TEOREMI DI ESISTENZA E DI REGOLARITA' PER UNA CLASSE DI DISEQUAZIONI VARIAZIONALI DI EVOLUZIONE DEL PRIMO ORDINE (*)

di RAFFAELE TOSCANO (a Napoli) (**)

SOMMARIO. - *Si considerano due problemi unilaterali di evoluzione del 1⁰ ordine, uno di Cauchy e l'altro periodico, e si stabiliscono alcuni teoremi di esistenza e di regolarità.*

SUMMARY. - *We consider two evolution unilateral first order problems, one Cauchy problem and the either periodic problem. We prove some existence and regularity theorems.*

Siano Ω_1 e Ω_2 aperti di R^n con $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \Omega \neq \phi$, $W_\ell (\ell = 1,2)$ uno spazio di Hilbert reale immerso con continuità in $L^2(\Omega_\ell)$, V_ℓ un sottospazio chiuso di W_ℓ, e si abbia:

$$\bar{V}_\ell = L^2(\Omega_\ell),$$

sicché risulta:

$$L^2(0,T;V_\ell) \subseteq L^2(0,T;L^2(\Omega_\ell)) \subseteq L^2(0,T;V'_\ell) \quad (T > 0),$$

le immersioni essendo continue e dense.

Siano inoltre ψ un elemento di $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, f_ℓ un elemento di $L^2(0,T;V'_\ell)$, e $A_\ell(t)$, per ogni $t \in [0,T]$, un operatore lineare e continuo di V_ℓ nel suo duale V'_ℓ.

(*) Pervenuto in Redazione il 6 agosto 1984. Ricerca effettuata con fondi erogati dal M.P.I.
(**) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica e Applicazioni - Facoltà di Ingegneria, Via Claudio, 21 - 80125 Napoli.

Indicheremo con:

$(\cdot,\cdot)$, $(\cdot,\cdot)_\ell$ i prodotti scalari in $L^2(\Omega)$ e $L^2(\Omega_\ell)$,

$|\cdot|$, $|\cdot|_\ell$, $\|\cdot\|_\ell$ le norme in $L^2(\Omega)$, $L^2(\Omega_\ell)$ e W_ℓ,

$<\cdot,\cdot>_\ell$ la dualità tra V_ℓ e V'_ℓ,

e supporremo, senza ledere la generalità, che sia:

$|z|_\ell \leqslant \|z\|_\ell \quad \forall z \in W_\ell$.

Supporremo poi che la famiglia di forme bilineari su V_ℓ

$$a_\ell(t,w,z) = < A_\ell(t)\, w, z >_\ell$$

abbia le seguenti proprietà:

$a_\ell(\cdot, w, z) \in C^1([0,T]) \quad \forall w, z \in V_\ell$,

$a_\ell(t,z,z) \geqslant c' \|z\|^2_\ell \quad \forall t \in [0,T]$ e $\forall z \in V_\ell \quad (c' = \text{cost.} > 0)$,

$|a_\ell(t,w,z)| + |a'_\ell(t,w,z)| \leqslant c'' \|w\|_\ell \cdot \|z\|_\ell \quad \forall t \in [0,T]$ e $\forall (w,z) \in V^2_\ell \quad (c'' = \text{cost.} > 0)$,

dove $a'_\ell(t,w,z) = \dfrac{d}{dt} a_\ell(t,w,z)$.

Supposto ψ tale che il convesso:

$$\mathbf{K} = \{ (v_1, v_2) \in \prod_{\ell=1}^{2} L^2(0,T;V_\ell) \mid v_1(t) + \psi(t) \geqslant v_2(t) \text{ su } \Omega \text{ q.o. su }]0,T[\}$$

non sia vuoto, consideriamo i seguenti problemi:

PROBLEMA (P). - *Assegnato* $(u_{10}, u_{20}) \in \prod_{\ell=1}^{2} L^2(\Omega_\ell)$, *ricercare*

$$(u_1, u_2) \in \prod_{\ell=1}^{2} [L^2(0,T;V_\ell) \cap H^1(0,T;V'_\ell)] \text{ tale che}$$

$(u_1, u_2) \in \mathbf{K}$, $u_\ell(0) = u_{\ell 0}$ *ed inoltre:*

$$(1) \quad \sum_1^2{}_\ell \int_0^T [< u'_\ell(t), v_\ell(t) - u_\ell(t) >_\ell + a_\ell(t, u_\ell(t), v_\ell(t) - u_\ell(t)) + \\ - < f_\ell(t), v_\ell(t) - u_\ell(t) >_\ell]\, dt \geqslant 0 \quad \forall (v_1, v_2) \in \mathbf{K}.$$

PROBLEMA (Q). - *Ricercare* $(u_1, u_2) \in \prod_{\ell=1}^{2} [L^2(0,T;V_\ell) \cap H^1(0,T;V'_\ell)]$ *tale che* $(u_1,u_2) \in \mathbf{K}$, $u_\ell(0) = u_\ell(T)$, *e soddisfacente alla* (1).

Nella bibliografia riportiamo alcuni lavori su problemi del genere (cfr. [13], ..., [19]).

Seguendo un procedimento classico del calcolo delle variazioni, è facile constatare che dalla (1) si ottiene la relazione:

$$(2)\quad \sum_1^2{}_\ell\,[< u'_\ell(t), v_\ell(t) - u_\ell(t) >_\ell + a_\ell(t, u_\ell(t), v_\ell(t) - u_\ell(t)) + \\ - < f_\ell(t), v_\ell(t) - u_\ell(t) >_\ell] \geqslant 0 \text{ q.o. su }]0,T[\ \ \forall (v_1, v_2) \in \mathbf{K},$$

e pertanto i problemi (P) e (Q) si possono porre equivalentemente sostituendo la (1) con la (2). Siano infatti $(v_1, v_2) \in \mathbf{K}$, e $t \in\ ]0,T[$ un punto di Lebesgue della funzione:

$$t \to \sum_1^2{}_\ell\,[< u'_\ell(t), v_\ell(t) - u_\ell(t) >_\ell + a_\ell(t, u_\ell(t), v_\ell(t) - u_\ell(t)) + \\ - < f_\ell(t), v_\ell(t) - u_\ell(t) >_\ell].$$

Scelto $\varepsilon > 0$ in modo che $]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\ \subseteq\ ]0,T[$, e posto q.o. su $]0,T[$:

$$\tilde{v}_\ell(s) = \begin{cases} v_\ell(s), & \text{se } s \in\ ]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\\ u_\ell(s), & \text{se } s \notin\ ]t-\varepsilon, t+\varepsilon[, \end{cases}$$

poiché $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) \in \mathbf{K}$, per la (1) si ha:

$$\sum_1^2{}_\ell \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} [< u'_\ell(s), v_\ell(s) - u_\ell(s) >_\ell + a_\ell(s, u_\ell(s), v_\ell(s) - u_\ell(s)) + \\ - < f_\ell(s), v_\ell(s) - u_\ell(s) >_\ell]\, ds \geqslant 0,$$

da cui, per $\varepsilon \to 0$, segue la (2).

E' immediato poi constatare l'unicità della soluzione dei due problemi, in quanto, se (u_1, u_2) e $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ sono soluzioni del problema (P) [risp. (Q)], risultando:

$$\sum_1^2{}_\ell \int_0^T [< u'_\ell(t), u_\ell(t) - \bar{u}_\ell(t) >_\ell + a_\ell(t, \bar{u}_\ell(t), u_\ell(t) - \bar{u}_\ell(t)) + \\ - < f_\ell(t), u_\ell(t) - \bar{u}_\ell(t) >_\ell]\, dt \leqslant 0,$$

$$\sum_1^2{}_\ell \int_0^T [< \bar{u}'_\ell(t), u_\ell(t) - \bar{u}_\ell(t) >_\ell + a_\ell(t, \bar{u}_\ell(t), u_\ell(t) - \bar{u}_\ell(t)) + \\ - < f_\ell(t), u_\ell(t) - \bar{u}_\ell(t) >_\ell]\, dt \geqslant 0,$$

si ha:

$$\sum_1^2{}_\ell\,[\tfrac{1}{2}\, | u_\ell(T) - \bar{u}_\ell(T) |_\ell^2 + c' \, \| u_\ell - \bar{u}_\ell \|^2_{L^2(0,T;V_\ell)}] = 0$$

$$[\text{risp. } c' \sum_1^2{}_\ell \, \| u_\ell - \bar{u}_\ell \|^2_{L^2(0,T;V_\ell)} = 0].$$

Nella presente nota ci proponiamo di stabilire dei teoremi di esistenza, nel n. 1 per il problema (P) (teoremi 1, 2, 3) e nel n. 2 per il problema (Q) (teoremi 4, 5). Nel n. 3, sulla base dei risultati acquisiti, dimostreremo in un caso particolare due teoremi di regolarità «rispetto a x» della soluzione dei problemi in questione (teoremi 6, 7).

I procedimenti dimostrativi dei teoremi 1 e 4 si ispirano ai metodi esposti in [3] (cap. II), quelli dei teoremi 2, 3 e 5 si basano essenzialmente sui metodi di penalizzazione e di Faedo-Galerkin [7], [8]. Per la dimostrazione dei teoremi 6 e 7 si utilizzano, ma solo in parte, alcune tecniche seguite in [6], [12].

1. Con riferimento al problema (P), dimostreremo tre teoremi di esistenza: nei primi due supporremo che:

(3) $a_\ell(t,w,z) = a_\ell(t,z,w) \quad \forall t \in [0,T]$ e $\forall w,z \in V_\ell$,

(4) $f_\ell = f_{\ell 1} + f_{\ell 2}$ con $f_{\ell 1} \in L^2(0,T;L^2(\Omega_\ell))$ e $f_{\ell 2} \in H^1(0,T;V'_\ell)$,

nel terzo sarà eliminata l'ipotesi (3), supponendo però che i dati $\psi, u_{\ell 0}$ ed f_ℓ abbiano opportune proprietà di regolarità.

Teorema 1. - *Nelle ipotesi* (3) *e* (4), *se:*

i_1) $\psi \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$ *e* $\psi'(t) \geqslant 0$ *su* Ω $\forall t \in [0,T]$,

i_2) $u_{\ell 0} \in V_\ell$ *e* $u_{10} + \psi(0) \geqslant u_{20}$ *su* Ω,

il problema (P) *ammette una (e una sola) soluzione* (u_1, u_2), *e si ha:*

$$u_\ell \in L^\infty(0,T;V_\ell) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega_\ell)).$$

Dim. La dimostrazione si fonda sostanzialmente sulla possibilità, derivante dalle ipotesi i_1) e i_2), di approssimare gli elementi di **K** mediante opportune funzioni regolari, e su un noto teorema di esistenza delle soluzioni forti di una disequazione variazionale associata ad un operatore di evoluzione. Cominciamo dunque col provare che:

α_1) Qualunque sia $(v_1, v_2) \in \mathbf{K}$, esiste una famiglia $\{(v_{1\varepsilon}, v_{2\varepsilon})\}_{\varepsilon>0}$ di elementi di $\mathbf{K} \cap [\prod_{\ell=1}^{2} H^1(0,T;V_\ell)]$ tale che $v_{\ell\varepsilon}(0) = u_{\ell 0}$ e, per $\varepsilon \to 0$:

(5) $v_{\ell\varepsilon} \to v_\ell$ in $L^2(0,T;V_\ell)$.

Per ogni $\varepsilon > 0$ sia $v_{\ell\varepsilon} \in H^1(0,T;V_\ell)$ la soluzione del problema [4] (teorema 1.4, pag. 10):

$$(6) \quad \begin{aligned} &\varepsilon v'_{\ell\varepsilon}(t) + v_{\ell\varepsilon}(t) = v_\ell(t) \quad \text{q.o. su }]0,T[\,, \\ &v_{\ell\varepsilon}(0) = u_{\ell 0}, \end{aligned}$$

sicché:

$$(7) \quad \forall t \in [0,T] \quad v_{\ell\varepsilon}(t) = e^{-t/\varepsilon} u_{\ell 0} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{(s-t)/\varepsilon} v_\ell(s)\, ds.$$

Per le i_1), i_2), (7) si ha, per ogni $t \in [0,T]$ e per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

con $\varphi \geqslant 0$:

$$(v_{1\varepsilon}(t) - v_{2\varepsilon}(t), \varphi) \geqslant (-\psi(t), \varphi) + \int_0^t e^{(s-t)/\varepsilon}(\psi'(s), \varphi)\, ds \geqslant (-\psi(t), \varphi),$$

ossia $(v_{1\varepsilon}, v_{2\varepsilon}) \in \mathbf{K}$. Utilizzando poi le (6), è facile verificare che per $\varepsilon \to 0$:

$$v_{\ell\varepsilon} \to v_\ell \text{ in } L^2(0,T;V_\ell) \text{ debolmente,}$$
$$\| v_{\ell\varepsilon} \|_{L^2(0,T;V_\ell)} \to \| v_\ell \|_{L^2(0,T;V_\ell)},$$

da cui la (5).

Acquisita la α_1), rileviamo che per la (3), qualunque sia $v_\ell \in H^1(0,T;V_\ell)$ con $v_\ell(0) = u_{\ell 0}$:

$$\begin{aligned}(8) \quad & \int_0^T [a_\ell(t, v_\ell(t), v'_\ell(t)) - < f_{\ell 2}(t), v'_\ell(t) >_\ell]\, dt \geqslant - \tfrac{1}{2}\, a_\ell(0, u_{\ell 0}, u_{\ell 0}) + \\ & + < f_{\ell 2}(0), u_{\ell 0} >_\ell - \frac{1}{2c'} \| f_{\ell 2}(T) \|^2_{V'_\ell} - \frac{1}{2c''} \int_0^T \| f'_{\ell 2}(t) \|^2_{V'_\ell}\, dt + \\ & - c'' \int_0^T \| v_\ell(t) \|^2_\ell\, dt .\end{aligned}$$

La α_1), la (4) e la (8) assicurano l'esistenza di un elemento (unico) $(u_1, u_2) \in \prod_{\ell=1}^{2} [L^2(0,T;V_\ell) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega_\ell))]$ che è soluzione del problema (P) [2] (teorema 4, pag. 255) (1).

Resta da stabilire che:

$$(9) \quad u_\ell \in L^\infty(0,T;V_\ell).$$

Intanto si ha:

$$\begin{aligned}(10) \quad & \sum_1^2{}_\ell \int_0^t [(u'_\ell(s), v_\ell(s) - u_\ell(s))_\ell + a_\ell(s, u_\ell(s), v_\ell(s) - u_\ell(s))]\, ds \geqslant \\ & \geqslant \sum_1^2{}_\ell \int_0^t < f_\ell(s), v_\ell(s) - u_\ell(s) >_\ell ds \quad \forall t \in [0,T] \text{ e } \forall (v_1, v_2) \in \mathbf{K}.\end{aligned}$$

Sia ora, per ogni $\varepsilon > 0$, $u_{\ell\varepsilon}$ l'elemento di $H^1(0,T;V_\ell)$ soluzione del problema:

$$\varepsilon u'_{\ell\varepsilon}(t) + u_{\ell\varepsilon}(t) = u_\ell(t) \text{ q.o. su }]0,T[,$$
$$u_{\ell\varepsilon}(0) = u_{\ell 0}.$$

Assumendo nella (10) $v_\ell = u_{\ell\varepsilon}$ si ottiene la disuguaglianza:

$$\begin{aligned}& \sum_1^2{}_\ell \int_0^t [| u'_{\ell\varepsilon}(s) |^2_\ell + a_\ell(s, u_{\ell\varepsilon}(s), u'_{\ell\varepsilon}(s))]\, ds \leqslant \\ & \leqslant \sum_1^2{}_\ell \int_0^t < f_\ell(s), u'_{\ell\varepsilon}(s) >_\ell ds \quad \forall t \in [0,T].\end{aligned}$$

(1) L'ipotesi che l'origine appartenga al convesso, fatta nel paragrafo I del citato lavoro, è qui inessenziale.

A partire da essa si desume in modo ovvio che:

$$\forall t \in [0,T] \quad \frac{c'}{4} \sum_1^2 {}_\ell \| u_{\ell\varepsilon}(t) \|_\ell^2 \leqslant \sum_1^2 {}_\ell [\tfrac{1}{2} a_\ell(0, u_{\ell 0}, u_{\ell 0}) +$$

$$- < f_{\ell 2}(0), u_{\ell 0} >_\ell + \tfrac{1}{2} \int_0^T | f_{\ell 1}(t) |_\ell^2 dt + \frac{1}{c'} \| f_{\ell 2} \|^2_{C^0([0,T],V'_\ell)} +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \int_0^T \| f'_{\ell 2}(t) \|^2_{V'_\ell} dt] + \tfrac{1}{2} \max\{c'', 1\} \int_0^t [\sum_1^2 {}_\ell \| u_{\ell\varepsilon}(s) \|_\ell^2] \, ds,$$

e di qui, per il lemma di Gronwall:

$\forall t \in [0,T] \; \| u_{1\varepsilon}(t) \|_1^2 + \| u_{2\varepsilon}(t) \|_2^2 \leqslant c$, con $c = c(f_{\ell 1}, f_{\ell 2}, f'_{\ell 2}, u_{\ell 0}, c', c'')$.

Vale quindi la (9) se si osserva che per $\varepsilon \to 0$:

$u_{\ell\varepsilon} \to u_\ell$ in $L^2(0,T; V_\ell)$.

Teorema 2. - *Se V_ℓ è separabile, il teorema* 1 *sussiste anche sostituendo l'ipotesi* i$_1$) *con la seguente:*

i$_3$) $\psi \in H^1(0,T;W_1)$ *con* $\psi'(t) \in V_1$
$[risp. \psi \in H^1(0,T; W_2)$ *con* $\psi'(t) \in V_2]$.

Dim. Con riferimento al caso:

$\psi \in H^1(0,T; W_1)$, $\quad \psi'(t) \in V_1$,

dimostriamo dapprima che:

α_2) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un unico

$$(\tilde{u}_{1\varepsilon}, \tilde{u}_{2\varepsilon}) \in \prod_{\ell=1}^2 [L \quad (0,T; V_\ell) \cap H^1(0,T; L^2(\Omega_\ell))]$$

soluzione del problema:

(11) $\tilde{u}_{\ell\varepsilon}(0) = u_{\ell 0}$,

$$(\tilde{u}_{1\varepsilon}(t), z_1)_1 + a_1(t, \tilde{u}_{1\varepsilon}(t), z_1) +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} ([\tilde{u}_{1\varepsilon}(t) + \psi(t) - \tilde{u}_{2\varepsilon}(t)]^-, z_1) = < f_1(t), z_1 >_1,$$

(12)

$$(\tilde{u}'_{2\varepsilon}(t), z_2)_2 + a_2(t, \tilde{u}_{2\varepsilon}(t), z_2) +$$

$$- \frac{1}{\varepsilon} ([\tilde{u}_{1\varepsilon}(t) + \psi(t) - \tilde{u}_{2\varepsilon}(t)]^-, z_2) = < f_2(t), z_2 >_2$$

q.o. su $]0,T[\quad \forall (z_1, z_2) \in V_1 \times V_2$.

Inoltre risulta:

$$(13) \quad \sum_1^2 {}_\ell [\| \tilde{u}_{\ell\varepsilon} \|_{L^\infty(0,T; V_\ell)} + \| \tilde{u}'_{\ell\varepsilon} \|_{L^2(0,T; L^2(\Omega_\ell))}] \leqslant c,$$

con $c = c(f_{\ell 1}, f_{\ell 2}, f'_{\ell 2}, \psi', u_{\ell 0}, c', c'')$.

L'unicità è di facile verifica. Per l'esistenza seguiremo il metodo di Faedo-Galerkin.

Sia $\{z_{\ell i}\}$ una successione di elementi di V_ℓ linearmente indipendenti tale che, detto $V_{\ell r}$ lo spazio generato da $\{z_{\ell 1}, \dots, z_{\ell r}\}$, si abbia:

$$u_{\ell 0} \in V_{\ell 1}, \quad \overline{\bigcup_{r \in N} V_{\ell r}} = V_\ell .$$

Indichiamo con P_{1r} il proiettore su V_{1r} in V_1, e poniamo:

$$\forall t \in [0, T] \quad \psi_{1r}(t) = \int_0^t P_{1r} \psi'(s)\, ds + \psi(0),$$

sicché per $r \to +\infty$:

$$(14) \quad \begin{aligned} &\psi_{1r} \to \psi \ \text{ in } C^0([0, T], W_1), \\ &\psi'_{1r} \to \psi' \ \text{ in } L^2(0, T; V_1). \end{aligned}$$

Un noto risultato sui sistemi di equazioni differenziali ordinarie assicura, per ogni $r \in \mathbf{N}$, l'esistenza di un unico

$$(u_{1r}, u_{2r}) \in \prod_{\ell=1}^{2} H^1(0, T; V_{\ell r})$$

tale che:

$$(15) \quad u_{\ell r}(0) = u_{\ell 0},$$

$$(16) \quad \begin{aligned} &(u'_{1r}(t), z_{1i})_1 + a_1(t, u_{1r}(t), z_{1i}) + \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} ([u_{1r}(t) + \psi_{1r}(t) - u_{2r}(t)]^-, z_{1i}) = \langle f_1(t), z_{1i} \rangle_1, \\ &(u'_{2r}(t), z_{2i})_2 + a_2(t, u_{2r}(t), z_{2i}) + \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} ([u_{1r}(t) + \psi_{1r}(t) - u_{2r}(t)]^-, z_{2i}) = \langle f_2(t), z_{2i} \rangle_2 \\ &\text{q.o. su }]0, T[\quad \forall i \in \{1, \dots, r\}. \end{aligned}$$

Le (16) implicano che, q.o. su $]0, T[$:

$$\begin{aligned} &(u'_{1r}(t), u'_{1r}(t) + \psi'_{1r}(t))_1 + a_1(t, u_{1r}(t), u'_{1r}(t) + \psi'_{1r}(t)) + \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} ([u_{1r}(t) + \psi_{1r}(t) - u_{2r}(t)]^-, u'_{1r}(t) + \psi'_{1r}(t)) = \\ &\quad = (f_{11}(t), u'_{1r}(t) + \psi'_{1r}(t))_1 + \langle f_{12}(t), u'_{1r}(t) + \psi'_{1r}(t) \rangle_1, \\ &(u'_{2r}(t), u'_{2r}(t))_2 + a_2(t, u_{2r}(t), u'_{2r}(t)) + \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} ([u_{1r}(t) + \psi_{1r}(t) - u_{2r}(t)]^-, u'_{2r}(t)) = \\ &\quad = (f_{21}(t), u'_{2r}(t))_2 + \langle f_{22}(t), u'_{2r}(t) \rangle_2 . \end{aligned}$$

Sommando membro a membro tali uguaglianze, tenendo presente la (3), la (15) e l'ipotesi $u_{10} + \psi(0) \geqslant u_{20}$ su Ω, si perviene alla relazione:

$$\forall t \in [0, T] \quad (1 - \eta) \sum_1^2{}_\ell \int_0^t |u'_{\ell r}(s)|_\ell^2\, ds + \tfrac{1}{2}(c' - \eta) \sum_1^2{}_\ell \|u_{\ell r}(t)\|_\ell^2 +$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon} |[u_{1r}(t) + \psi_{1r}(t) - u_{2r}(t)]^-|^2 \leqslant \left(\frac{1}{2\eta} + c'' + 1\right)\left(\int_0^T [\|\psi'_{1r}(t)\|_1^2 +\right.$$

$$+ \|f_{\ell 2}(t)\|^2_{V'_1}]\, dt + \sum_1^2{}_\ell [\|u_{\ell 0}\|^2 + \|f_{\ell 2}\|^2_{C^0([0,T],V'_\ell)} + \int_0^T [|f_{\ell 1}(t)|^2_\ell +$$

$$+ \|f'_{\ell 2}(t)\|^2_{V'_\ell}]\, dt]) + (c'' + 1) \int_0^t [\sum_1^2{}_\ell \|u_{\ell r}(s)\|^2_\ell]\, ds$$

qualunque sia $\eta > 0$,

da cui, utilizzando il lemma di Gronwall e portando in conto la seconda delle (14), si deduce che:

$$\sum_1^2{}_\ell [\|u_{\ell r}\|_{C^0([0,T],V_\ell)} + \|u'_{\ell r}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\ell))}] \leqslant c,$$
$$\text{con } c = c(f_{\ell 1}, f_{\ell 2}, f'_{\ell 2}, \psi', u_{\ell 0}, c', c'').$$

Pertanto esiste un $(\tilde{u}_{1\varepsilon}, \tilde{u}_{2\varepsilon}) \in \prod_{\ell=1}^2 [L^\infty(0,T;V_\ell) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega_\ell))]$

tale che, a meno di estratte, per $r \to +\infty$:

$$u_{\ell r} \to \tilde{u}_{\ell\varepsilon} \text{ in } L\ \ (0,T;V_\ell) \qquad \text{debolmente *}.$$
$$u'_{\ell r} \to \tilde{u}'_{\ell\varepsilon} \text{ in } L^2(0,T;L^2(\Omega_\ell)) \qquad \text{debolmente}.$$

Evidentemente $\tilde{u}_{1\varepsilon}$ e $\tilde{u}_{2\varepsilon}$ verificano la (13), e la (11) in virtù della (15). Sfruttando poi la prima delle (14) e le (11), (15), (16), è facile stabilire che:

$$\lim_{r\to+\infty}{}'' \int_0^T ([u_{1r}(t) + \psi_{1r}(t) - u_{2r}(t)]^-, [u_{1r}(t) + \psi_{1r}(t) - u_{2r}(t)] +$$
$$- [\tilde{u}_{1\varepsilon}(t) + \psi(t) - \tilde{u}_{2\varepsilon}(t)])\, dt \leqslant 0\,,$$

da cui, seguendo un noto procedimento basato sulla monotonia e l'emicontinuità del termine non lineare, si deduce che:

$[u_{1r} + \psi_{1r} - u_{2r}]^- \to [\tilde{u}_{1\varepsilon} + \psi - \tilde{u}_{2\varepsilon}]^-$ in $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ debolmente *.

Sussistono quindi anche le (12).

Osserviamo ora che, per la (13), esistono

$$(u_1, u_2) \in \prod_{\ell=1}^2 [L\ \ (0,T;V_\ell) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega_\ell))]$$

ed una successione infinitesima $\{\varepsilon_n\}$ di numeri positivi tali che, per $n \to +\infty$:

$$(17)\quad \begin{array}{lll} \tilde{u}_{\ell\varepsilon_n} \to u_\ell & \text{in } L^\infty(0,T;V_\ell) & \text{debolmente *}, \\ \tilde{u}'_{\ell\varepsilon_n} \to u'_\ell & \text{in } L^2(0,T;L^2(\Omega_\ell)) & \text{debolmente}; \end{array}$$

ciò, unitamente alla (11), comporta che:

$$u_\ell(0) = u_{\ell 0}.$$

Rimane dunque da far vedere che:

(18) $(u_1, u_2) \in \mathbf{K}$,

(19) $\sum_1^2{}_\ell \int_0^T [(u'_\ell(t), v_\ell(t) - u_\ell(t))_\ell +$

$+ a_\ell(t, u_\ell(t), v_\ell(t) - u_\ell(t)) - (f_{\ell 1}(t), v_\ell(t) - u_\ell(t))_\ell +$

$- < f_{\ell 2}(t), v_\ell(t) - u_\ell(t) >_\ell]\, dt \geqslant 0 \quad \forall\, (v_1, v_2) \in \mathbf{K}.$

A tale scopo sia $(v_1, v_2 \in \mathbf{K}$. Risultando q.o. su $]0, T[$:

$([\tilde{u}_{1\varepsilon_n}(t) + \psi(t) - \tilde{u}_{2\varepsilon_n}(t)]^-, v_1(t) + \psi(t) - v_2(t)) \leqslant 0,$
$([\tilde{u}_{1\varepsilon_n}(t) + \psi(t) - \tilde{u}_{2\varepsilon_n}(t)]^-, [\tilde{u}_{1\varepsilon_n}(t) - v_1(t)] - [\tilde{u}_{2\varepsilon_n}(t) - v_2(t)]) \geqslant 0,$

si ha per le (11), (12):

(20) $\frac{1}{\varepsilon_n} \int_0^T |[\tilde{u}_{1\varepsilon_n}(t) + \psi(t) - \tilde{u}_{2\varepsilon_n}(t)]^-|^2 dt \leqslant$

$\leqslant \sum_1^2{}_\ell \int_0^T [(f_{\ell 1}(t), \tilde{u}_{\ell\varepsilon_n}(t) - v_\ell(t))_\ell +$

$+ < f_{\ell 2}(t), \tilde{u}_{\ell\varepsilon_n}(t) - v_\ell(t) >_\ell - a_\ell(t, \tilde{u}_{\ell\varepsilon_n}(t), \tilde{u}_{\ell\varepsilon_n}(t) - v_\ell(t)) +$

$- (\tilde{u}'_{\ell\varepsilon_n}(t), \tilde{u}_{\ell\varepsilon_n}(t) - v_\ell(t))_\ell]\, dt,$

(21) $\sum_1^2{}_\ell \int_0^T [(\tilde{u}'_{\ell\varepsilon_n}(t), v_\ell(t))_\ell + a_\ell(t, \tilde{u}_{\ell\varepsilon_n}(t), v_\ell(t)) - (f_{\ell 1}(t), v_\ell(t) +$

$- \tilde{u}_{\ell\varepsilon_n}(t))_\ell - < f_{\ell 2}(t), v_\ell(t) - \tilde{u}_{\ell\varepsilon_n}(t) >_\ell]\, dt \geqslant$

$\geqslant \sum_1^2{}_\ell [\tfrac{1}{2} |\tilde{u}_{\ell\varepsilon_n}(T)|^2_\ell - \tfrac{1}{2} |u_{\ell 0}|^2_\ell + \int_0^T a_\ell(t, \tilde{u}_{\ell\varepsilon_n}(t), \tilde{u}_{\ell\varepsilon_n}(t))\, dt].$

Passando al limite per $n \to +\infty$, e tenendo conto delle (17), dalla (20) si ricava che:

$$\int_0^T |[u_1(t) + \psi(t) - u_2(t)]^-|^2 dt = 0,$$

cioè la (18), e dalla (21) la (19).

La dimostrazione relativa al caso:

$\psi \in H^1(0, T; W_2), \qquad \psi'(t) \in V_2,$

è del tutto analoga.

TEOREMA 3. - *Si supponga che:*

i4) $\psi \in H^2(0, T; W_1)$ [*risp.* $\psi \in H^2(0, T; W_2)$] *con* $\psi'(t), \psi''(t) \in V_1$ [*risp.* $\psi'(t), \psi''(t) \in V_2$], $\psi(0) = \psi_1 + \psi_2$ *con* $\psi_1 \in V_1$ [*risp.* $\psi_1 \in V_2$] *e* $\psi_2 \geqslant 0$ *su* Ω,

i5) $u_{\ell 0} \in V_\ell, A_\ell(0)\, u_{\ell 0} \in L^2(\Omega_\ell), u_{10} + \psi(0) \geqslant u_{20}$ *su* Ω.

Se V_ℓ *è separabile, e se* $f_\ell \in H^{1,1}(0, T; L^2(\Omega_\ell))$, *allora il problema* (P) *ammette una (e una sola) soluzione* (u_1, u_2), *e si ha:*

$u'_\ell \in L^2(0,T; V_\ell) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega_\ell))$.

Dim. Ci limiteremo a dimostrare una proposizione preliminare analoga alla α_2) del teorema 2, in quanto da essa si perviene all'asserto con lo stesso procedimento seguito nel suddetto teorema.

Esaminando come nel teorema 2 uno solo dei due casi, precisamente il caso:

$$\psi \in H^2(0,T; W_1), \qquad \psi'(t), \psi''(t) \in V_1, \qquad \psi_1 \in V_1,$$

dimostriamo che:

α_3) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un (unico) $(\tilde{u}_{1\varepsilon}, \tilde{u}_{2\varepsilon}) \in \prod_{\ell=1}^{2} H^1(0,T; V_\ell)$, con

$\tilde{u}'_{\ell\varepsilon} \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega_\ell))$, tale da verificare le (11), (12), e si ha:

$$(22)\quad \sum_1^2{}_\ell \, [\| \tilde{u}_{\ell\varepsilon} \|_{C^0([0,T], V_\ell)} + \| \tilde{u}'_{\ell\varepsilon} \|_{L^2(0,T; V_\ell)} + \\ + \| \tilde{u}'_{\ell\varepsilon} \|_{L^\infty(0,T; L^2(\Omega_\ell))}] \leqslant c,$$

con $c = c(f_\ell, f'_\ell, \psi, \psi', \psi'', \psi_1, \psi_2, A_\ell(0), u_{\ell 0}, c', c'')$.

Proveremo l'esistenza di $(\tilde{u}_{1\varepsilon}, \tilde{u}_{2\varepsilon})$ seguendo il metodo di Faedo-Galerkin. Conserveremo le notazioni introdotte nel teorema 2, scegliendo $\{z_{1i}\}$ in modo che anche ψ_1 appartenga a V_{12}, e precisiamo che ora, per $r \to +\infty$:

$$(23)\quad \begin{aligned} &\psi_{1r} \to \psi \ \text{ in } C^0([0,T], W_1), \\ &\psi'_{1r} \to \psi' \ \text{ in } C^0([0,T], V_1), \\ &\psi''_{1r} \to \psi'' \ \text{ in } L^2(0,T; V_1), \end{aligned}$$

che $(u_{1r}, u_{2r}) \in \prod_{\ell=1}^{2} H^{2,1}(0,T; V_{\ell r})$, e che le (16) sussistono per ogni $t \in [0,T]$ essendo i loro membri assolutamente continui in $[0,T]$.

Ciò premesso, mostriamo che:

$$(24)\quad \sum_1^2{}_\ell \int_0^T \| u_{\ell r}(t) \|_\ell^2 \, dt \leqslant c, \ \text{ con } c = c(f_\ell, \psi, \psi', \psi_1, \psi_2, u_{\ell 0}, c', c'').$$

Poiché $\psi_{1r}(t) - \psi_2 \in V_{1r}$ con $r \geqslant 2$, per la prima delle (16) si ha, per ogni $t \in [0,T]$:

$$(u'_{1r}(t), u_{1r}(t) + \psi_{1r}(t) - \psi_2)_1 + a_1(t, u_{1r}(t), u_{1r}(t) + \psi_{1r}(t) - \psi_2) + \\ + \frac{1}{\varepsilon}([u_{1r}(t) + \psi_{1r}(t) - u_{2r}(t)]^-, u_{1r}(t) + \psi_{1r}(t) - \psi_2) = \\ = (f_1(t), u_{1r}(t) + \psi_{1r}(t) - \psi_2)_1;$$

per la seconda delle (16) si ha poi, per ogni $t \in [0,T]$:

$$(u'_{2r}(t), u_{2r}(t))_2 + a_2(t, u_{2r}(t), u_{2r}(t)) +$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}([u_{1r}(t) + \psi_{1r}(t) - u_{2r}(t)]^-, u_{2r}(t)) = (f_2(t), u_{2r}(t))_2 .$$

Pertanto, tenendo presente la (15) e l'ipotesi $\psi_2 \geqslant 0$ su Ω, risulta:

$$(c' - 2\eta \max\{c'', 1\}) \int_0^T [\| u_{1r}(t) + \psi_{1r}(t) - \psi_2 \|_1^2 +$$
$$+ \| u_{2r}(t)\|_2^2] \, dt \leqslant \tfrac{1}{2} [| u_{10} + \psi_1 |_1^2 + | u_{20} |_2^2] +$$
$$+ \frac{1}{2\eta} \int_0^T [| f_1(t)|_1^2 + | f_2(t)|_2^2 + | \psi'_{1r}(t)|_1^2 +$$
$$+ c'' \| \psi_{1r}(t) - \psi_2 \|_1^2] \, dt \qquad \forall \eta > 0 ,$$

da cui la (24) in virtù della prima e della seconda delle (23).

Mostriamo ancora che:

$$(25) \quad \sum_1^2{}_\ell [\| u_{\ell r} \|_{C^0([0,T], V_\ell)} + \| u'_{\ell r} \|_{L^2(0,T; V_\ell)} +$$
$$+ \| u'_{\ell r} \|_{L^\infty(0,T; L^2(\Omega_\ell))}] \leqslant c ,$$

con $c = c(f_\ell, f'_\ell, \psi, \psi', \psi'', \psi_1, \psi_2, A_\ell(0), u_{\ell 0}, c', c'')$.

Ponendo $t = 0$ nelle (16), e sfruttando l'ipotesi i_5), intanto si ha:

$$(26) \quad | u'_{\ell r}(0)|_\ell \leqslant | f_\ell(0)|_\ell + | A_\ell(0) \, u_{\ell 0} |_\ell .$$

D'altra parte dalle (16), derivate rispetto a t, si ottengono le relazioni valide q.o. su $]0, T[$:

$$(u''_{1r}(t) + \psi''_{1r}(t), u'_{1r}(t) + \psi'_{1r}(t))_1 + a_1(t, u'_{1r}(t) + \psi'_{1r}(t), u'_{1r}(t) +$$
$$+ \psi'_{1r}(t)) + a'_1(t, u_{1r}(t), u'_{1r}(t) + \psi'_{1r}(t)) + \frac{1}{\varepsilon}(\frac{d}{dt}[u_{1r}(t) +$$
$$+ \psi_{1r}(t) - u_{2r}(t)]^-, u'_{1r}(t) + \psi'_{1r}(t)) = (f'_1(t), u'_{1r}(t) + \psi'_{1r}(t))_1 +$$
$$+ (\psi''_{1r}(t), u'_{1r}(t) + \psi'_{1r}(t))_1 + a_1(t, \psi'_{1r}(t), u'_{1r}(t) + \psi'_{1r}(t)),$$
$$(u''_{2r}(t), u'_{2r}(t))_2 + a_2(t, u'_{1r}(t), u'_{2r}(t)) + a'_2(t, u_{2r}(t), u'_{2r}(t)) +$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}(\frac{d}{dt}[u_{1r}(t) + \psi_{1r}(t) - u_{2r}(t)]^-, u'_{2r}(t)) = (f'_2(t), u'_{2r}(t))_2 .$$

Quindi rilevato che:

$$(\frac{d}{dt}[u_{1r}(t) + \psi_{1r}(t) - u_{2r}(t)]^-, u'_{1r}(t) + \psi'_{1r}(t) - u'_{2r}(t)) \geqslant 0$$

q.o. su $]0, T[$, si ha:

$$(\tfrac{1}{2} - \eta) \sup_{t \in [0,T]} [|u'_{1r}(t) + \psi'_{1r}(t)|_1^2 + |u'_{2r}(t)|_2^2] +$$
$$+ [c' - \eta(2c'' + 1)] \int_0^T [\|u'_{1r}(t) + \psi'_{1r}(t)\|_1^2 + \| u'_{2r}(t)\|_2^2]\, dt \leqslant$$
$$\leqslant [|u'_{1r}(0) + \psi'_{1r}(0)|_1^2 + |u'_{2r}(0)|_2^2] +$$
$$+ \frac{1}{\eta} \max\{c'', 1\} [\sum_1^2{}_\ell (\int_0^T |f'_\ell(t)|_\ell\, dt)^2 + \sum_1^2{}_\ell \int_0^T \| u_{\ell r}(t)\|_\ell^2\, dt +$$
$$+ \int_0^T \| \psi'_{1r}(t)\|_1^2\, dt + \int_0^T |\psi''_{1r}(t)|_1^2\, dt] \qquad \text{per } 0 < \eta < c'/(2c'' + 1).$$

Ne segue la (25) in virtù della (15), della seconda e terza delle (23), e delle (24), (26).

La (25) implica l'esistenza di un elemento

$$(\tilde{u}_{1\varepsilon}, \tilde{u}_{2\varepsilon}) \in \prod_{\ell=1}^{2} H^1(0,T; V_\ell),$$

con $\tilde{u}'_{\ell\varepsilon} \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega_\ell))$, tale che, a meno di estratte, per $r \to +\infty$:

$$u_{\ell r} \to \tilde{u}_{\ell\varepsilon} \text{ in } L^\infty(0,T; V_\ell) \qquad \text{debolmente}^*,$$
$$u'_{\ell r} \to \tilde{u}'_{\ell\varepsilon} \text{ in } L^2(0,T; V_\ell) \qquad \text{debolmente},$$
$$u'_{\ell r} \to \tilde{u}'_{\ell\varepsilon} \text{ in } L^\infty(0,T; L^2(\Omega_\ell)) \qquad \text{debolmente}^*.$$

Vale allora la (22) a causa della (25). Inoltre, sussistendo le (15), (16) e la prima delle (23), si ha che $(\tilde{u}_{1\varepsilon}, \tilde{u}_{2\varepsilon})$ verifica le (11), (12).

OSSERVAZIONE. Nelle ipotesi del teorema 1 [risp. 2] la componente u_ℓ della soluzione del problema (P), eventualmente modificata su un insieme di misura nulla, è debolmente continua da $[0,T]$ in V_ℓ [9] (Lemma 8.1, pag. 297).

2. In questo numero dimostreremo due teoremi di esistenza per il problema (Q). Per entrambi supporremo verificate le (3), (4) e la disuguaglianza:

(27) $a_\ell(T,z,z) - a_\ell(0,z,z) \geqslant \gamma \| z \|_\ell^2 \quad \forall z \in V_\ell$ con $\gamma = \text{cost.} \geqslant 0$,

e che si abbia:

(28) $f_{\ell 2}(T) - f_{\ell 2}(0) \in L^2(\Omega_\ell)$ se $\gamma = 0$.

Mentre il teorema 1 relativo al problema (P) si stabilisce, come si è visto, utilizzando un noto teorema di esistenza delle soluzioni forti, l'analogo teorema di questo numero (teorema 4) si fonda su un teorema di esistenza delle soluzioni deboli. Il successivo teorema 5 si consegue utilizzando, come nel teorema 2, i metodi di penalizzazione e di Faedo-Galerkin, e riconducendo la questione ad un problema di punto fisso.

Nella esposizione dei procedimenti dimostrativi sorvoleremo sulle considerazioni che sono analoghe a quelle dei teoremi del n. 1, soffermandoci invece sulle varianti introdotte, ovviamente necessarie per la diversa natura dei problemi (P) e (Q).

TEOREMA 4. - *Nelle ipotesi* (3), (4), (27) *e* (28), *se:*

i_6) $\psi \in H^1(0,T;L^2(\Omega)), \psi'(t) \geqslant 0$ *su* $\Omega\ \forall t \in [0,T], \psi(0) = \psi(T)$,

il problema (Q) *ammette una (e una sola) soluzione* (u_1, u_2), *e si ha:*

$u_\ell \in H^1(0,T;L^2(\Omega_\ell))$.

Dim. Anzitutto argomentazioni analoghe a quelle addotte per la α_1) del teorema 1 ci consentono di asserire che:

α_4) Se $(v_1, v_2) \in \mathbf{K}$, detto $v_{\ell\varepsilon}(\varepsilon > 0)$ l'elemento di $H^1(0,T;V_\ell)$ soluzione del problema [4] (corollario 1.2, pag. 14):

$$\varepsilon v'_{\ell\varepsilon}(t) + v_{\ell\varepsilon}(t) = v_\ell(t) \quad \text{q.o. su }]0,T[,$$
$$v_{\ell\varepsilon}(0) = v_{\ell\varepsilon}(T),$$

risulta:

$$(v_{1\varepsilon}, v_{2\varepsilon}) \in \mathbf{K},$$
$$v_{\ell\varepsilon} \to v_\ell \text{ in } L^2(0,T;V_\ell) \text{ per } \varepsilon \to 0.$$

Pertanto, se la (27) sussiste con $\gamma > 0$, l'asserto discende da un teorema dimostrato in [2] (teorema 4, pag. 255), in quanto si ha, per ogni $v_\ell \in H^1(0,T;V_\ell)$ con $v_\ell(0) = v_\ell(T)$:

$$\int_0^T [a_\ell(t, v_\ell(t), v'_\ell(t)) - < f_{\ell 2}(t), v'_\ell(t) >_\ell]\, dt \geqslant$$
$$\geqslant -c'' \int_0^T \| v_\ell(t)\|_\ell^2\, dt - \frac{1}{2\gamma} \| f_{\ell 2}(T) - f_{\ell 2}(0)\|_{V'_\ell}^2 +$$
$$- \frac{1}{2c''} \int_0^T \| f'_{\ell 2}(t)\|_{V'_\ell}^2\, dt.$$

Passando a considerare l'eventualità che sia $\gamma = 0$, in primo luogo rileviamo che esiste un unico elemento $(u_1, u_2) \in \mathbf{K}$ tale che:

$$(29)\quad \sum_1^2{}_\ell \int_0^T [< v'_\ell(t), v_\ell(t) - u_\ell(t) >_\ell + a_\ell(t, u_\ell(t), v_\ell(t) - u_\ell(t)) +$$
$$- < f_\ell(t), v_\ell(t) - u_\ell(t) >_\ell]\, dt \geqslant 0$$
$$\forall (v_1, v_2) \in \mathbf{K} \text{ con } v_\ell \in H^1(0,T;V'_\ell) \text{ e } v_\ell(0) = v_\ell(T).$$

L'esistenza di (u_1, u_2) è assicurata dalla coercività uniforme rispetto a t di $a_\ell(t, w, z)$ [3] (teorema II.1, pag. 63); l'unicità è conseguenza della α_4) e della suddetta uniforme coercività [1] (teorema 38, pag. 146).

Evidentemente, stante la α_4), resta da stabilire che:

(30) $u_\ell \in H^1(0,T;L^2(\Omega_\ell))$, $\quad u_\ell(0)=u_\ell(T)$.

Alle (30) si perviene utilizzando la α_4) con riferimento a (u_1,u_2), e ponendo poi nella (29) $v_\ell = u_{\ell\varepsilon}$. Infatti, così facendo, si riesce a maggiorare la norma:

$$\|u'_{\ell\varepsilon}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\ell))}$$

con una costante indipendente da ε, e ciò basta per l'acquisizione delle (30). Operando in tal senso, l'unica difficoltà è rappresentata dal prodotto scalare:

$$(f_{\ell 2}(T)-f_{\ell 2}(0),u_{\ell\varepsilon}(0))_\ell .$$

Poiché:

$$u_{\ell\varepsilon}(0)=\frac{1}{\varepsilon(1-e^{-T/\varepsilon})}\int_0^T e^{(s-T)/\varepsilon}u_\ell(s)\,ds,$$

l'ostacolo si supera dimostrando preliminarmente che:

(31) $u_\ell \in C^0([0,T],L^2(\Omega_\ell))$.

A tal fine sia $\{g_{\ell n}\}$ una successione di elementi di $L^2(0,T;L^2(\Omega_\ell))$ convergente verso f_ℓ in $L^2(0,T;V'_\ell)$. La α_4) e la disuguaglianza:

$$\int_0^T a_\ell(t,v_\ell(t),v'_\ell(t))\,dt \geqslant -\frac{c''}{2}\int_0^T \|v_\ell(t)\|_\ell^2\,dt$$

$$\forall v_\ell \in H^1(0,T;V_\ell) \text{ con } v_\ell(0)=v_\ell(T),$$

implicano [2] (teorema 4, pag. 255) che esiste un (unico) elemento $(u_{1n},u_{2n})\in\mathbf{K}$, con $u_{\ell n}\in H^1(0,T;L^2(\Omega_\ell))$ e $u_{\ell n}(0)=u_{\ell n}(T)$, tale che:

$$\sum_1^2{}_\ell\,[(u'_{\ell n}(t),v_\ell(t)-u_{\ell n}(t))_\ell + a_\ell(t,u_{\ell n}(t),v_\ell(t)-u_{\ell n}(t)) +$$
$$-(g_{\ell n}(t),v_\ell(t)-u_{\ell n}(t))_\ell] \geqslant 0 \text{ q.o. su }]0,T[\quad \forall (v_1,v_2)\in\mathbf{K}.$$

Risultando ovviamente:

$$\sum_1^2{}_\ell\,[(u'_{\ell m}(t)-u'_{\ell n}(t),u_{\ell m}(t)-u_{\ell n}(t))_\ell +$$
$$+a_\ell(t,u_{\ell m}(t)-u_{\ell n}(t),u_{\ell m}(t)-u_{\ell n}(t))] \leqslant$$
$$\leqslant \sum_1^2{}_\ell\,(g_{\ell m}(t)-g_{\ell n}(t),u_{\ell m}(t)-u_{\ell n}(t))_\ell \quad \text{q.o. su }]0,T[,$$

si ha, q.o. su $]0,T[$:

(32) $$\sum_1^2{}_\ell\,[\frac{d}{dt}|u_{\ell m}(t)-u_{\ell n}(t)|_\ell^2 + c'\|u_{\ell m}(t)-u_{\ell n}(t)\|_\ell^2] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{c'} \sum_1^2 {}_\ell \, \| g_{\ell m}(t) - g_{\ell n}(t) \|^2_{V'_\ell} ,$$

nonché, conseguentemente:

$$(33) \quad \sum_1^2 {}_\ell \, [\frac{d}{dt} | u_{\ell m}(t) - u_{\ell n}(t) |^2_\ell + c' | u_{\ell m}(t) - u_{\ell n}(t) |^2_\ell] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{c'} \sum_1^2 {}_\ell \, \| g_{\ell m}(t) - g_{\ell n}(t) \|^2_{V'_\ell}$$

La (32) implica che:

$$(34) \quad c' \sum_1^2 {}_\ell \int_0^T \| u_{\ell m}(t) - u_{\ell n}(t) \|^2_\ell \, dt \leqslant \frac{1}{c'} \sum_1^2 {}_\ell \int_0^T \| g_{\ell m}(t) - g_{\ell n}(t) \|^2_{V'_\ell} \, dt$$

$$(35) \quad \forall t \in [0, T] \quad \sum_1^2 {}_\ell \, | u_{\ell m}(t) - u_{\ell n}(t) |^2_\ell \leqslant \sum_1^2 {}_\ell \, [| u_{\ell m}(0) - u_{\ell n}(0) |^2_\ell +$$

$$+ \frac{1}{c'} \int_0^T \| g_{\ell m}(t) - g_{\ell n}(t) \|^2_{V'_\ell} \, dt] .$$

Moltiplicando ambo i membri della (33) per $e^{c't}$ e integrando su $[0, T]$, si ha anche:

$$(36) \quad (e^{c'T} - 1) \sum_1^2 {}_\ell \, | u_{\ell m}(0) - u_{\ell n}(0) |^2_\ell \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{c'T}}{c'} \sum_1^2 {}_\ell \int_0^T \| g_{\ell m}(t) - g_{\ell n}(t) \|^2_{V'_\ell} \, dt .$$

Dalle (34), (35), (36) si trae l'esistenza di un

$$\tilde{u}_\ell \in L^2(0, T; V_\ell) \cap C^0([0, T], L^2(\Omega_\ell))$$

tale che, per $n \to +\infty$:

$$u_{\ell n} \to \tilde{u}_\ell \text{ in } L^2(0, T; V_\ell),$$

$$u_{\ell n} \to \tilde{u}_\ell \text{ in } C^0([0, T], L^2(\Omega_\ell)).$$

E' immediato verificare che $\tilde{u}_\ell = u_\ell$, onde la (31).

TEOREMA 5. - *Se V_ℓ è separabile, il teorema 4 sussiste anche sostituendo l'ipotesi* i$_6$) *con la seguente:*

$$\psi \in H^1(0, T; W_1) \ [\textit{risp.}\ \psi \in H^1(0, T; W_2)]$$

$$\textit{con } \psi'(t) \in V_1 \ [\textit{risp.}\ \psi'(t) \in V_2],$$

$$\psi(0) = \psi_1 + \psi_2 \textit{ con } \psi_1 \in V_1 \ [\textit{risp.}\ \psi_1 \in V_2]$$

$$\text{e } \psi_2 \geqslant 0 \textit{ su } \Omega, \psi(0) = \psi(T).$$

Dim. Limitandoci al caso:

$\psi \in H^1(0,T; W_1)$, $\psi'(t) \in V_1$, $\psi_1 \in V_1$,

basta dimostrare che:

α_5) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un unico

$$(\tilde{u}_{1\varepsilon}, \tilde{u}_{2\varepsilon}) \in \prod_{\ell=1}^{2} [L^2(0,T; V_\ell) \cap H^1(0,T; L^2(\Omega_\ell))]$$

tale da verificare le (12) e la condizione:

(37) $\tilde{u}_{\ell\varepsilon}(0) = \tilde{u}_{\ell\varepsilon}(T)$,

e si ha:

(38) $\sum_{1}^{2}{}_\ell [\|\tilde{u}_{\ell\varepsilon}\|_{L^2(0,T; V_\ell)} + \|\tilde{u}_{\ell\varepsilon}\|_{L^2(0,T; L^2(\Omega_\ell))}] \leqslant c$,

con $c = c(f_\ell, \psi, \psi_1, \psi_2, \psi', c', c'')$.

Tralasciando l'unicità, che è ovvia, proveremo l'esistenza di $(\tilde{u}_{1\varepsilon}, \tilde{u}_{2\varepsilon})$ servendoci del metodo di Faedo-Galerkin e di un noto teorema di punto fisso.

Scegliamo una base $\{z_{\ell i}\}$ di V_ℓ in modo che, denotato con $V_{\ell r}$ lo spazio generato da $\{z_{\ell 1}, \dots, z_{\ell r}\}$, si abbia:

$\psi_1 \in V_{11}$.

Introduciamo quindi la funzione ψ_{1r} considerata nel teorema 2, ed osserviamo che ora, oltre alle (14), si ha anche:

(39) $\psi_{1r}(0) = \psi_{1r}(T)$,

avendo supposto $\psi(0) = \psi(T)$.

Fissato (u_{10}, u_{20}) in $V_{1r} \times V_{2r}$, e indicato con (u_{1r}, u_{2r}) l'elemento di $\prod_{\ell=1}^{2} H^1(0,T; V_{\ell r})$ soluzione del problema (15), (16), mostriamo che:

(40) Esiste un $\delta > 0$, con $\delta = \delta(f_\ell, \psi_1, \psi', c', c'')$, tale che:

$$|u_{10} + \psi_1|_1^2 + |u_{20}|_2^2 \leqslant \delta^2 \Rightarrow |u_{1r}(T) + \psi_1|_1^2 + |u_{2r}(T)|_2^2 \leqslant \delta^2 .$$

La prima delle (16), con $u_{1r}(t) + \psi_{1r}(t) - \psi_2$ al posto di z_{1i}, e la seconda, con $u_{2r}(t)$ in luogo di z_{2i}, sommate membro a membro danno luogo, unitamente all'ipotesi $\psi_2 \geqslant 0$ su Ω, alla disuguaglianza:

$$(41)\quad \frac{d}{dt}[|u_{1r}(t) + \psi_{1r}(t) - \psi_2|_1^2 + |u_{2r}(t)|_2^2] +$$
$$+ c'[\|u_{1r}(t) + \psi_{1r}(t) - \psi_2\|_1^2 + \|u_{2r}(t)\|_2^2] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{c'}([\|f_1(t)\|_{V'_1} + \|\psi'(t)\|_1 + c''\int_0^T \|\psi'(t)\|_1\, dt + c''\|\psi_1\|_1]^2 +$$
$$+ \|f_2(t)\|_{V'_2}^2) \quad \text{q.o. su }]0,T[.$$

Indicato con $g(t)$ il secondo membro della (41), si ha ovviamente:

$$\frac{d}{dt}(e^{c't}[|u_{1r}(t)+\psi_{1r}(t)-\psi_2|_1^2+|u_{2r}(t)|_2^2]) \leqslant e^{c'T}g(t)$$

q.o. su $]0,T[$,

e di qui, integrando su $[0,T]$:

$$e^{c'T}[|u_{1r}(T)+\psi_1|_1^2+|u_{2r}(T)|_2^2] \leqslant |u_{10}+\psi_1|_1^2+|u_{20}|_2^2+c.$$

con $c = c(f_\ell, \psi_1, \psi', c', c'')$,

in virtù della (15) e del fatto che $\psi_{1r}(T)-\psi_2=\psi_{1r}(0)-\psi_2=\psi_1$. Ne segue la (40), assumendo:

$$\delta^2 \geqslant \frac{c}{e^{c'T}-1}.$$

Denotiamo con S la sfera chiusa di $L^2(\Omega_1)\times L^2(\Omega_2)$ di centro $(-\psi_1,0)$ e raggio δ, e, per ogni $(u_{10},u_{20})\in S\cap(V_{1r}\times V_{2r})$, con (u_{1r},u_{2r}) la corrispondente soluzione del problema (15), (16). Consideriamo quindi l'operatore F:

$$(u_{10},u_{20}) \to (u_{1r}(T),u_{2r}(T)).$$

In base alla (40) F applica $S\cap(V_{1r}\times V_{2r})$ in sé. Aggiungiamo che F è non espansivo.

Infatti se (u_{10},u_{20}), $(\bar u_{10},\bar u_{20})$ sono elementi di $S\cap(V_{1r}\times V_{2r})$, e (u_{1r},u_{2r}), $(\bar u_{1r},\bar u_{2r})$ sono le corrispondenti soluzioni del problema (15), (16), è facile constatare che:

$$\frac{d}{dt}[|u_{1r}(t)-\bar u_{1r}(t)|_1^2+|u_{2r}(t)-\bar u_{2r}(t)|_2^2] \leqslant 0 \quad \text{q.o. su} \quad]0,T[,$$

da cui:

$$|u_{1r}(T)-\bar u_{1r}(T)|_1^2+|u_{2r}(T)-\bar u_{2r}(T)|_2^2 \leqslant$$
$$\leqslant |u_{10}-\bar u_{10}|_1^2+|u_{20}-\bar u_{20}|_2^2.$$

Quanto ora stabilito comporta che F ammette almeno un punto unito [5] (teorema 2, pag. 24).

Resta così acquisita l'esistenza di un (unico) elemento

$$(u_{1r},u_{2r}) \in \prod_{\ell=1}^{2} H^1(0,T;V_{\ell r})$$

soddisfacente alle (16) e tale che:

(42) $u_{\ell r}(0) = u_{\ell r}(T)$.

Dalla (41), sussistendo la prima delle (14) e la (40), si desume che:

$$(43)\quad \sum_{1}^{2}{}_{\ell} \| u_{\ell r} \|_{C^0([0,T], L^2(\Omega_\ell))} \leqslant c,$$

$$(44)\quad \sum_{1}^{2}{}_{\ell} \| u_{\ell r} \|_{L^2(0,T; V_\ell)} \leqslant c,$$

dove $c = c(f_\ell, \psi, \psi_1, \psi_2, \psi', c', c'')$. Sfruttando poi le (16) con $u'_{1r}(t) + \psi_{1r}(t)$ e $u'_{2r}(t)$ in luogo rispettivamente di z_{1i} e z_{2i}, e tenendo presente le (3), (4), (27), (39), (42), si ottiene la disuguaglianza:

$$(1-\eta) \sum_{1}^{2}{}_{\ell} \int_0^T | u'_{\ell r}(t)|^2_\ell \, dt + \gamma/2 \sum_{1}^{2}{}_{\ell} \| u_{\ell r}(0) \|^2_\ell \leqslant$$

$$\leqslant (c'' + 1 + 1/2\eta) \Big(\sum_{1}^{2}{}_{\ell} \int_0^T [\| u_{\ell r}(t) \|^2_\ell + | f_{\ell 1}(t)|^2_\ell +$$

$$+ \| f'_{\ell 2}(t) \|^2_{V'_\ell}] \, dt + \int_0^T [\| \psi'_{1r}(t) \|^2_1 + \| f_{12}(t) \|^2_{V'_1}] \, dt \Big) +$$

$$+ \sum_{1}^{2}{}_{\ell} < f_{\ell 2}(T) - f_{\ell 2}(0), u_{\ell r}(0) >_\ell \quad \forall \eta > 0,$$

da cui:

$$(45)\quad \sum_{1}^{2}{}_{\ell} \int_0^T | u'_{\ell r}(t)|^2_\ell \, dt \leqslant c, \quad \text{con } c = c(f_\ell, \psi, \psi_1, \psi_2, \psi', c', c'')$$

in virtù della seconda delle (14) e della (44) se $\gamma > 0$, ed inoltre delle (28), (43) se $\gamma = 0$.

Le (44), (45) implicano l'esistenza di un elemento

$$(\tilde{u}_{1\varepsilon}, \tilde{u}_{2\varepsilon}) \in \prod_{\ell=1}^{2} [L^2(0,T; V_\ell) \cap H^1(0,T; L^2(\Omega_\ell))]$$

tale che, a meno di estratte, per $r \to +\infty$:

$u_{\ell r} \to \tilde{u}_{\ell \varepsilon}$ in $L^2(0,T; V_\ell)$ debolmente,

$u'_{\ell r} \to \tilde{u}'_{\ell \varepsilon}$ in $L^2(0,T; L^2(\Omega_\ell))$ debolmente.

Ovviamente $(\tilde{u}_{1\varepsilon}, \tilde{u}_{2\varepsilon})$ soddisfa alla (38), ed alla (37) a causa della (42). Le (12) sono conseguenza delle (16).

3. Vogliamo ora studiare, limitatamente ad un caso particolare, la regolarità «rispetto a x» della soluzione dei problemi (P) e (Q).

Siano $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, con Ω aperto di R^n limitato e connesso di classe $C^{1,1}$,

$$V_1 = V_2 = H^1_0(\Omega),\ f_\ell \in L^2(0,T; L^2(\Omega)),\ \psi \in L^2(0,T; H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)).$$

Siano dati gli operatori:

$$A_\ell(t) = -\sum_{1}^{n}{}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}^\ell(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}) + c^\ell(t,x),$$

con $a_{ij}^\ell = a_{ji}^\ell$ e c^ℓ soddisfacenti alle condizioni seguenti:

(46) $a_{ij}^\ell \in C^1([0,T] \times \bar{\Omega})$,

(47) $c^\ell \in C^0([0,T] \times \bar{\Omega})$,

(48) $\dfrac{\partial c^\ell}{\partial t} \in C^0([0,T] \times \bar{\Omega})$,

(49) $\sum_{1}^{n}{}_{ij} a_{ij}^\ell(t,x)\lambda_i\lambda_j \geqslant c_0|\lambda|^2 \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \bar{\Omega}$

e $\forall \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in R^n$ $(c_0 = \text{cost.} > 0)$,

(50) $a_\ell(t,z,z) = \sum_{1}^{n}{}_{ij} \int_\Omega a_{ij}^\ell(t,x) z_{x_i} z_{x_j}\, dx +$

$+ \int_\Omega c^\ell(t,x) z^2\, dx \geqslant c' \|z\|^2_{H_0^1(\Omega)}$

$\forall t \in [0,T]$ e $\forall z \in H_0^1(\Omega)$ $(c' = \text{cost.} > 0)$.

Per la funzione ψ, supponiamo inoltre che sia verificata una delle condizioni seguenti:

$\psi \in H^1(0,T; L^2(\Omega))$ con $\psi'(t) \geqslant 0$ su Ω,

$\psi \in H^1(0,T; H_0^1(\Omega))$.

TEOREMA 6. - *Nelle ipotesi poste, se u_{10} e u_{20} sono elementi di $H_0^1(\Omega)$ tali che $u_{10} + \psi(0) \geqslant u_{20}$ su Ω [risp. se $\psi(0) = \psi(T)$ e $a_\ell(T,z,z) - a_\ell(0,z,z) \geqslant 0$ $\forall z \in H_0^1(\Omega)$], per la soluzione (u_1, u_2) del problema* (P) [*risp.* (Q)] *si ha:*

$u_\ell \in L^2(0,T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T; L^2(\Omega))$

[*risp.* $u_\ell \in L^2(0,T; H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T; L^2(\Omega))$].

Dim. In virtù dei teoremi 1 e 2 [risp. 4 e 5] risulta:

$u_\ell \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T; L^2(\Omega))$

[risp. $u_\ell \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T; L^2(\Omega))$],

in particolare:

(51) $u'_\ell \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$.

Si tratta quindi di stabilire che:

(52) $u_\ell \in L^2(0,T; H^2(\Omega))$.

Stante la (51), con la stessa tecnica adoperata in [6] (teorema II) si dimostra che:

(53) $u_\ell \in L^2(0,T; H^2(\Omega'))$ per ogni aperto Ω' a chiusura contenuta in Ω.

Pertanto la (52) resta acquisita non appena si è mostrato che:

(54) Per ogni $\bar{x} \in \partial\Omega$ esiste un intorno aperto I di $\bar{x}$ tale che:

$u_\ell \in L^2(0,T; H^2(I \cap \Omega))$.

Siano U un intorno aperto di $\bar{x}$ e $U^+ = U \cap \Omega$. Ammettiamo, senza venir meno alla generalità, che $\bar{x}$ sia l'origine di R^n, che U coincida con la sfera S_r di R^n di centro l'origine e raggio r, e U^+ con la semisfera Σ_r intersezione di S_r col semispazio $x_n > 0$. Fissati $r' \in]0, r[$ e $\chi \in \underset{0}{C}^{1,1}(S_r)$, con $0 \leqslant \chi \leqslant 1$ e $\chi = 1$ su $\bar{S}_{r'}$, indicato con F_ℓ l'elemento di $L^2(0,T; L^2(\Sigma_r))$:

$$f_\ell \chi - \sum_{1}^{n}{}_{ij}\, a^\ell_{ij}\, u_{\ell x_i} \chi_{x_j} - \sum_{1}^{n}{}_{ij} (a^\ell_{ij}\, u_\ell \chi_{x_i})_{x_j},$$

e posto:

$$\mathbf{K}' = \{v \in L^2(0,T; \underset{0}{H}{}^1(\Sigma_r)) \mid v(t) \geqslant -\chi\psi(t) + \chi u_2(t)$$
$$\text{su } \Sigma_r \text{ q.o. su }]0,T[\},$$

procedendo come in [12] (teorema 3), si vede che:

(55) $[A_1(\chi u_2)]^+ \in L^2(0,T; L^2(\Sigma_r))$,

(56) $$\sum_{1}^{2}{}_\ell\, [\chi u'_\ell(t) + A_\ell(t)\,(\chi u_\ell(t)) - F_\ell(t)] = 0$$

nel senso di $\mathcal{D}'(\Sigma_r)$ q.o. su $]0,T[$,

e che, oltre alle ovvie relazioni:

(57) $\chi u_1 \in \mathbf{K}', \chi u_1(0) = \chi u_{10}$ [risp. $\chi u_1(0) = \chi u_1(T)$],

risulta:

(58) $$\int_0^T [(\chi u'_1(t), v(t) - \chi u_1(t)) + a_1(t, \chi u_1(t), v(t) - \chi u_1(t)) +$$
$$- (F_1(t), v(t) - \chi u_1(t))]\, dt \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathbf{K}',$$

dove $(\cdot,\cdot)$ denota il prodotto scalare in $L^2(\Sigma_r)$.

Proviamo che:

(59) $\chi u_1 \in L^2(0,T; H^2(\Sigma_r))$.

Siano $\{\varepsilon_n\}$ una successione infinitesima di numeri positivi e,

$$\forall n \in N, \tilde{u}_n \in L^2(0,T; \underset{0}{H}{}^1(\Sigma_r)) \cap H^1(0,T; L^2(\Sigma_r))$$

la soluzione del problema [2] (teorema 4, pag. 255):

(60) $\tilde{u}_n(0) = \chi u_{10}$ [risp. $\tilde{u}_n(0) = \tilde{u}_n(T)$],

(61) $$\int_0^T [(\tilde{u}'_n(t), v(t)) + a_1(t, \tilde{u}_n(t), v(t)) +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon_n}([\tilde{u}_n(t) + \chi\psi(t) - \chi u_2(t)]^-, v(t))]\, dt =$$
$$= \int_0^T (F_1(t), v(t))\, dt \qquad \forall v \in L^2(0, T; H_0^1(\Sigma_r)).$$

Poiché per le (53), (55):

$$([A_1(t)(\chi u_2(t))]^+, [\tilde{u}_n(t) + \chi\psi(t) - \chi u_2(t)]^-) +$$
$$- a_1(t, \chi u_2(t), [\tilde{u}_n(t) + \chi\psi(t) - \chi u_2(t)]^-) \leqslant 0$$
q.o. su $]0, T[$,

ponendo nella (61) $v(t) = [\tilde{u}_n(t) + \chi\psi(t) - \chi u_2(t)]^-$, e tenendo conto della (60), si ha:

$$\frac{1}{\varepsilon_n}\int_0^T |[\tilde{u}_n(t) + \chi\psi(t) - \chi u_2(t)]^-|^2 dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^T (F_1(t) + \chi\psi'(t) - \chi u'_2(t) + A_1(t)(\chi\psi(t)) +$$
$$- [A_1(t)(\chi u_2(t))]^+, [\tilde{u}_n(t) + \chi\psi(t) - \chi u_2(t)]^-)\, dt,$$

da cui:

(62) $$\frac{1}{\varepsilon_n} \| [\tilde{u}_n + \chi\psi - \chi u_2]^- \|_{L^2(0,T;\, L^2(\Sigma_r))} \leqslant c,$$
con $c = c(F_1, A_1, \chi, \psi, \psi', u_2, u'_2)$.

Maggiorazioni analoghe si ottengono allora per le norme:

$$\|\tilde{u}_n\|_{L^2(0,T;\, H_0^1(\Sigma_r))}, \|\tilde{u}'_n\|_{L^2(0,T;\, H^{-1}(\Sigma_r))},$$
$$\|\tilde{u}'_n + A_1\tilde{u}_n\|_{L^2(0,T;\, L^2(\Sigma_r))}.$$

Esiste dunque un

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Sigma_r)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Sigma_r))$$

tale che, a meno di estratte, per $n \to +\infty$:

(63) $\tilde{u}_n \to u$ in $L^2(0, T; H_0^1(\Sigma_r))$ debolmente,

(64) $\tilde{u}'_n \to u'$ in $L^2(0, T; H^{-1}(\Sigma_r))$ debolmente,

(65) $\tilde{u}'_n + A_1\tilde{u}_n \to u' + A_1 u$ in $L^2(0, T; L^2(\Sigma_r))$ debolmente.

A partire dalle (60), (61), (62), e sfruttando le (63), (64), è facile verificare che u è soluzione del problema:

$$u \in L^2(0,T; H^1_0(\Sigma_r)) \cap H^1(0,T; H^{-1}(\Sigma_r)),$$

$$u \in \mathbf{K}', u(0) = \chi u_{10} \ [\text{risp.}\, u(0) = u(T)],$$

$$\int_0^T [< u'(t), v(t) - u(t) > + a_1(t, u(t), v(t) - u(t)) +$$
$$- (F_1(t), v(t) - u(t))]\, dt \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathbf{K}',$$

avendo indicato con $< \cdot , \cdot >$ la dualità tra $H^1_0(\Sigma_r)$ e $H^{-1}(\Sigma_r)$.

Pertanto, sussistendo le (57), (58), e l'unicità della soluzione del suddetto problema, deve essere $u = \chi u_1$, e quindi per le (51), (65) risulta q.o. su $]0, T[$:

$$A_1(t)(\chi u_1(t)) \in L^2(\Sigma_r) \text{ nel senso di } \mathfrak{D}'(\Sigma_r),$$

da cui la (59) [11], [10] (Lemma 2.1, pag. 106). La (56), unitamente alle (51), (59), assicura che anche χu_2 appartiene a $L^2(0,T; H^2(\Sigma_r))$. La (54) è così dimostrata, e con essa l'asserto.

Assumiamo ora:

$$f_\ell \in H^{1,1}(0,T; L^2(\Omega)), \quad \psi \in H^2(0,T; H^1_0(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega)),$$

e, più in generale:

$$A_\ell(t) = - \sum_{ij\,1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} (a^\ell_{ij}(t,x) \frac{\partial}{\partial x_i}) + \sum_{i\,1}^{n} b^\ell_i(t,x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c^\ell(t,x).$$

Ammettiamo ancora valide la (46), la (47) e la (48) con riferimento anche a b^ℓ_i, la (49), e la (50) con:

$$a_\ell(t,z,z) = \sum_{ij\,1}^{n} \int_\Omega a^\ell_{ij}(t,x)\, z_{x_i} z_{x_j}\, dx +$$
$$+ \sum_{i\,1}^{n} \int_\Omega b^\ell_i(t,x)\, z_{x_i} z\, dx + \int_\Omega c^\ell(t,x)\, z^2\, dx$$
$$\forall t \in [0,T] \text{ e } \forall z \in H^1_0(\Omega).$$

TEOREMA 7. - *Nelle condizioni sopra precisate, se*

$$u_{\ell 0} \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega) \ e \ u_{10} + \psi(0) \geqslant u_{20} \ su \ \Omega,$$

allora per la soluzione (u_1, u_2) *del problema* (P) *si ha:*

$$u_\ell \in L^2(0,T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T; H^1_0(\Omega)), \quad u'_\ell \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)).$$

La dimostrazione del teorema 7, che si basa sul teorema 3, è sostanzialmente simile a quella del teorema 6. L'unica variante risiede nell'acquisire l'esistenza della soluzione del problema (60), (61): ciò si consegue utilizzando il metodo di Faedo-Galerkin.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BRÉZIS, *Équations et inéquations dans les espaces vectoriels en dualité,* Ann. Inst. Fourier, 18 (1968), 115-175.

[2] H. BRÉZIS, *Inéquations variationnelles associées à des opérateurs d'évolution.* Theory and applications of monotone operators (A. Ghizzetti ed.), NATO Summer School Venice, Oderisi, 1969.

[3] H. BRÉZIS, *Problèmes unilatéraux,* J. Math. Pures Appl., 51 (1972), 1-168.

[4] H. BRÉZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert,* Math. Studies 5, North-Holland, 1973.

[5] F. BROWDER, *Problèmes non linéaires,* Conférences à Montreal, 1965.

[6] A. ESPOSITO, *Un problema differenziale unilaterale del quarto ordine in due variabili,* Boll. Un. Mat. Ital., (6) 2-A (1983).

[7] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires,* Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[8] J. L. LIONS, *Sur quelques questions d'Analyse, de Mécanique et de Contrôl Optimal,* Conférences à Montreal, 1976.

[9] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications,* vol. 1, Dunod, 1968.

[10] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications,* vol. 2, Dunod, 1968.

[11] J. NECAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques,* Masson, 1967.

[12] R. TOSCANO - A. GALLO, *Proprietà di regolarità della soluzione di una disequazione variazionale connessa a due operatori ellittici del secondo ordine,* in corso di stampa su «Ricerche di Matematica».

[13] M. BIROLI, *Sur un'inéquation parabolique avec convexe dépendant du temps,* Ricerche di Matematica, 23 (1974), 203-222.

[14] M. BIROLI, *Sur les inéquations d'évolution avec convexe dépendant du temps,* Ricerche di Matematica, 23 (1974), 1-48.

[15] M. BIROLI, *Existence and Meyers estimate for the solutions of some nonlinear parabolic unilateral problems,* Ricerche di Matematica, 32 (1983), 63-73.

[16] H. BRÉZIS, *Un problème d'évolution avec contraintes unilatérales dépendant du temps,* C.R.A.S., 273 (1972).

[17] P. CHARRIER - G. M. TROIANIELLO, *On strong solutions to parabolic unilateral problems with obstacle dependent on time,* Jour. Math. Anal. and Appl., 65 (1978), 110-125.

[18] F. MIGNOT - J. P. PUEL, *Solution maximum de certaines inéquations d'évolution paraboliques et inéquations quasi-variationnelles paraboliques,* C.R.A.S., 280 (1975), 259-262.

[19] J. NAUMANN, *Periodic solutions to certain evolution inéqualities,* Czech. Math. Jour., 27 (1977), 424-433.