EQUATION DE YAMABE SUR UN OUVERT NON CONTRACTILE (*)

par A. BAHRI et J. M. CORON (**)

SOMMARIO. - *Sia Ω un aperto limitato regolare di* $\mathbf{R}^3$. *Si dimostra che se Ω è connesso, ma non contrattile, allora l'equazione $\Delta u + u^5 = 0$ in Ω, $u > 0$ in Ω e $u = 0$ su $\partial\Omega$, ha almeno una soluzione.*

SUMMARY. - *Let Ω be a bounded open regular set in* $\mathbf{R}^3$. *We prove that if Ω is connected but not contractible, then the equation $\Delta u + u^5 = 0$ in Ω, $u > 0$ in Ω and $u = 0$ on $\partial\Omega$, has at least a solution.*

1. Introduction

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^3$ borné régulier et connexe. On s'intéresse à l'équation suivante

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta u + u^5 = 0 \\ \qquad u > 0 \\ \qquad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

On a:

THÉORÈME 1 - *Si Ω n'est pas contractile,* (1) *a au moins une solution.*

(*) Conferenza tenuta al «Meeting on *Variational Methods in Differential Problems*» (Trieste, 26-28 settembre 1985).

(**) Indirizzo degli Autori: Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique - F 91128 Palaiseau Cedex - France.

Le but de cet exposé est de donner un aperçu de la démonstration du théorème 1 (voir [4] pour la démonstration complète). Ce résultat a été annoncé dans [3]. Soit

$$\Sigma = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid |u| = 1\} \text{ où } |u| = (\int |\nabla u|^2 dx)^{1/2}$$

$$\Sigma_+ = \{u \in \Sigma \mid u \geqslant 0\}$$

$$J(u) = \frac{1}{(\int u^6 dx)^{1/2}}.$$

Un point critique de J dans Σ_+ donne une solution à (1). Σ_+ est invariant par le flot associé à $-J'$. On suppose dans la suite que (1) n'a pas de solution.

La fonctionelle J ne satisfait pas à la condition de Palais-Smale, mais les suites qui violent cette condition sont parfaitement connues. Pour les décrire on introduit

$$\delta(a, \lambda) = \frac{C\sqrt{\lambda}}{(1 + \lambda^2 |x - a|^2)^{1/2}}, \quad a \in \mathbf{R}^3, \ \lambda \in]0, \infty[,$$

$C > 0$ étant tel que $\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla \delta(a, \lambda)|^2 = 1$ (C est indépendant de a et de λ). De plus pour $\varepsilon > 0$ et p entier, on note $V(p, \varepsilon)$ l'ensemble des fonctions de Σ telles que

$$\exists (a_1, \ldots, a_p) \in \Omega^p, \ \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in]0, +\infty[^p$$

tels que

$$\|u - \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{i=1}^{p} \delta(a_i, \lambda_i)\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \varepsilon$$

$$\lambda_i \geqslant \varepsilon^{-1} \quad \forall i$$

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_i} + |a_i - a_j|^2 \lambda_i \lambda_j \geqslant \varepsilon^{-1} \quad \forall i \neq j$$

$$d(a_i, \partial\Omega) \geqslant \varepsilon^{-1} \quad \forall i.$$

On a:

PROPOSITION 1 - *Soit u_n une suite de Σ_+ telle que $J'(u_n) \to 0$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $J(u_n)$ est une suite bornée. Alors, quitte à extraite une sous-suite, il existe un entier p et une suite $(\varepsilon_n)_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$ tels que*

$$u_n \in V(p, \varepsilon_n) \quad \forall n.$$

Les pionniers pour cette proposition sont Sacks et Uhlenbeck [11] et Wente [16]. Pour démontrer la proposition 1 il suffit d'utiliser les méthodes de [5], [8], [13], [14], [15].

Soit $S = \dfrac{1}{(\int_{\mathbf{R}^3} \delta^6(a, \lambda)\, dx)^{1/6}}$; S est indépendant de a et λ.

Un calcul facile montre que si $u_n \in V(p, \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \to 0$, alors $J(u_n) \to pS$. Il résulte donc de la proposition 1 que les changements de topologie des ensembles de niveau $J_+^c = \{u \mid u \in \Sigma_+ \, J(u) \leqslant c\}$ ne peuvent se produire qu'à la traversée des niveaux pS, p entier $\geqslant 2$.

L'objet du paragraphe suivant est de calculer le changement de topologie à la traversée du niveau pS. L'essentiel de ce calcul est contenu dans [2] où en particulier on voit apparaître la matrice M (voir ci-dessous). L'idée de faire ce calcul vient de [1].

2. Le changement de topologie

Nous commençons par quelques définitions.

Pour $x \in \Omega$ on considère la fonction $y \to H(x, y)$ sur Ω définie par:

$$\Delta_y H(x, y) = 0 \text{ dans } \Omega$$

et

$$H(x, y) = \frac{1}{|x - y|} \text{ sur } \partial\Omega .$$

On pose

$$G(x, y) = \frac{1}{|x - y|} - H(x, y)$$

G est la fonction de Green, H sa partie régulière.

Pour $a = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in \Omega^p$, on définit la matrice $M(a) \in \mathbf{R}^{p^2}$ par:

$$M_{ij}(a) = -G(a_i, a_j) \text{ si } i \neq j$$

$$M_{ii}(a) = H(a_i, a_i) .$$

On note $\rho(a)$ la plus petite valeur propre de $M(a)$ en convenant que $\rho(a) = -\infty$ si pour un couple (i, j) avec $i \neq j$ on a $a_i = a_j$. Soit

$$\Delta_{p-1} = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in [0, 1]^p \mid \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1\}$$

$$W_p^+ = \{u \in \Sigma_+ \mid J(u) \leqslant pS + \frac{S}{2}\}$$

$$C_p = \{a \in \Omega^p \mid \rho(a) \geqslant 0\}$$

$$\partial C_p = \{a \in \Omega^p \mid \rho(a) = 0\}$$

$$I_p = \{a \in \Omega^p \mid \rho(a) \leqslant 0\} .$$

On note σ_p le groupe symétrique d'ordre p. Ce groupe opère naturellement sur les espaces $\Omega^p \times \Delta_{p-1}$ et $\Omega^p \times \partial\Delta_{p-1} \cup I_p \times \Delta_{p-1}$. Les quotiens de ces espaces par l'action de σ_p sont notés respectivement

$\Omega^p \underset{\sigma_p}{\times} \Delta_{p-1}$ et $\Omega^p \underset{\sigma_p}{\times} \partial\Delta_{p-1} \cup I_p \times \Delta_{p-1}$. Le changement de topologie à la traversée du niveau pS quand $\{\rho = 0\} \cap \{\rho' = 0\} = \phi$ est donné par le théorème suivant:

THÉORÈME 2 - *Si ρ n'a pas de point critique sur ∂C_p, alors W_p^+ / W_{p-1}^+ est homotopiquement équivalent à*

$$\Omega^p \underset{\sigma_p}{\times} \Delta_{p-1} / \Omega^p \underset{\sigma_p}{\times} \partial\Delta_{p-1} \cup I_p \times \Delta_{p-1}.$$

REMARQUE 1 -

a. Quand Ω est étoilé, Pohozaev [10] a montré que (1) n'a pas de solution.

D'où la question: que se passe-t-il alors pour W_p^+ / W_{p-1}^+? On peut montrer que pour Ω étoilé, ρ n'a pas de point critique sur ∂C_p et que ∂C_p est un rétracte par déformation équivariante (pour l'action de σ_p) de C_p. Du théorème 2, on déduit que W_p^+ / W_{p-1}^+ est contractile. Le fait que ∂C_p est un rétracte par déformation équivariante de C_p se démontre de la façon suivante:

Supposons Ω étoilé par rapport à l'origine. Soient x et y deux points de Ω et $t \in [0,1[$. On montre facilement que

$$t H(tx, ty) < H(x, y)$$

$$t G(tx, ty) > G(x, y) \quad \text{si } x \neq y.$$

On en déduit que

$$\rho(ta) < \rho(a) \quad \text{si } \rho(a) \neq -\infty.$$

Mais

$$\lim_{t \to 0} \rho(ta) = -\infty$$

et donc C_p se rétracte de façon équivariante sur ∂C_p.

b. Par contre, quand Ω est un anneau, il a été remarqué depuis longtemps (voir [7]) que (1) a au moins une solution.

Nous allons maintenant donner quelques idées pour la démonstration du théorème 2.

Soit η un réel strictement positif; η sera petit (la petitesse ne dépendant que de p). Bien que Σ_+ soit invariant par le flot descendant associé à J, nous ne travaillerons pas, pour des raisons techniques, avec Σ_+ mais avec

$$\Sigma_\eta = \{u \in \Sigma \mid |u^-| \leqslant \eta\}$$

où $u^- = \mathrm{Max}(-u, 0)$. Cela n'est pas trop ennuyeux pour les raisons suivantes (où l'on suppose que η est assez petit, la petitesse ne dépendant que de p):

1°) La proposition 1 reste vraie si on remplace l'hypothèse $u_n \in \Sigma_+$ par $u_n \in \Sigma_\eta$ et $J(u_n) \to c$ avec $c \in](p-1)S, (p+1)S[$.

2°) $\Sigma_\eta \cap J^{(p+(1/2))S}$ est invariant par le flot descendant associé à J et un point critique de J dans Σ_η est nécessairement dans Σ_+.

3°) Soit $J^c_\eta = \{u \in \Sigma_\eta \mid J(u) \leqslant c\}$ et soit $c_1 \leqslant c_2 \leqslant (p+1)S$, $(J^{c_2}_+, J^{c_1}_+)$ est un rétracte par déformation de $(J^{c_2}_\eta, J^{c_1}_\eta)$.
En particulier si $W^\eta_p = \{u \in \Sigma_\eta \mid J(u) \leqslant (p + ½)S\}$, la paire (W^η_{p+1}, W^η_p) se rétracte par déformation sur la paire (W^+_{p+1}, W^+_p).

Pour construire la rétraction par déformation, il suffit de remarquer que

$$J\left(\frac{u+tu^-}{|u+tu^-|}\right) < J(u) \quad \forall u \in J^{(p+1)S}_\eta,\ u^- \neq 0,\ t \in]0,1].$$

Dans la suite, nous supposerons toujours η fixé assez petit et pour alléger les notations, nous écrirons J^c pour J^c_η, W_p pour W^η_p.

Utilisant le flot associé à $-J'$ on peut montrer que la paire $(J^{(p+(1/2))S}, J^{pS})$ se rétracte par déformation sur la paire

$$(J^{(p+(1/2))S}, J^{(p-(1/2))S})$$

et donc W^+_p / W^+_{p-1}, qui est d'après 3) homotopiquement équivalent à W_p / W_{p-1}, est homotopiquement équivalent à W_p / J^{pS}.

La première étape, très classique (voir [9] par exemple), consiste à localiser le changement de topologie.

Pour cela, soient θ et $\bar\varepsilon$ deux réels positifs. On commence par fixer d'abord θ, assez grand, $\bar\varepsilon$ est ensuite choisi très petit de façon que tout ce qui suit marche.

Soit $\mu \in C^\infty([0,+\infty[;\mathbf{R}^+)$ avec $\mu(0) = \bar\varepsilon$, $-\dfrac{2}{\theta} \leqslant \mu' \leqslant 0$ et

$\mu(r) = 0$ pour $r \geqslant \theta\bar\varepsilon$.

Soit $F(u) = J(u) - \mu(|J'(u)|^2)$.

On pose

$$F^c = \{u \in \Sigma_\eta \mid F(u) \leqslant c\}.$$

On vérifie alors facilement que:

i) $F^{(p+(1/2))S} = J^{(p+(1/2))S}$.

ii) F n'a pas de point critique dans $\Sigma_\eta{}^{(p+(1/2))S}$ et satisfait $(PS)_c$ pour $c \in]pS - \bar\varepsilon, (p + ½)S]$.

iii) $J^{(p+(1/2))S}$ est stable par le flot associé à $-F'$.

Soit $A = F^{pS} \setminus J^{pS}$.

De i), ii), iii) on déduit que la paire $(J^{(p+(1/2))S}, J^{pS})$ se rétracte par déformation sur la paire $(J^{pS} \cup A, J^{pS})$.

Notons que $\forall \varepsilon$, $\exists \varepsilon_1 > 0$ tel que

$$\bar{\varepsilon} < \varepsilon_1 \Rightarrow A \subset V(p, \varepsilon).$$

L'étape suivante est d'essayer de fabriquer dans $V(p, \varepsilon)$ des déformations qui font décroître J. Pour cela il est intéressant d'avoir une paramétrisation de $V(p, \varepsilon)$. Soit

$$\delta(a_i, \lambda_i) = P(\delta(a_i, \lambda_i)),$$

où P est la projection sur $H_0^1(\Omega)$ (i.e. $Pu = u - h$ avec $\Delta h = 0$ dans Ω, $h = u$ sur $\partial\Omega$). On a alors la

PROPOSITION 2 - *$\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall u \in V(p, \varepsilon)$ le problème*

$$\min_{\substack{(\alpha_i) \in \mathbf{R}^p \\ (x_i) \in \Omega^p \\ (\lambda_i) \in (0, \infty)^p}} |u - \Sigma \alpha_i \delta(x_i, \lambda_i)|$$

a une solution unique.

NOTATION. On notera

$$\alpha(u) = (\alpha_1(u), \ldots, \alpha_p(u)), \ x(u) = (x_1(u), \ldots, x_p(u)),$$

$\lambda(u) = (\lambda_1(u), \ldots, \lambda_p(u))$ cette solution.

Pour la suite nous convenons d'étendre J à $H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ par

$$J(u) = \frac{|u|^3}{(\int u^6 \, dx)^{1/2}}.$$

u étant donné dans $V(p, \varepsilon)$, on note $E(u)$ l'orthogonal dans $H_0^1(\Omega)$ de l'espace engendré par les 5 p fonctions

$$\delta_i, \frac{\partial \delta_i}{\partial \lambda_i}, \frac{\partial \delta_i}{\partial_{x_i} j}, 1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant 3, \text{ où } (x, \alpha, \lambda) = (x(u), \alpha(u), \lambda(u)).$$

La première déformation est fournie par la proposition suivante:

PROPOSITION 3 - *$\exists r > 0, \nu > 0, \varepsilon_1 > 0$ tels que:*

$$J''(u+v)(h,h) \geqslant \nu |h|^2 \quad \forall u \in V(p, \varepsilon_1) \quad \forall v \in E(u) \text{ avec } |v| \leqslant r$$
$$J'(u+v) \cdot v \geqslant \nu |v|^2 \quad \forall u \in V(p, \varepsilon_1) \quad \forall v \in E(u) \text{ avec } |v| = r$$
$$\forall h \in E(u).$$

REMARQUE 2 - On peut prendre pour ν tout nombre $< 4/7$ et r peut être pris arbitrairement petit (quitte à diminuer ε_1).

La proposition 3 nous montre que pour tout $u \in V(p, \varepsilon_1)$

$$\min_{\substack{v \in E(u) \\ |v| \leqslant r}} J(u+v)$$

est atteint en un v unique (un v «optimal») qui vérifie en fait $|v| < r$ et que de plus la projection de $-J'(u)$ sur $E(u)$ est un pseudo-gradient pour J qui permet de définir une déformation faisant décroître J qui nous transporte jusqu'au v optimal. On note $v(u)$ le v optimal dans $E(u)$.

Soit $\tilde{V}(p, \varepsilon)$ l'ensemble des $(x, \alpha, \lambda) \in \Omega^p \times (0, \infty)^p \times (0, \infty)^p / \sigma_p$ tels que:

$$\left|\alpha_i - \frac{1}{\sqrt{p}}\right| \leqslant \varepsilon \qquad \forall i$$

$$\lambda_j\, d(x_i, \partial\Omega) \geqslant \varepsilon^{-1} \qquad \forall i$$

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_i} + \lambda_i \lambda_j |x_i - x_j|^2 \geqslant \varepsilon^{-1} \qquad \forall i \ \forall j \text{ avec } i \neq j.$$

Soit φ la fonctionnelle définie sur $V(p, \varepsilon)$ par

$$\varphi(x, \alpha, \lambda) = J\Big(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \delta_i(x_i, \lambda_i) + v\Big(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \delta_i(x_i, \lambda_i)\Big)\Big) - pS.$$

Alors que J est définie sur un espace de dimension infinie, φ est définie sur une variété de dimension finie. C'est un progrès. On recherche maintenant des transformations qui font décroître φ. Pour cela il faut estimer $\nabla\varphi$. Les calculs sont longs. Pour expliquer comment intervient C_p on peut faire un développement de φ (bien sûr insuffisant car c'est $\nabla\varphi$ qui est intéressant et non φ) dans le cas simple suivant: les points sont «loin» les uns des autres. On trouve

$$\varphi \simeq S \frac{\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2\right)^{3/2}}{\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^6\right)^{1/2}} + c_0 \sum_{(i,j)} M_{ij}(x) \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} - pS = \tilde{\varphi}_1, \tag{2}$$

où c_0 est une constante positive.

En utilisant le fait que $H(x_i, x_i) > 0$ et $G(x_i, x_j) > 0$, on voit facilement que le noyau de $M(x) - \rho(x)\, Id$ est de dimension 1 et qu'il existe un unique vecteur $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_p(x))$ dans le noyau $M(x) - \rho(x)\, Id$ de norme 1 tel que

$$\nu_i(x) > 0 \ , \ \forall i .$$

On pose

$$\lambda^*(x) = (\lambda^*_1(x), \ldots, \lambda^*_p(x)) = \left(\frac{1}{\nu_1(x)^2}, \ldots, \frac{1}{\nu_p(x)^2}\right).$$

Puis, pour $(x, \alpha, \lambda) \in \tilde{V}(p, \varepsilon)$, on définit (pour $t \in [0,1]$)

$$\lambda(t) = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_p(t)) \text{ avec}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_i(t)}} = r(t)\left(t\,(\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_j})^{1/2} \nu_i(x) + (1-t)\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\right)$$

$r(t)$ étant tel que $\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i(t)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i}$.

Cette transformation fait décroître $\tilde{\varphi}_1$, i.e.:

$$\tilde{\varphi}_1(\alpha, x, \lambda(t)) \leqslant \tilde{\varphi}_1(\alpha, x, \lambda(t')) \text{ si } 0 \leqslant t' \leqslant t \leqslant 1 .$$

On peut montrer qu'il en est de même pour φ (avec un λ^* bien sûr un peu modifié-utiliser le théorème des fonctions implicites). D'une certaine façon on peut dire que l'on a fait une rétraction par déformation sur la direction de déconcentration optimale (i.e. celle qui minimise $\tilde{\varphi}_1$ à $\Sigma \frac{1}{\lambda_i}$, α et x fixés). On a:

$$\tilde{\varphi}_1(\alpha, x, \theta\lambda^*) = \frac{(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2)^{3/2}}{(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^6)^{1/2}} S + c_0 \frac{\rho(x)}{\theta} . \tag{3}$$

Dans le cas général de points non nécessairement loin les uns des autres, on a:

$$\varphi \simeq -pS + S\frac{(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2)^{3/2}}{(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^6)^{1/2}} + c_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{H(x_i, x_i)}{\lambda_i} - c_0 \sum_{i \neq j} \varepsilon_{ij} = \varphi_1$$

où

$$\varepsilon_{ij} = \left\{\frac{\lambda_i}{\lambda_j} + \frac{\lambda_i}{\lambda_j} + \frac{\lambda_i \lambda_j}{G^2(x_i, x_j)}\right\}^{-1/2}.$$

On peut injecter $\Omega^p \underset{\sigma_p}{\times} \Delta_{p-1}$ dans $\Omega^p \times [0, \infty)^p \times (0, \infty)^p / \sigma_p$ en associant à (x, α), $(x, \alpha, \theta(x)\, \lambda^*(x))$ où $\theta(x)$ est positif grand (de sorte que tout ce qui suit marche). Dans la suite, on écrira donc (x, α) pour $(x, \alpha, \theta(x)\, \lambda^*(x))$.

Si $x \in I_p$ $\qquad \varphi_1(x, \alpha) \leqslant 0 \quad \forall \alpha \in \Delta_{p-1}$

si $x \notin I_p$ $\qquad \{\alpha / \varphi_1(x, \alpha) > 0\}$ est homéomorphe à

$$\overset{\circ}{\Delta}_{p-1} = \{\alpha \in \Delta_{p-1} \mid \alpha_i \neq 0 \quad \forall i \in [1, p]\}.$$

Ceci permet de définir une injection de

$$\Omega^p \underset{\sigma_p}{\times} \Delta_{p-1} / \Omega^p \times \partial \Delta_{p-1} \underset{\sigma_p}{\cup} I_p \times \Delta_{p-1} \text{ dans } \{\varphi_1 \leqslant \varepsilon\} / \{\varphi_1 \leqslant 0\}.$$

On peut à l'aide de cette injection considérer

$$\Omega^p \underset{\sigma_p}{\times} \Delta_{p-1} / \Omega^p \times \partial \Delta_{p-1} \underset{\sigma_p}{\cup} I_p \times \Delta_{p-1}$$

comme un sous-ensemble de $\{\varphi_1 \leqslant \varepsilon\} / \{\varphi_1 \leqslant 0\}$. Il est ensuite possible de montrer que $\{\varphi_1 \leqslant \varepsilon\} / \{\varphi_1 \leqslant 0\}$ se rétracte par déformation sur ce sous-ensemble.

REMARQUE 3 - Toujours avec l'identification de $\Omega^p \underset{\sigma_p}{\times} \Delta_{p-1}$ à un sous-ensemble de $(\Omega^p \times [0, \infty]^p \times]0, \alpha[^p) / \sigma_p$ on a:

$$\Omega^p \times \partial \Delta_{p-1} \underset{\sigma_p}{\cup} I_p \times \Delta_{p-1} \subset \{\varphi_1 \leqslant 0\}.$$

Ce qui a été fait pour φ_1 s'adapte pour φ si ρ n'a pas de point critique sur $\{x \mid \rho(x) = 0\}$ (utiliser le théorème des fonctions implicites... et faire des calculs). Noter aussi que

$$\Omega^p \underset{\sigma_p}{\times} \Delta_{p-1} / \Omega^p \times \partial \Delta_{p-1} \underset{\sigma_p}{\cup} I_p \times \Delta_{p-1}$$

est inclus dans $A \cup J^{pS} / J^{pS}$. On a ainsi le théorème 2.

REMARQUE 4 - Comme dans la résolution de la conjecture de Yamabe par Schoen [12], on voit l'importance de la fonction de Green.

3. La fin de la démonstration du théorème 1

1) *Plan.* On va montrer

en 2), il existe un entier p_0 (dépendant de Ω) tel que pour tout p supérieur à p_0, ∂C_p est un rétracte par déformation équivariante de C_p et ρ n'a pas de point critique sur ∂C_p. Donc, en utilisant le théorème 2, W_p / W_{p-1} est contractile pour p assez grand;

en 3), on montrera par récurrence sur p que W_p / W_{p-1} n'est jamais contractile. D'où la contradiction et donc la démonstration du théorème 1.

2) L'objet de cette section est de donner une idée de la démonstration de la

PROPOSITION 3 - *Pour p assez grand, ∂C_p est un rétracte par déformation équivariante de C_p et ρ n'a pas de point critique sur ∂C_p.*

Idée de la démonstration. Soit, pour $x \in \partial\Omega$, $n(x)$ la normale intérieure de Ω au point x. On étend n à un voisinage de $\partial\Omega$ par

$$n(x) = n(a)\,,$$

où a est le point de $\partial\Omega$ tel que $|a - x| = d(x, \partial\Omega)$.

On notera, si Φ est une fonction sur $\Omega \times \Omega$, $\nabla_1 \Phi$ le gradient de Φ par rapport à la première variable.

On a:

LEMME 1 - *Il existe $r_0 > 0$ et $c > 0$ tels que:*

(4) $((x, y) \in C_2 \text{ et } d(x, \partial\Omega) \leqslant d(y, \partial\Omega) \leqslant r_0) \Rightarrow \nabla_1 G(x, y) \cdot n(x) \geqslant 0$

(5) $$d(x, \partial\Omega) \leqslant r_0 \Rightarrow \nabla_1 H(x, x) \cdot n(x) \leqslant -\frac{c}{d(x, \partial\Omega)^2}\,.$$

La démonstration de (5) est facile. Pour démontrer (4), on montre d'abord que

(6) $\exists C > 0$, $\exists c > 0$ tels que $\forall x \in \Omega$, $\forall y \in \Omega$,

$$\frac{c\, d(x, \partial\Omega)\, d(y, \partial\Omega)}{|x - y|(|x - y|^2 + d(x, \partial\Omega)^2 + d(y, \partial\Omega)^2)} \leqslant G(x, y) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C\, d(x, \partial\Omega)\, d(y, \partial\Omega)}{|x - y|(|x - y|^2 + d(x, \partial\Omega)^2 + d(y, \partial\Omega)^2)}\,;$$

(7) $\exists C > 0$ tel que

$$|\nabla_1^2 G(x, y)| \leqslant C\, \frac{d(y, \partial\Omega)}{|x - y|^4}\,.$$

En utilisant (6) et (7), on peut montrer (4).

Soit maintenant $r_1 \in (0, r_0/2)$ tel que

(8) $$d(x, \partial\Omega) < 2r_1 < r_0 < d(y, \partial\Omega) \Rightarrow \nabla_1 G(x, y) \cdot n(x) \geqslant 0\,.$$

Il est clair que

(9) $\exists A /$ $\quad d(x, \partial\Omega) \geqslant r_1 \Rightarrow H(x, x) \leqslant A$

(10) $\forall A$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que:

$$(d(x, \partial\Omega) \geqslant r_1 \text{ et } d(y, \partial\Omega) \geqslant r_1 \text{ et } |x - y| < \varepsilon) \Rightarrow G(x, y) \geqslant A.$$

De (9) et (10), on déduit facilement qu'il existe p_0 tel que $\forall p \geqslant p_0$:

(11) $$(x \in \Omega^p \text{ et } d(x_i, \partial\Omega) \geqslant r_1\ \forall i \in [1, p]) \Rightarrow \rho(x) < 0\,.$$

Dans la suite on suppose que $p \geqslant p_0$. On écrira dx pour $d(x, \partial\Omega)$.

Soit maintenant $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $f(s) = (2r_1 - s)^+$, et soit $X : \Omega^p \to (\mathbf{R}^3)^p$ tel que

(12) $$X(\sigma x) = \sigma(X(x)) \quad \forall x \in \Omega^p \quad \forall \sigma \in \sigma_p$$

(13) $$X(x) = (f(dx_1)\, n(x_1), \ldots, f(dx_k)\, n(x_k), 0, \ldots, 0)$$

si $dx_1 = dx_2 = \ldots = dx_k < dx_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant dx_p$ avec $dx_1 \leqslant 2r_1$

(14) $$X(x) = 0 \text{ si } \forall i \in [1, p] \; dx_i \geqslant 2r_1 .$$

Pour $x \in \Omega^p$ on définit $x(t)$ par

$$\begin{cases} \dot{x}^+(t) = X(x(t)) \\ x(0) = x, \end{cases}$$

où $\dot{x}^+$ désigne la dérivée à droite. Soit $\rho(t) = \rho(x(t))$.

Utilisant (11), (4) et (5), on voit que

(15) $$x \in \partial C_p \Rightarrow \dot{\rho}^+(0) < 0 .$$

et donc $\nabla \rho$ n'est pas nul sur ∂C_p. Soit ensuite

$$\begin{aligned} T : C_p &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longrightarrow \operatorname{Min}\{t \mid x(t) \in I_p\} . \end{aligned}$$

De (11) on déduit que $T(x) \leqslant 1$, et de (15) on déduit que T est continue. Soit maintenant

$$\varphi : [0, 1] \times C_p \longrightarrow C_p$$

$$(t, x) \longrightarrow \left| \begin{matrix} x(t) & \text{si } t \leqslant T(x) \\ x(T(x)) & \text{si } t \leqslant T(x) \end{matrix} \right.$$

φ définit une rétraction par déformation équivariante de C_p sur ∂C_p d'où la proposition 2.

3) L'objet de cette section est d'essayer d'expliquer pourquoi W_p / W_{p-1} n'est jamais contractile. Pour simplifier, nous supposerons que $\{\rho = 0\} \cap \{\rho' = 0\} = \phi$ (sinon voir la remarque 6 et [4]).

1⁰ cas. $H_1(\Omega ; \mathbb{Q}) \neq 0$.

Dans ce cas, on utilise l'homologie rationelle et on omettra le $\mathbb{Q}$. ν un élément non nul de $H_1(\Omega)$. On définit

Soit e_p le générateur de $H_p(\partial \Delta_{p+1})$ et $\dot{e}_p$ celui de $H_p(\Delta_p, \partial \Delta_p)$. Soit

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \nu \\ \nu_p &= \nu_{p-1} \otimes \nu \in H_p(\Omega^p). \end{aligned}$$

$v_p \otimes \dot{e}_{p-1} \in H_{2p-1}(\Omega^p \times \Delta_{p-1}, \Omega^p \times \partial \Delta_{p-1})$. Soit u_p l'image de $v_p \otimes \dot{e}_{p-1}$ dans $H_{2p-1}(W_p, W_{p-1})$ (voir II). Soit A_p la proposition

$$u_p \neq 0 .$$

On convient que $u_1 = v, W_0 = \phi$. Il est alors facile de voir que

(16) A_1 est vraie.

On va montrer:

PROPOSITION 4 - $A_{p-1} \Rightarrow A_p$.

On aura donc $H_{2p-1}(W_p, W_{p-1}) \neq 0$ pour tout p en contradiction avec le fait que W_p / W_{p-1} est contractile pour p assez grand, d'où le théorème 1 dans ce cas.

Idée de la démonstration. Pour expliquer la démonstration, nous commençons par un cas simple $p = 2$. On sait (voir II) que $I_2 \underset{\sigma_2}{\times} \Delta_1$ peut être considéré comme un sous-ensemble de J^{2S}. Notons $\alpha_1 \delta_{x_1} + \alpha_2 \delta_{x_2}$ l'élément de J^{2S} associé à $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) \in I_2 \times \Delta_1$. Soit maintenant $(x_1, x_2) \in I_2$; $t\delta_{x_1} + (1-t)\delta_{x_2}$ est un chemin dans J^{2S} qui va de δ_{x_1} à δ_{x_2}. On fait maintenant descendre ce chemin en utilisant le flot associé à $-J'$ dans la région $\{J \geqslant S + \varepsilon\}$. On en déduit un chemin dans $J^{S+\varepsilon}$ qui va de δ_{x_1} à δ_{x_2}. Il est en outre facile de voir que $J(u_n) \to S \Rightarrow J'(u_n) \to 0$; utilisant alors les proposition 1 et 2 et le chemin précédent, on peut construire un chemin *dans* Ω qui va de x_1 à x_2 et par construction ce chemin dépend continûment de x_1 et x_2. On déplace ensuite x_1 et x_2 le long de ce chemin jusqu'au point milieu.

Récapitulons: on a construit une application η de $[0,1] \times I_2$ dans $\Omega \times \Omega$ telle que:

$$\eta(0, x) = x \qquad \forall x \in I_2,$$
$$\eta(1, x) \in \{(x_1, x_2) \in \Omega \times \Omega \mid x_1 = x_2\} \qquad \forall x \in I_2,$$
$$\eta(t, \sigma x) = \sigma \eta(t, x) \qquad \forall \sigma \in \sigma_2, \forall t \in [0,1], \forall x \in I_2.$$

Ecrivons maintenant la suite exacte pour la paire (Ω^2, I_2)

$$H_2(I_2) \xrightarrow{a} H_2(\Omega^2) \xrightarrow{b} H_2(\Omega^2, I_2).$$

L'existence de η nous dit que $v_2 \in a(H_2(I_2))$ et donc $b(v_2) \neq 0$; $b(v_2) \otimes \dot{e}_1$ est un élément non nul de $H_3(\Omega^2 \times \Delta_1, \Omega^2 \times \partial \Delta_1 \cup I_2 \times \Delta_1)$; cet élément est invariant par σ_2. Il définit donc un élément non nul de $H_3(\Omega^2 \underset{\sigma_2}{\times} \Delta_1, \partial \Delta_1 \cup I_2 \underset{\sigma_2}{\times} \Delta_1)$. A_2 est donc vrai.

Pour le cas général (p non nécessairement égal à 2), on considére le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} I_p \times \partial\Delta_{p-1} \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, "i"] & \\ \Omega^p \times \partial\Delta_{p-1} \arrow[r, "j"'] & \Omega^p \times W_{p-1} / W_{p-2} \end{tikzcd}$$

(Noter que J^{pS} / W_{p-2} se rétracte par déformation sur W_{p-1} / W_{p-2}, utiliser la rétraction et II pour construire i et j).

Notons que i se prolonge à $I_p \times \Delta_{p-1}$ (voir II) et donc:

(17) $$i_*(w \otimes e_{p-2}) = 0 \quad \forall w \in H_*(I_p).$$

On montre ensuite que $j_*(v_p \otimes e_{p-2})$ a pour composante dans $H_1(\Omega^p) \otimes H_{2p-3}(W_{p-1} / W_{p-2})$:

$$(v \otimes \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{p-1 \text{ fois}} + \ldots\ldots + \underbrace{\otimes \ldots \otimes 1}_{p-1 \text{ fois}} \otimes v) \otimes u_{p-1}$$

et donc, si A_{p-1} est vraie (ce que nous supposerons dans la suite) $j_*(v_p \otimes e_{p-2}) \neq 0$. Utilisons (17), on voit que $v_p \otimes e_{p-2}$ n'est pas dans l'image de k_*. Donc v_p induit un élément non nul $\bar{v}_p$ dans $H_p(\Omega^p, I_p) \cdot \bar{v}_p \otimes \dot{e}_{p-1}$ est alors un élément non nul de

$$H_{2p-1}(\Omega^p \times \Delta_{p-1}, \Omega^p \times \partial\Delta_{p-1} \cup I_p \times \Delta_{p-1}).$$

Cet élément est invariant par σ_p. Il est donc non nul dans

$$H_{2p-1}(\Omega^p \underset{\sigma_p}{\times} \Delta_{p-1}, \Omega^p \times \partial\Delta_{p-1} \underset{\sigma_p}{\cup} I_p \times \Delta_{p-1}),$$

d'où A_p.

2^0 *cas.* $H_2(\Omega\,; \mathcal{Q}) \neq 0$.

REMARQUE 5 - Comme Ω est connexe non contractile, on a, si $H_1(\Omega\,; \mathcal{Q}) = 0$, $H_2(\Omega\,; \mathcal{Q}) \neq 0$. Notons que l'on a alors $H_2(\Omega\,; \mathbf{Z}_2) \neq 0$.

On ne peut plus procéder comme avant car $v_p \otimes \dot{e}_{p-1}$ n'est pas invariant par σ (v étant maintenant un élément non nul de $H_2(\Omega\,; \mathcal{Q})$); de façon plus précise, si σ est une transposition $\sigma(v_p \otimes \dot{e}_{p-1}) = - v_p \otimes \dot{e}_{p-1} \cdot v_p \otimes \dot{e}_{p-1}$ est donc maintenant nul dans $H_{3p-1}(\Omega^p \underset{\sigma_p}{\times} \Delta_{p-1}, \Omega^p \times \partial\Delta_{p-1} \underset{\sigma_p}{\cup} I_p \times \Delta_{p-1}\,; \mathcal{Q})$.

Pour pallier à ce problème, on travaille avec des classes d'homologie à coefficients dans $\mathbf{Z}_2$, et on utilise directement les espaces quotientés. En procédant de nouveau par récurrence, on arrive à montrer que $H_{3p-1}(W_p, W_{p-1}; \mathbf{Z}_2) \neq 0$; voir [4]. D'où le théorème 1 dans ce cas aussi.

REMARQUE 6 - On peut voir en regardant la preuve du théorème 1 que, en fait le calcul du changement de topologie à la traversée du niveau pS n'est pas nécessaire; il suffit en effet de considérer une variété compacte V incluse dans Ω représentant $H_1(\Omega; \mathbb{Q})$ ou $H_2(\Omega; \mathbf{Z}_2)$ et de remarquer que, si p est assez grand, alors pour λ assez grand:

$$J\Big(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \delta_i(a_i, \lambda)\Big) < pS \ \forall (\alpha, a) \in \Delta_{p-1} \times V^p.$$

Ceci permet de démontrer le théorème 1 avec très peu de calculs. Mais l'expression du changement de topologie devrait être utile pour trouver des solutions pour des Ω contractiles.

REMARQUE 7 - Dans [6] l'existence d'une solution à (1) était établie quand Ω était un ouvert avec un «petit trou» (voir [6] pour les hypothèses précises) et l'existence d'une solution à (1) sous l'hypothèse générale Ω non contractile était soulevée comme problème ouvert. Le Théorème 1 répond à ce problème.

Nous remercions C. Taubes pour nous avoir fait remarquer que, pour $\Omega = \mathbf{R}^3$ $A = J(\delta_1(a_1, \lambda) + \delta_2(a_2, \lambda)) < 2S$ si $\lambda |a_1 - a_2|$ est grand. On trouve d'ailleurs dans [15], pour l'équation de Yang Mills, des estimations d'une quantité analogue à A.

Nous remercions aussi J. Lannes pour son aide sur des points de topologie algébrique.

REFERENCES

[1] A. BAHRI, *Pseudo orbites des formes de contact.* C. R. Acad. Sc. Paris, t. 299, série I, (1984), 757-760 et article détaillé à paraître.

[2] A. BAHRI, à paraître.

[3] A. BAHRI, J. M. CORON, *Sur une équation elliptique non linéaire avec l'exposant critique de Sobolev.* Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, *301*, I (1985), 345-348.

[4] A. BAHRI, J. M. CORON, à paraître.

[5] H. BREZIS, J. M. CORON, *Convergence of solutions of H-systems or how to blow bubbles.* Archive Rat. Mech. Anal. *89*, 1 (1985), 21-56.

[6] J. M. CORON, *Topologie et cas limite des injections de Sobolev.* C. R. Acad. Sc. Paris, t. 299, 7 (1984), 209-212.

[7] J. KAZDAN, F. WARNER, *Remarks on some quasilinear elliptic equation.* Comm. Pure & Appl. Math. *38* (1975), 567-569.

[8] P. L. LIONS, *The concentration compactness principle in the calculus of variations, the limit case.* Rev. Mat. Iberoamericana *1*, 1 (1985), 145-201, et *1*, 2 (1985), 45-121 et aussi Note aux C. R. Acad. Sc. Paris *296*, I (1983), 645-648.

[9] J. MILNOR, *Morse theory.* Ann. Math. Studies 51, Princeton Univ. Press 1963.

[10] S. POHOZAEV. *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. Soviet Math. Doklady *6* (1965), 1408-1411 (traduit de Russian Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R. *165* (1965), 33-36).

[11] J. SACKS, K. UHLENBECK, *The existence of minimal immersions of 2-spheres.* Ann. Math. *113* (1981), 1-24.

[12] R. SCHOEN, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature.* J. Diff. Geometry *20* (1984), 479-495.

[13] Y. T. SIU, S. T. YAU, *Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature.* Inv. Mathematicae *59* (1980), 189-204.

[14] M. STRUWE, *A global existence result for elliptic boundary value problems involving nonlinearities,* à paraître.

[15] C. H. TAUBES, *Path connected Yang-Mills moduli spaces.* J. Diff. Geometry *19* (1984), 337-392.

[16] H. WENTE, *Large solutions to the volume constrained Plateau problem.* Arch. Rational Mech. Anal. 75 (1980), 59-77.