SUL CARATTERE TOPOLOGICO DELLE STRUTTURE DI CONVERGENZA CON UN NUMERO FINITO DI PUNTI-LIMITE (*)

di MAURIZIO TROMBETTA (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si caratterizzano, fra le strutture di convergenza in cui ogni successione ha un numero finito di punti limite, quelle che sono deducibili da topologie.*

SUMMARY. - *Among the convergences with finiteness of the limit set, we characterize the topological ones.*

§ 1 - Preliminari

In un mio precedente lavoro ([3]), avevo lasciato insoluto il problema di caratterizzare le strutture di convergenza topologiche fra quelle in cui ogni successione tende a un numero finito di punti-limite, avendo ivi dato al riguardo solo una condizione sufficiente. In questa breve nota, dò un teorema che risolve tale questione.

Le notazioni usate qui, come in [3], sono, sostanzialmente, quelle di Kamiński in [1]. In breve: dato un insieme X, indicheremo con lettere greche minuscole i suoi elementi e con lettere latine minuscole le successioni con essi formate. Detta x la successione (ξ_n), indicheremo con $|x|$ l'insieme $\{\xi_n : n \in N\}$. La successione di termine costante ξ sarà indicata con $\bar{\xi}$. Scriveremo $y < x$ per indicare che

(*) Pervenuto in Redazione il 27 marzo 1985.
(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica Applicata dell'Università - Piazzale Europa, 1 - 34100 Trieste.

y è una sottosuccessione di x. Dato un sottoinsieme A di X, diremo che una successione $x = (\xi_n)$ *finisce in* A se esiste $\bar{n}$ tale che, per $n > \bar{n}$, è $\xi_n \in A$.

Come è noto, si dice che in X è assegnata una *struttura di convergenza* se è assegnata una legge G che a ogni $x \in X^N$ associa un insieme $G(x) \subset X$ (insieme dei *punti-limite* di x); scriveremo volentieri $x \to \xi$ in luogo di $\xi \in G(x)$. Se nessuna sottosuccessione di x converge a ξ, diremo che x è *totalmente divergente da* ξ e scriveremo $x \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\|\;\;\;\, \xi$. Un punto ξ si dirà *isolato* se a esso convergono tutte e sole le successioni in cui il termine generale è definitivamente coincidente con ξ. Un sottoinsieme A di X si dirà *G-chiuso* se per ogni successione x, con $|x| \subset A$, si ha $G(x) \subset A$.

Per ogni successione $x = (\xi_n)$, definiamo l'insieme:

$$L(x) = \cup_y G(y), \text{ per } y < x.$$

Data una struttura di convergenza G su X, indicheremo con $T(G)$ la topologia di X in cui un insieme A è dichiarato aperto se e solo se $x \to \xi \in A$ implica che la x finisce in A. Viceversa, ogni topologia Φ su A definisce, nel modo usuale, una struttura di convergenza $L(\Phi)$. Si vede subito che se x tende a ξ in G, allora x converge a ξ anche in $L(T(G)) = LT(G)$ e che, in generale, non sussiste l'implicazione opposta.

Fra le proprietà di cui può godere una struttura di convergenza, c'interessano qui le seguenti:

(S) — Per ogni $\xi \in X$, si ha $\bar{\xi} \to \xi$.

(F) — Se $x \to \xi$ e $y < x$, allora $y \to \xi$.

(U) — Se $x \not\to \xi$, esiste $y < x$ tale che $y \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\|\;\;\;\, \xi$.

(H) — Nessuna successione converge a due limiti distinti.

(W) — Per ogni successione x, $G(x)$ è finito.

(V) — Se è $(\theta_n) \to \alpha$ e, per ogni n, è $\bar{\xi}_n \to \theta_n$, allora è anche $(\xi_n) \to \alpha$.

(C_0) — Per ogni successione x, $G(x)$ è G-chiuso.

(T) — $LT(G) = G$.

La T si esprime dicendo che la struttura di convergenza G è *topologica o deducibile da topologie.*

§ 2 - Il teorema di caratterizzazione

E' noto che una struttura di convergenza topologica soddisfa necessariamente agli assiomi $SFUVC_0$. E' altresì noto (cfr. per es.

[2]) che una struttura di convergenza che soddisfa alle condizioni *SFUH* è topologica.

Vogliamo ora studiare come cambiano le cose quando si sostituisce all'assioma H la più debole condizione W.

Mostreremo dapprima (Prop. 1) che gli assiomi $SFUVWC_0$ sono indipendenti (mentre V e C_0 seguono subito da S e H); ciò risolve, fra l'altro, in senso negativo una questione lasciata aperta in [3]. Proveremo poi (Teor. 4) che una struttura di convergenza soddisfacente alla condizione W è topologica se (e solo se) soddisfa agli assiomi $SFUVC_0$.

PROPOSIZIONE 1 - *Gli assiomi* S, F, U, V, C_0, W *sono indipendenti.*

Dim. Chiaramente nessuno degli assiomi S, F, W segue dagli altri. Per stabilire l'indipendenza di U, basta considerare l'insieme $E = N \cup \{\alpha\}, \alpha \notin N$, con la seguente struttura di convergenza: i punti di N sono tutti isolati; ad α converge, oltre ad $\bar{\alpha}$, ogni sottosuccessione (n_k) di (n) per cui è convergente la serie formata coi reciproci dei suoi termini. Tale struttura di convergenza soddisfa, oltre che alla S e alla F, anche ad H (e quindi a V e C_0), ma non a U. L'indipendenza dell'assioma V è assicurata dall'Esempio 1 dato in [3], mentre quella della C_0 è provata dall'Esempio sotto riportato.

c. v. d.

ESEMPIO di struttura di convergenza soddisfacente agli assiomi $SFUVW$, ma non a C_0. Sia $X = \{\alpha_n : n \in N\} \cup \{\beta, \gamma\}$ tutti distinti. Definiamo in X la seguente struttura di convergenza G. Si suppongono verificate le condizioni S e F. L'incastro[(1)] di due successioni convergenti a un elemento ξ tende ancora a ξ. Gli elementi α_n sono isolati. A β converge, oltre a $\bar{\beta}$, ogni successione (α_{i_n}) con (i_n) divergente. In fine, $\bar{\beta} \to \gamma$. La validità della W è immediata. Per provare la U, supponiamo $x \not\to \lambda$. Esiste allora $y < x$ con $\lambda \notin |y|$ e, nel caso $\lambda = \gamma$, anche $\beta \notin |y|$. Se è $\lambda \neq \beta$, si ha $y \not\Vdash\!\to \lambda$. Sia ora $\lambda = \beta$. Se è $\bar{\gamma} < y$, si ha $\bar{\gamma} \not\Vdash\!\to \beta$, altrimenti si può pensare $y = (\alpha_{i_n})$, con (i_n) non divergente. Ma allora esiste $k \in N$ tale che $\bar{\alpha}_k < y$; ed è $\bar{\alpha}_k \not\Vdash\!\to \beta$. Proviamo ora la validità della V. A tal fine, siano $x = (\xi_n), y = (\theta_n)$, λ tali che $y \to \lambda$ e, per ogni n, $\bar{\xi}_n \to \theta_n$. Sempre per ogni $n \in N$, si ha

(1) Date le successioni $x = (\xi_n)$ e $y = (\theta_n)$, diremo loro *incastro* ogni successione $z = (\zeta_n)$ per cui esistono due sottosuccessioni (i_n) e (j_n) di (n) con $|(i_n)| \cap |(j_n)| = \phi$ e $|(i_n)| \cup |(j_n)| = N$, per le quali si ha $(\xi_n) = (\zeta_{i_n})$ e $(\theta_n) = (\zeta_{j_n})$.

$\xi_n = \theta_n$, oppure $\theta_n = \gamma$ e $\xi_n = \beta$. Se è $\lambda = \gamma$, da un $\bar{n}$ in poi, si ha $\theta_n \in \{\beta, \gamma\}$ e, per gli stessi n, anche $\xi_n \in \{\beta, \gamma\}$, da cui $x \to \gamma$. In caso contrario, γ può comparire al più un numero finito di volte in y. E' quindi lecito supporre $\gamma \notin |y|$. Ma ciò implica $x = y$ e quindi $x \to \lambda$. Posto, in fine, $x = (\alpha_n)$, si ha $G(x) = \{\beta\}$ che non è G-chiuso. Quindi la C_0 non è soddisfatta.

c. v. d.

LEMMA 2. - *Se la struttura di convergenza G soddisfa agli assiomi FUW, allora, per ogni* $x \in X^N$, *esiste* $y < x$ *per la quale è* $G(y) = L(y)$. (Cfr. [3], Lemma 5).

Dim. Per assurdo. Se esiste x tale che, per ogni $y < x$ è

$$G(y) \underset{\neq}{\subset} L(y),$$

si può costruire una catena di successioni $x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$ per la quale si ha $G(x_n) \underset{\neq}{\subset} G(x_{n+1}), \forall n$. Poniamo $x_n = (\xi_{ns})_s$ e $y = (\xi_{nn})$. La sottosuccessione y_n di y che si ottiene sopprimendo i suoi primi n termini è anche una sottosuccessione di x_n. Per le F e U, si ha $G(y_n) = G(y), \forall n$. Risulta poi, sempre per la F, $G(y_n) \supset G(x_n), \forall n$, da cui $G(y) \supset \bigcup_n G(x_n)$, che è un insieme infinito. Ma ciò contraddice la W.

c. v. d.

Per ragioni di comodità espositiva, $\forall x = (\xi_n)$, definiamo l'insieme:

$$S(x) = \{\beta \in X \mid \exists n \in N : \bar{\xi}_n \to \beta\} - |x|.$$

LEMMA 3. - *Sia G una struttura di convergenza soddisfacente agli assiomi* FVC_0W *e sia* $x \in X^N$. *Se esistono* $y \in X^N$ *e* $\beta \in X$ *tali che* $y \to \beta, |y| \subset S(x) \cup |x|, \beta \notin S(x) \cup |x|$, *allora è* $\beta \in L(x)$.

Dim. Siano $x = (\xi_n)$, $y = (\theta_n)$, β secondo le ipotesi. Se x e y hanno una sottosuccessione z in comune, si ha $z \to \beta$ per la F, da cui $\beta \in L(x)$. Se una tale z non esiste, non può essere $\theta_n \in |x|$ per infiniti n, perché, altrimenti, dovrebbe esistere $k \in N$ tale che $\bar{\xi}_k < y$, da cui $\bar{\xi}_k \to \beta$, per la F, contro l'ipotesi $\beta \notin S(x)$. Si può dunque supporre, sempre per la F, $|y| \subset S(x)$. Non può esistere un elemento ρ tale che $\bar{\rho} < y$. Se ciò fosse, esisterebbe $k \in N$ tale che $\bar{\xi}_k \to \rho$ e dovendo essere $(F)\ \bar{\rho} \to \beta$, risulterebbe $\bar{\xi}_k \to \beta$ per la C_0, sempre contro la $\beta \notin S(x)$.

L'insieme $|y|$ è dunque infinito; si può anzi supporre i θ_n tutti fra loro distinti. Per ogni $n \in N$, esiste un $i_n \in N$ tale che $\bar{\xi}_{i_n} \to \theta_n$.

Per la W, anche l'insieme $\{\xi_{i_n}\}$ deve essere infinito; possiamo supporre anche tali elementi tutti distinti. Esistono quindi due successioni crescenti di indici (n_k) e (i_{n_k}) tali che $\bar{\xi}_{i_{n_k}} \to \theta_{n_k}, \forall k \in N$. Sia $u = (\theta_{n_k}) < y$; $z = (\xi_{i_{n_k}}) < x$. Per la F, è $u \to \beta$, da cui $z \to \beta$, per la V, ossia $\beta \in G(z) \subset L(x)$.

c. v. d.

TEOREMA 4. - *Condizione necessaria e sufficiente affinché una struttura di convergenza verificante l'assioma W sia topologica è che essa soddisfi alle condizioni* $SFUVC_0$.

Dim. Basta provare la sufficienza. Sia dunque G una struttura di convergenza soddisfacente alle condizioni $SFUVC_0W$. Siano poi $x = (\xi_n) \in X^N, \alpha \in X$, con $x \not\to \alpha$. Dobbiamo provare che esiste un $T(G)$-intorno di α in cui x non finisce. Per la U, esiste $y < x$, con $y \not\Vdash\!\!\to \alpha$. Supponiamo $y = x$. Non può essere $\bar{\alpha} < x$; supponiamo anzi $\alpha \notin |x|$. Per la V, non può nemmeno essere $\bar{\xi}_n \to \alpha$ per infiniti n; supponiamo anzi che ciò non si verifichi per alcun n. Per il *Lemma* 2, esiste $z < x$ per cui è $G(z) = L(z)$. Si ha ancora $z \not\Vdash\!\!\to \alpha$ e $\alpha \notin |z| \cup S(z) \cup G(z) = Y = |z| \cup S(z) \cup L(z)$. Se proviamo che Y è G-chiuso, $X - Y$ è un $T(G)$-intorno di α in cui non finisce z e quindi nemmeno x. Supponiamo dunque Y non G-chiuso. Devono allora esistere $u = (\theta_n) \in X^N$ e $\beta \in X$ tali che: $|u| \subset Y, u \to \beta, \beta \notin Y$. Proviamo intanto che non può esistere $\rho \in Y$ con $\bar{\rho} < u$, da cui $\bar{\rho} \to \beta$. Infatti, non può essere $\rho \in |z|$, perché si avrebbe $\beta \in S(z) \subset Y$; non può essere $\beta \in S(z)$, perché esisterebbe $\xi_k \in |z|$ con $\bar{\xi}_k \to \rho$, da cui $\bar{\xi}_k \to \beta$, per la C_0, e ancora $\beta \in S(z)$; non può essere $\rho \in G(z)$, essendo $G(z)$ G-chiuso per la C_0. Dunque $|u|$ deve essere infinito; possiamo anzi pensare i θ_n tutti distinti. Essendo $G(z)$ finito per la W, è lecito pensare $G(z) \cap |u| = \emptyset$. E' dunque $|u| \subset |z| \cup S(z)$. Per il *Lemma* 3, si ha $\beta \in L(z) = G(z) \subset Y$. Si arriva così a un assurdo.

c. v. d.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. KAMIŃSKI, *On characterization of topological convergence*, Proc. Conference on convergence, SZCZYRK, 1979 (1980), pp. 50-70.

[2] M. DOLCHER, *Topologie e strutture di convergenza*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa; Serie III, 14, Fasc. 1 (1960), pp. 63-92.

[3] M. TROMBETTA, *Su alcune proprietà degli insiemi-limite nelle strutture di convergenza*, Rend. Ist. Matem. Univ. Trieste; Vol. XVI (1984), pp. 119-128.