypergroupes polysymétriques commutatifs comme ainsi qu'une étude plus étendue sur toute théorie des hypergroupes polysymétriques sera l'objet d'autres travaux. (Voir, en particulier, [12]).

REFERENCES

[1] IOULIDIS, S., *Polygroupes et certaines de leurs propriétés*. Bull. of the Greek Math. Soc., V. 22, pp. 95-104, Athens 1981.

[2] IOULIDIS, S., MITTAS, J., *Sur certaines notions préliminaires de l'hyper-algèbre linéaire - Introduction de l'hypergroupe polysymétrique*. Praktika tés Akadémias Athenòn, a. 1983, t. 58, p. 361-392, Athènes, 1983.

[3] KRASNER, M., *Approximation des corps valués complets de caractéristique* $p \neq 0$ *par ceux de caractéristique* 0. Actes du colloque d'Algèbre supérieure, C.B.R.M., Bruxelles, 1956.

[4] KRASNER, M., *Une nouvelle présentation de la théorie des groupes de permutations et ses applications à la théorie de Galois et de produit d'entrelacement de groupes*. Mathematica Balkanica, t. 3, p. 229-280, Beograd, 1973.

[5] MARTY, FR., *Sur une généralisation de la notion de groupe*. Actes du 8me Congrés des Mathématiciens Scandinaves, p. 45-49, Stockholm, 1934.

[6] MITTAS, J., *Sur une classe d'hypergroupes commutatifs*. C. R. Acad. Sc., Paris, t. 269, p. 485-488, 29 Septembre 1969, Serie A.

[7] MITTAS, J., *Hyperanneaux et certaines de leurs propriétés*. C. R. Acad. Sc., Paris, t. 269, p. 623-626, 13 Octobre 1969, Serie A.

[8] MITTAS, J., *Hypergroupes et hyperanneaux polysymétriques*. C. R. Acad. Sc., Paris, t. 271, p. 920-923, 9 Novembre 1970, Serie A.

[9] MITTAS, J., *Certains hypercorps et hyperanneaux définis à partir de corps et anneaux ordonnés*. Bull. Math. de la Soc. Math. de la R. S. de Roumanie, T. 15 (63), n. 3, 1971.

[10] MITTAS, J., *Hypergroupes canoniques*. Mathematica Balkanica, t. 2, Beograd, 1972.

[11] MITTAS, J., *Sur les hyperanneaux et les hypercorps*. Mathematica Balkanica, t. 3, Beograd, 1973.

[12] MITTAS, J., *Hypergroupes polysymétriques canoniques*. Convegno su Ipergruppi, altre strutture multivoche e loro applicazioni, Editor: P. Corsini, Udine, 15-18 ottobre 1985.