SELEZIONI CONTINUE ED EQUAZIONI DIFFERENZIALI MULTIVOCHE (*)

di TIZIANA CARDINALI e ANTONELLA FIACCA (a Perugia) (**)

SOMMARIO. - *Si dimostra l'esistenza di soluzioni per il problema* $x' \in F(t,x)$, $x(0) = 0$, *ove* F *è una multifunzione a valori nei sottoinsiemi compatti, non vuoti, di un sottospazio* $X \subseteq \mathbf{R}^n$, *localmente compatto. Il risultato ottenuto contiene strettamente i teoremi di esistenza conseguiti in* [4] *e* [5] *e ne estende altri.*

SUMMARY. - *The existence of solutions for the problem* $x' \in F(t,x)$, $x(0) = 0$, *where* F *is a multivalued mapping taking as its values nonempty compact subsets in a locally compact subspace* $X \subseteq \mathbf{R}^n$, *is proved. The main result contains strictly some existence theorems (*[4], [5]*).*

§ 1. Introduzione

Molti Autori ([1]$_{1,2,3}$, [2], [3], [4], [5], [6]$_{1,2}$, [7], [8]) si sono occupati dell'esistenza di soluzioni per il problema

$$(1.1) \qquad \begin{cases} x' \in F(t,x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

ove «F» è una multifunzione definita in un insieme di $\mathbf{R}^{n+1}$ conte-

(*) Pervenuto in Redazione il 2 giugno 1984. Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue applicazioni del Consiglio Nazionale delle Ricerche.
(**) Indirizzo degli Autori: Dipartimento di Matematica dell'Università - Via Vanvitelli, 1 - 06100 Perugia.

nente il punto (t_0, x_0) e a valori in una famiglia, *non* vuota, di sottoinsiemi *non* vuoti di $\mathbf{R}^n$.

Altri Autori ([9]$_{1,2}$, [10], [11]$_{1,2}$, [12]) hanno studiato il problema in spazi di Banach.

H. Kaczýnski - C. Olech [4] hanno considerato il problema (1.1) nel caso in cui «F» è una multifunzione definita in $[0,1] \times \mathbf{R}^n$ e a valori in una famiglia *non* vuota di sottoinsiemi compatti di $\mathbf{R}^n$, provando che una soluzione del problema esiste se:

i) $F(\cdot, x)$ è misurabile, $\forall x \in \mathbf{R}^n$;

ii) $F(t, \cdot)$ è continua, $\forall t \in [0,1]$;

iii) esiste una funzione sommabile $\alpha : [0,1] \to \mathbf{R}^+$ con la proprietà:
$$y \in F(t,x) \Rightarrow \|y\| \leqslant \alpha(t), \text{ q.o. in } [0,1], \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

In [5] viene studiato, in un diverso contesto, il problema (1.1), di cui l'esistenza di soluzioni è conseguita senza l'ipotesi iii), banalmente verificata.

Recentemente A. Bressan [7] ha provato, nello stesso contesto di cui in [5], che il problema (1.1) ha soluzioni se la multifunzione «F» è semicontinua inferiormente.

Noi qui abbiamo ripreso in esame il problema (1.1) nel caso in cui «F» è una multifunzione definita in $[0,T] \times B$, ove «B» è un chiuso di $\mathbf{R}^n$ contenente la boccia $B[0,r], r > 0$, e a valori in una famiglia *non* vuota di compatti *non* vuoti di un sottospazio localmente compatto di $\mathbf{R}^n$: abbiamo conseguito un Teorema di selezione (cfr. Teorema 2) e un Teorema di esistenza (cfr. Teorema 3).

Per noi una soluzione del problema esiste se:

j) $F(\cdot, x)$ è misurabile, $\forall x \in B$;

jj) $F(t, \cdot)$ è semicontinua inferiormente e ha grafo chiuso, $\forall t \in I = [0,T]$;

jjj) esiste una funzione sommabile $\alpha : I \to \mathbf{R}^+$, con $\int_0^T \alpha(t)\,dt \leqslant r$, con la proprietà:
$$y \in F(t,x) \Rightarrow \|y\| \leqslant \alpha(t), \text{ q.o. in } I, \forall x \in B.$$

Poiché ogni multifunzione con le proprietà richieste nei Teoremi di cui in [4] e in [5] verifica le ipotesi del nostro Teorema di esistenza ed esistono peraltro multifunzioni che verificano le ipotesi della nostra proposizione ma non quelle dei citati Teoremi (cfr. qui Osservazione 2), il nostro risultato contiene strettamente i Teoremi di H. Kaczýnski - C. Olech e di H. A. Antosiewicz - A. Cellina. Esso inoltre estende il Teorema di esistenza conseguito da A. Bressan in [7], nel senso che esistono multifunzioni che verificano le ipotesi del nostro Teorema di esistenza ma *non* quelle della citata proposizione di A. Bressan (cfr. qui Osservazione 3). Infine, nel caso di spazi euclidei, essa contiene strettamente il recente Teorema di esistenza di M. Kisielewicz [12] (cfr. qui Osservazione 4).

§ **2.** Siano I l'intervallo *non* degenere $[0,T]$, μ la misura di Lebesgue su I, X un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ e $\{\operatorname{comp} X\}$ la famiglia *non* vuota dei sottoinsiemi *non* vuoti e compatti di X.

Per ogni coppia di insiemi $A, B \in \{\operatorname{comp} X\}$, sia $D(A,B)$ la distanza di Hausdorff di A e B.

Indichiamo con $B[A,\varepsilon]$ l'insieme $B[A,\varepsilon] = \{b : d(b,A) \leqq \varepsilon\}$, ove $d(b,A) = \inf_{a \in A} \| b - a \|$ e $\| \cdot \|$ è una norma in $\mathbf{R}^n$, e con $\Delta(A)$ il diametro dell'insieme A.

Essendo inoltre $\mathcal{C}(I)$ e $L^1(I)$ gli spazi di Banach delle funzioni $u : I \to \mathbf{R}^n$ rispettivamente continue e integrabili secondo Lebesgue, indichiamo con $\| \cdot \|_{\mathcal{C}}$ e $\| \cdot \|_{L^1}$ le relative norme.

La multifunzione $F : I \times \mathbf{R}^n \to \{\operatorname{comp} X\}$ è detta (cfr. [7]) «semicontinua inferiormente» in $I \times \mathbf{R}^n$ se:
(S.I.) $\forall z_0 \in I \times \mathbf{R}^n$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ con la proprietà:

$$F(z_0) \subseteq B[F(z),\varepsilon], \ \forall z \in I \times \mathbf{R}^n \text{ con}^{(1)} \ d(z,z_0) \leqq \delta .$$

Una soluzione del problema

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} x' \in F(t,x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

è un'applicazione $x : I \to \mathbf{R}^n$ assolutamente continua (A.C.) con le proprietà:

$$\text{(2.2}_1\text{)} \qquad x'(t) \in F(t,x(t)) \quad \text{q.o. in } I,$$

$$\text{(2.2}_2\text{)} \qquad x(0) = 0 .$$

§ **3.** Sussiste il seguente

LEMMA 1 - *Siano H un sottoinsieme chiuso di $I = [0,T]$, B un sottoinsieme chiuso di $\mathbf{R}^n$ contenente la boccia $B[0,r]$, $r > 0$, e $F : H \times B \to \{\operatorname{comp} X\}$ una multifunzione con le proprietà:*

i) *«F» sia semicontinua inferiormente in $H \times B$;*

ii) *esista una funzione $\alpha : I \to \mathbf{R}^+$, $\alpha \in L^1(I)$, con $\int_0^T \alpha(t)\, dt \leqslant r$, tale*

(1) Qui «d» è la metrica in $I \times \mathbf{R}^n$.

che:

$$y \in F(t,x) \Rightarrow \|y\| \leqslant \alpha(t), \ \forall x \in B, \ q.o. \ su \ H.$$

In queste ipotesi, posto

$$\mathcal{K} = \{u : I \to \mathbf{R}^n, \ u \in (A.C.), \ u(0) = 0, \ \|u'(t)\| \leqslant \alpha(t) \ q.o. \ in \ I\},$$

e fissati $u_0 \in \mathcal{K}$ *e* $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, *esistono un numero* $\rho > 0$ *e un compatto* $E \subseteq H$ *con le proprietà:*

(3.1$_1$) $\mu(H - E) \leqslant \varepsilon'$,

(3.1$_2$) $F(t, u_0(t)) \subseteq B[F(t,u(t)), \varepsilon], \ \forall u \in \mathcal{K}$ *con* $\|u - u_0\|_{\mathcal{C}} \leqslant \rho$, $\forall t \in E$.

Si vede facilmente che la multifunzione $t \mapsto F(t, u_0(t))$ è semicontinua inferiormente e quindi (cfr. [9]$_2$, Corollario III.3) misurabile. Esiste allora (cfr. [13], Teorema 4.2) un compatto $E \subseteq H$, con $\mu(H - E) \leqslant \varepsilon'$, tale che la restrizione della predetta multifunzione all'insieme E è continua. Pertanto, in corrispondenza di $\varepsilon/2 > 0$, esiste un numero $\sigma = \sigma(\varepsilon/2) > 0$ con la proprietà:

(3.2) $D(F(t_1, u_0(t_1)), F(t_2, u_0(t_2))) \leqslant \varepsilon/2, \ \forall t_1, t_2 \in E$ con $|t_1 - t_2| \leqslant \sigma$.

D'altra parte, essendo l'insieme $E_0 = \{(t, u_0(t)), t \in E\}$ compatto, è possibile ricoprirlo con un numero finito di bocce aperte $\mathring{B}_i$, $i = 1, \ldots, m$, con centro nei punti $(t_i, u_0(t_i)), t_i \in E$, e raggio ρ_i, $\rho_i \leqslant \sigma$, scelto, come in (S.I.), in corrispondenza di $\varepsilon/2$ e $(t_i, u_0(t_i))$.

Se $t \in E$ e $(t,x) \in \mathring{B}_i$, per qualche i, dalla (3.2) e dalla (S.I.) segue:

(3.3) $F(t, u_0(t)) \subseteq B[F(t_i, u_0(t_i)), \varepsilon/2] \subseteq B[F(t,x), \varepsilon]$.

Scelto ora $\rho > 0$, tale che:

(3.4) $B[E_0, \rho] \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathring{B}_i$,

per ogni $u \in \mathcal{K}$ con $\|u - u_0\|_{\mathcal{C}} \leqslant \rho$ e per ogni $t \in E$, tenendo presente (3.3) e (3.4), segue:

(3.5) $F(t, u_0(t)) \subseteq B[F(t, u(t)), \varepsilon]$, c.v.d.

Proviamo ora una proposizione che utilizzeremo più avanti per conseguire il Teorema 2.

TEOREMA 1. - *Siano verificate le ipotesi del Lemma* 1. *In queste condizioni esiste un'applicazione continua* $g : \mathcal{K} \to L^1(I)$ *tale che, per ogni* $u \in \mathcal{K}$, *risulta* $g(u)(t) \in F(t, u(t))$ *q.o. in* H.

Dal Lemma 1, per ogni $u \in \mathcal{K}$ e in corrispondenza di $\varepsilon = \varepsilon' = 2^{-1}$, esistono un numero $\rho_0 = \rho_0(u) > 0$ e un compatto $E_0 = E_0(u) \subseteq H$ tali che:

(3.6) $\quad \mu(H - E_0(u)) \leqslant 2^{-1}$,

(3.7) $\quad F(t, u(t)) \subseteq B[F(t, \tilde{u}(t)), 2^{-1}], \quad \forall \tilde{u} \in \mathcal{K}, \| u - \tilde{u} \|_{\mathcal{C}} \leqslant \rho_0, \forall t \in E_0.$

Poiché $\mathcal{K}$ è compatto (cfr. [14], Lemma II), è possibile ricoprirlo con un numero finito di bocce aperte $U_i^o = \overset{o}{B}[u_i^o, \rho_0(u_i^o)/2], i = 1, \ldots, N_0$. Sia ora $\{p_i^o\}_{i=1,\ldots,N_0}$ una partizione continua dell'unità subordinata a questa copertura. Determinata una funzione misurabile $v_i^o : H \to \mathbf{R}^n$, $i = 1, \ldots, N_0$, tale che $v_i^o(t) \in F(t, u_i^o(t))$, $t \in H$ (cfr. [13], Teorema 5.1), dall'ipotesi ii) segue che $v_i^o \in L^1(I)$.

Se poniamo:

(3.8$_0$) $\quad A_i^{o+} = E_0(u_i^o), A_i^{o-} = H - A_i^{o+}, i = 1, \ldots, N_0,$

risulta:

(3.9) $\quad \mu(A_i^{o+}) \geqslant h - 2^{-1}, \mu(A_i^{o-}) \leqslant 2^{-1}$, ove h è la misura di H.

Sia $\Gamma^{N_0} = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{N_0}),\ 0 \leqslant \lambda_i \leqslant h, \sum_{i=1}^{N_0} \lambda_i = h\}$. Per ogni $\lambda \in \Gamma^{N_0}$ costruiamo per induzione una partizione $(J_1^o(\lambda), \ldots, J_{N_0}^o(\lambda))$ dell'insieme H: supponiamo cioè che sia stato definito $J_k^o(\lambda)$ per ogni $k < i$ e costruiamo l'insieme $J_i^o(\lambda)$. Posto:

$$(3.10) \qquad Y_i^o(\lambda) = H - \bigcup_{k<i} J_k^o(\lambda);\ Y_i^{o+}(\lambda) = Y_i^o(\lambda) \cap A_i^{o+},$$

$$Y_i^{o-}(\lambda) = Y_i^o(\lambda) \cap A_i^{o-},$$

e definita l'applicazione $\varphi_{i,\lambda}^o : Y_i^o(\lambda) \to \mathbf{R}$, ove

$$(3.11) \qquad \varphi_{i,\lambda}^o(t) = \begin{cases} \mu([0,t] \cap Y_i^{o+}(\lambda)) & \text{se } t \in Y_i^{o+}(\lambda), \\ \mu([0,t] \cap Y_i^{o-}(\lambda)) + \mu(Y_i^{o+}(\lambda)) & \text{se } t \in Y_i^{o-}(\lambda), \end{cases}$$

sia:

$$(3.12) \qquad J_i^o(\lambda) = \varphi_{i,\lambda}^{o\,-1}([0, \lambda_i]).$$

Per ogni $u \in \mathcal{K}$, definiamo $Y_i^o(u), \varphi_{i,u}^o, J_i^o(u)$ come in (3.10), (3.11) e (3.12), ove si assuma $\lambda = (h p_1^o(u), \ldots, h p_{N_0}^o(u))$.

Costruiamo poi la funzione $g_0 : \mathcal{K} \to L^1(I)$ ponendo:

$$(3.13_0) \qquad g_0(u)(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N_0} \chi_{J_i^o(u)}(t) \cdot v_i^o(t) & \text{se } t \in H, \\ Q & \text{se } t \in I - H, \end{cases}$$

ove $Q \in X$ e $\chi_{J_i^o(u)}$ è la funzione caratteristica di $J_i^o(u)$.

Da (3.7) e (3.8_0) segue che:

(3.14) $$d(g_0(u)(t), F(t, u(t))) \leqslant 2^{-1},$$

$$\forall t \in \bigcup_{i=1}^{N_0} (J_i^0(u) \cap A_i^{0+}) - V_{0,u}\,(2), \forall u \in \mathcal{K}.$$

Proviamo ora che l'applicazione $g_0 : \mathcal{K} \to L^1(I)$ è continua. Intanto, per ogni $P, P \subseteq \Gamma^{N_0}$, con $\Delta(P) \leqslant \delta, \delta > 0$, andiamo a definire i due insiemi

(3.15) $$\Lambda = \{t \in H : \exists i, \exists \lambda, \lambda' \in P \text{ con } t \in J_i^0(\lambda), t \notin J_i^0(\lambda')\},$$

(3.16) $$\Lambda_k = \{t \in H : \exists \lambda, \lambda' \in P \text{ con } t \in J_k^0(\lambda), t \notin J_k^0(\lambda')\}.$$

Risulta $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{N_0} \Lambda_k$ e, per essere $\mu(\Lambda_k) \leqslant k\delta$, segue:

(3.17) $$\mu(\Lambda) \leqslant (N_0)^2 \delta.$$

Poiché peraltro $\alpha \in L^1(I)$, esiste un numero $\gamma = \gamma(\varepsilon/N_0) > 0$ tale che, per ogni insieme F con $\mu(F) \leqslant \gamma$, si ha $\int_F \alpha(t)\, dt \leqslant \varepsilon/N_0$, ed essendo equicontinua la famiglia $\{p_i^0\}_{i=1,\ldots,N_0}$, esiste un numero $\delta^* > 0$ con la proprietà:

$$|p_i^0(u) - p_i^0(v)| \leqslant \gamma/h(N_0)^{5/2}, \forall u, v \in \mathcal{K} \text{ con } \|u - v\|_{\mathcal{C}} \leqslant \delta^*,$$
$$\forall i = 1, \ldots, N_0.$$

Sia ora $V \subseteq \mathcal{K}$ con $\Delta(V) \leqslant \delta^*$. Posto:

$$W = \{\lambda \in \Gamma^{N_0} : \lambda = (h\, p_1^0(u), \ldots, h\, p_{N_0}^0(u)), u \in V\},$$

è $\Delta(W) \leqslant \gamma/(N_0)^2$; pertanto (cfr. (3.17)) segue:

(3.18) $$\mu(\{t \in H : \exists i, \exists u, v \in V \text{ con } t \in J_i^0(u), t \notin J_i^0(v)\}) \leqslant \gamma.$$

Infine, per ogni $u, v \in \mathcal{K}$, con $\|u - v\|_{\mathcal{C}} \leqslant \delta^*$, risulta per l'appunto (cfr. (3.13_0) e (3.18)):

(3.19) $$\|g_0(u) - g_0(v)\|_{L^1} = \int_I \|g_0(u)(t) - g_0(v)(t)\|\, dt \leqslant \varepsilon.$$

Costruita così un'applicazione continua $g_0 : \mathcal{K} \to L^1(I)$ con la proprietà espressa da (3.14), andiamo a costruire un'applicazione continua $g_1 : \mathcal{K} \to L^1(I)$ con le proprietà (3.24_1) e (3.25_1). Siano intanto $\rho_1 = \rho_1(u) > 0$ e $E_1 = E_1(u) \subseteq H$ scelti come nel Lemma 1 in corrispondenza di $u \in \mathcal{K}$ e di $\varepsilon = \varepsilon' = 2^{-2}$. Inoltre, con lo stesso procedimento seguito per giungere alla (3.18), è possibile determinare un numero $\tau_1 > 0$ in modo che risulti:

---

(2) Abbiamo posto:

$$V_{0,u} = M_{0,u} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{N_0} A_i^{0+}\right),$$

ove $M_{0,u}$ è l'unione degli insiemi $J_i^0(u)$ aventi misura nulla.

(3.20) $\mu(\{t \in H : \exists i, \exists u, v \in V \text{ con } t \in J_i^{\circ}(u), t \notin J_i^{\circ}(v)\}) < 2^{-1}$
$\forall V \subset \mathcal{K} \text{ con } \Delta(V) < \tau_1.$

Posto:

(3.21) $0 < \Delta_1(u) < \tfrac{1}{2}\min\{\tau_1, \rho_1(u)\}, \ u \in \mathcal{K},$

sia:

$$\{U_i^1 = \overset{\circ}{B}[u_i^1, \Delta_1(u_i^1)]\}_{i=1,\dots,N_1}$$

una copertura aperta del compatto $\mathcal{K}$, e $\{p_i^1\}_{i=1,\dots,N_1}$ una partizione continua dell'unità ad essa subordinata.

La multifunzione $R_i^1 : H \to \{\text{comp}\, X\}$, ove

$$R_i^1(t) = \begin{cases} F(t, u_i^1(t)) \cap B[\{g_0(u_i^1)(t)\}, 2^{-1}] & se\ t \in H - W_0(u_i^1)^{(3)}, \\ F(t, u_i^1(t)) & se\ t \in W_0(u_i^1), \end{cases}$$

è misurabile ed esiste pertanto (cfr. [13], Teorema 5.1) una funzione $v_i^1 : H \to \mathbf{R}^n$ con le proprietà:

(3.22) $v_i^1(t) \in F(t, u_i^1(t)), \ \forall t \in H,$

(3.23) $\|v_i^1(t) - g_0(u_i^1)(t)\| \leq 2^{-1}, \ \forall t \in H - W_0(u_i^1).$

Poniamo anche qui, $\forall i = 1, \dots, N_1$,

(3.8$_1$) $A_i^{1+} = E_1(u_i^1), A_i^{1-} = H - A_i^{1+},$

e definiamo $Y_i^1(u), \varphi_{i,u}^1, J_i^1(u)$ come in (3.10), (3.11) e (3.12) ove si assuma $\lambda = (h p_1^1(u), \dots, h p_{N_1}^1(u)), u \in \mathcal{K}.$

Sia poi $g_1 : \mathcal{K} \to L^1(I)$, ove

(3.13$_1$) $$g_1(u)(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N_1} \chi_{J_i^1(u)}(t) \cdot v_i^1(t) & se\ t \in H, \\ Q & se\ t \in I - H. \end{cases}$$

Imitando il procedimento seguito per giungere alla continuità di «g_0» e alla (3.14), si prova che «g_1» è un'applicazione continua e che:

(3.24$_1$) $d(g_1(u)(t), F(t, u(t))) \leq 2^{-2},$

$$\forall t \in \bigcup_{i=1}^{N_1} (J_i^1(u) \cap A_i^{1+}) - V_{1,u}{}^{(4)}, \ \forall u \in \mathcal{K}.$$

Proviamo ora che risulta:

---

(3) Indichiamo $W_0(u_i^1) = \{t \in H : d(g_0(u_i^1)(t), F(t, u_i^1(t))) > 2^{-1}\}.$

(4) Abbiamo posto:

$$V_{1,u} = M_{1,u} \cap (\bigcup_{i=1}^{N_1} A_i^{1+}),$$

ove $M_{1,u}$ è l'unione degli insiemi $J_i^1(u)$ aventi misura nulla.

(3.25$_1$) $\mu(\{t \in I : d(g_1(u)(t), g_0(u)(t)) > 2^{-1}\}) < 2, \forall u \in \mathcal{K}$.

A tale scopo, fissato $u \in \mathcal{K}$ e posto

$$\mathfrak{J}_1(u) = \{i, 1 \leqslant i \leqslant N_1 : p_i^1(u) > 0\},$$

sia:

(3.26) $S_1 = \bigcup_{i \in \mathfrak{J}_1(u)} W_0(u_i^1)$ (3).

Poiché l'insieme $F_1 = \{u, u_i^1 : i \in \mathfrak{J}_1(u)\}$ ha diametro minore di τ_1 (cfr. (3.21)), da (3.14) e (3.20), tenendo presente che (cfr. [7], Teorema 1) $\mu(\bigcup_{i=1}^{N_0} (J_i^o(u) \cap A_i^{o-})) < 2^{-1}, \forall u \in \mathcal{K}$, segue:

(3.27) $\mu(S_1) \leqslant \mu(\bigcup_{v \in F_1} (\bigcup_{i=1}^{N_0} (J_i^o(v) \cap A_i^{o-}))) < 1$.

Posto poi:

$$D_1 = \{t \in H : \exists i \in \mathfrak{J}_1(u), g_0(u_i^1)(t) \neq g_0(u)(t)\},$$

per ogni $t \notin S_1 \cup D_1 \cup M_{1,u}$ (4) risulta $g_1(u)(t) = v_j^1(t)$, $j \in \mathfrak{J}_1(u)$; pertanto, dalla (3.23) segue:

(3.28) $d(g_1(u)(t), g_0(u)(t)) = d(v_j^1(t), g_0(u_j^1)(t)) \leqslant 2^{-1}$,

da cui, essendo $\mu(S_1 \cup D_1 \cup M_{1,u}) < 2$ (cfr. (3.20) e (3.27)), si consegue per l'appunto la (3.25$_1$).

E' subito visto che, per ogni $n > 1$, è possibile costruire una applicazione $g_n : \mathcal{K} \to L^1(I)$ continua e con le proprietà:

(3.24$_n$) $d(g_n(u)(t), F(t, u(t))) \leqslant 2^{-n-1}$,

$\forall t \in \bigcup_{i=1}^{N_n} (J_i^n(u) \cap A_i^{n+}) - V_{n,u}$ (5), $\forall u \in \mathcal{K}$,

(3.25$_n$) $\mu(\{t \in I : d(g_n(u)(t), g_{n-1}(u)(t)) > 2^{-n}\}) < 2^{-n+2}$, $\forall u \in \mathcal{K}$.

Dalla (3.25$_n$) segue che la successione $\{g_n(u)\}_n$ converge q.o. in I a una funzione $g(u)$, $\forall u \in \mathcal{K}$ (cfr. [16], Teorema 7.6) e poiché

(3.29) $\|g_n(u)(t)\| \leqslant \tilde{\alpha}(t)$ q.o. in $I, \forall n \in \mathbf{N}$,

ove

$$\tilde{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha(t) & se \quad t \in H, \\ \|Q\| & se \quad t \in I - H, \end{cases}$$

(5) Abbiamo posto anche qui:

$$V_{n,u} = M_{n,u} \cap (\bigcup_{i=1}^{N_n} A_i^{n+}),$$

ove $M_{n,u}$ è l'unione degli insiemi $J_i^n(u)$ aventi misura nulla.

la predetta successione converge in $L^1(I)$ alla funzione $g(u) \in L^1(I)$. Essendo tale convergenza uniforme rispetto a $u \in \mathcal{K}$, l'applicazione $g: \mathcal{K} \to L^1(I)$ è continua.

Proviamo infine che $g(u)(t) \in F(t, u(t))$ q.o. in H: basta osservare che la funzione $t \to d(g(u)(t), F(t, u(t)))$ è misurabile, che $\alpha \in L^1(I)$ e che (cfr. [7], Teorema I)

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N_n} (J_i^n(u) \cap A_i^{n-})\right) < 2^{-(n+1)}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Risulta infatti:

$$\begin{aligned}(3.30) \quad & \int_H d(g(u)(t), F(t, u(t)))\, dt \leqslant \\ & \leqslant \min\lim_{n \to +\infty} \int_H d(g_n(u)(t), F(t, u(t)))\, dt \leqslant \\ & \leqslant \min\lim_{n \to +\infty} \{2^{-n-1}\mu(H) + 2\int \alpha(t)\, dt\} \leqslant \varepsilon, \forall \varepsilon > 0,\end{aligned}$$

ove l'ultimo integrale è esteso all'insieme $\bigcup_{i=1}^{N_n} (J_i^n(u) \cap A_i^{n-})$.

Poiché l'insieme $F(t, u(t))$ è chiuso, segue infine che

$$g(u)(t) \in F(t, u(t))$$

q.o. in H, c.v.d.

Siamo ora in grado di provare il seguente

TEOREMA 2. - *Siano B un sottoinsieme chiuso di $\mathbf{R}^n$ contenente la boccia $B[0, r]$, $r > 0$, X un sottospazio localmente compatto*(6) *di $\mathbf{R}^n$ e $F: I \times B \to \{\text{comp } X\}$ una multifunzione con le proprietà:*

j) *$F(., x)$ sia misurabile, $\forall x \in B$;*

jj) *$F(t, .)$ abbia il grafo chiuso e sia semicontinua inferiormente, $\forall t \in I$;*

jjj) *esista una funzione $\alpha: I \to \mathbf{R}^+$, $\alpha \in L^1(I)$, con $\int_0^T \alpha(t)\, dt \leqslant r$, tale che*

$$y \in F(t, x) \Rightarrow \|y\| \leqslant \alpha(t), \text{ q.o. in } I, \forall x \in B.$$

In queste ipotesi, esiste una funzione continua $g: \mathcal{K} \to L^1(I)$ con la proprietà $g(u)(t) \in F(t, u(t))$ q.o. in I, $\forall u \in \mathcal{K}$.

---

(6) La richiesta che X sia un sottospazio localmente compatto di $\mathbf{R}^n$ è più generale della scelta $X = \mathbf{R}^n$. Infatti, il caso $X = \mathbf{R}^n$ è previsto dal nostro Teorema 2; d'altra parte, la multifunzione considerata più avanti nell'Esempio 2 verifica le ipotesi del nostro Teorema 2, laddove queste non sono più verificate (precisamente quella di grafo chiuso) se $X = \mathbf{R}$.

Intanto osserviamo che esiste (cfr. [6]$_2$, Teorema 4.1) una successione crescente $\{P_n\}_n$ di insiemi chiusi $P_n \subset I$, con $\mu(I - P_n) < 2^{-n}$, tali che la multifunzione $F_n = F / (P_n \times B)$ sia semicontinua inferiormente. Per il Teorema 1 esiste allora una funzione continua $g_n : \mathcal{K} \to L^1(I)$ con la proprietà:

(3.31) $\quad g_n(u)(t) \in F_n(t, u(t))$ *q.o. in* $P_n, \forall u \in \mathcal{K}$.

Costruiamo la successione $\{A_n\}_n$ di insiemi disgiunti, ove

$$A_1 = P_1 ; \; A_{n+1} = P_{n+1} - P_n, \; n \in \mathbf{N}.$$

Definita la funzione

$$g : u \mapsto g(u)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(u)(t) \chi_{A_n}(t), u \in \mathcal{K},$$

ove $A_0 = I - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $g_0(u)(t) = 0, \; \forall t \in A_0$, osserviamo intanto che $g(u) \in L^1(I)$, in quanto limite puntuale della successione $\{f_k\}_k$, ove

$$\text{(3.32)} \qquad f_k(t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{k} g_n(u)(t) \chi_{A_n}(t) & \text{se } t \in P_k, \\ 0 & \text{se } t \in I - P_k. \end{cases}$$

Per essere poi $\mu(I - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$, risulta:

(3.33) $\quad g(u)(t) \in F(t, u(t))$ *q.o. in* $I, \forall u \in \mathcal{K}$.

Resta da provare che la funzione $g : \mathcal{K} \to L^1(I)$ è continua. Infatti sia $\delta = \delta(\varepsilon/4) > 0$ con la proprietà:

(3.34) $\quad \mu(F) < \delta \Rightarrow \int_F \alpha(t)\, dt < \varepsilon/4$.

Essendo poi $\bar{k} \in \mathbf{N}$ tale che:

(3.35) $\quad \mu(I - \bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \delta, \; n \geq \bar{k}$,

per la continuità di "g_k", esiste un numero $\delta_k = \delta_k(\varepsilon/2\bar{k}) > 0$ con la proprietà:

$$\text{(3.36)} \qquad \int_{A_k} \| g_k(u)(t) - g_k(w)(t) \| \, dt \leq \| g_k(u) - g_k(w) \|_{L^1} \leq \varepsilon/2\bar{k},$$
$$\forall u, w \in \mathcal{K} \; con \; \| u - w \|_{\mathcal{C}} \leq \delta_k .$$

Posto infine $\delta^* = \min \{\delta_k\}_{k=1,\ldots,\bar{k}}$, tenendo presente (3.34), (3.35) e (3.36), risulta:

$$\text{(3.37)} \qquad \| g(u) - g(w) \|_{L^1} \leq \sum_{k=1}^{\bar{k}} \int_{A_k} \| g_k(u)(t) - g_k(w)(t) \| \, dt +$$

$$+ 2 \int_{I - \bigcup\limits_{k=1}^{\bar{k}} A_k} \alpha(t)\, dt \leqslant \varepsilon, \ \forall u, w \in \mathcal{K} \ con \ \|u - w\|_{\mathcal{C}} \leqslant \delta^*, \text{ c.v.d.}$$

OSSERVAZIONE 1. - Osserviamo che la definizione di semicontinuità inferiore da noi qui utilizzata è, nel contesto in cui ci siamo posti, equivalente a quella cui si riferiscono C. J. Himmelberg - F. S. Van Vleck in [6]$_2$ e C. Berge in [17].

Sussiste infine il seguente

TEOREMA 3. - *Nelle ipotesi del Teorema 2 esiste una soluzione del problema* (2.1).

Sia $g: \mathcal{K} \to L^1(I)$ una funzione continua tale che (cfr. Teorema 2) $g(u)(t) \in F(t, u(t))$ q.o. in $I, u \in \mathcal{K}$.

Per ogni $u \in \mathcal{K}$ consideriamo la funzione $h(u): I \to \mathbf{R}^n$ definita ponendo:

$$h(u)(t) = \int_0^t g(u)(s)\, ds \ , \ \forall t \in I.$$

Poiché l'applicazione $h: \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ è continua nell'insieme $\mathcal{K}$ compatto e convesso, esiste per il Teorema di Schauder una funzione $\tilde{u} \in \mathcal{K}$ tale che $h(\tilde{u}) = \tilde{u}$, e quindi:

$$\tilde{u}(0) = 0 \ ; \ \tilde{u}'(t) = g(\tilde{u})(t) \in F(t, \tilde{u}(t)) \ q.o. \ in \ I, \text{c.v.d.}$$

OSSERVAZIONE 2. - Il nostro Teorema 3 contiene strettamente i Teoremi di esistenza ottenuti da H. Kaczýnski - C. Olech in [4] e da H. A. Antosiewicz - A. Cellina in [5]. Infatti, è subito visto che ogni multifunzione con le proprietà richieste nei citati Teoremi verifica le ipotesi del nostro Teorema di esistenza (cfr. [13], Teorema 2.5); d'altra parte esistono multifunzioni che soddisfano le ipotesi della nostra proposizione ma *non* quelle dei Teoremi di cui in [4] e in [5], come si vede esaminando rispettivamente i seguenti due esempi.

ESEMPIO 1. - Siano $I = [0, 1]$, $B = X = \mathbf{R}$ e $F: I \times \mathbf{R} \to \{\text{comp}\, X\}$ definita da:

$$F(t, x) = \begin{cases} \{0\} \cup \{1/x\} & se \quad (t, x) \in \{0\} \times]0, +\infty[, \\ \{0\} & altrove. \end{cases}$$

ESEMPIO 2. - Siano $I = [0, 1]$, $B = [-1, 1]$, $X = [-1, 1[$ e $F: I \times B \to \{\text{comp}\, X\}$ definita da:

$$F(t, x) = \begin{cases} \{0\} \cup \{x\} & se \quad (t, x) \in [0, 1] \times [-1, 1[, \\ \{0\} & altrove. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 3. - Il nostro Teorema 3 estende inoltre un analogo Teorema conseguito da A. Bressan (cfr. [7], Teorema 2) nel senso che esistono multiapplicazioni che verificano le ipotesi della nostra proposizione ma *non* quelle del Teorema di A. Bressan, come si vede dal seguente

ESEMPIO 3. - Siano $I = X = [0,1]$, $B = [-1,1]$ e $F : I \times B \to \{\mathrm{comp}\, X\}$ definita ponendo:

$$F(t,x) = \begin{cases} \{t\} & se \quad (t,x) \in [0,1[\times [-1,1], \\ \{0\} & se \quad (t,x) \in \{1\} \times [-1,1]. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 4. - Osserviamo infine che, nel caso di spazi euclidei, le ipotesi del nostro Teorema di esistenza risultano effettivamente più deboli di quelle fatte da M. Kisielewicz in [12] (cfr. Osservazione 2, Esempio 1).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. F. FILIPPOV, [.]$_1$ *Differential equations with multivalued right-hand side,* Dokl. Akad. Nauk. SSSR *151* (1963), 65-68; [.]$_2$ *Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side,* SIAM J. Control *5* (1967), 609-621; [.]$_3$ *The existence of solutions of generalized differential equations,* Mat. Zametki *10* (1971), 307-313.

[2] H. HERMES, *The generalized differential equation $\dot{x} \in R(t,x)$,* Advances in Math. *4* (1970), 149-169.

[3] J. L. DAVY, *Properties of solution set of a generalized differential equation,* Bull. Austral. Math. Soc. *6* (1972), 379-398.

[4] H. KACZYNSKI - C. OLECH, *Existence of solutions of orientor fields with non-convex right-hand side,* Ann. Polon. Math. *29* (1974), 61-66.

[5] H. A. ANTOSIEWICZ - A. CELLINA, *Continuous selections and differential relations,* J. Differential Equations *19* (1975), 386-398.

[6] C. J. HIMMELBERG - F. S. VAN VLECK, [.]$_1$ *Lipschitzian generalized differential equations,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova *48* (1973), 159-169; [.]$_2$ *An extension of Brunovsky's Scorza Dragoni type theorem for unbounded set-valued functions,* Math. Slov., (1976) n. 1, 47-52.

[7] A. BRESSAN, *On differential relations with lower continuous right-hand side. An existence theorem,* J. Differential Equations *37* (1980), 89-97.

[8] G. COLETTI - G. REGOLI, *Continuous selections and multivalued differential equations,* Riv. Mat. Univ. Parma 7 (1981), 1-6.

[9] C. CASTAING - M. VALADIER, [.]$_1$ *Équations différentielles multivoques dans les espaces vectoriels localement convexes,* Revue Franç. Inform. Recherche Opérationelle *16* (1969), 3-16; [.]$_2$ *Convex Analysis and measurable multifunctions,* Lecture Notes in Math. *580,* Springer, Berlin (1977).

[10] J. P. DAURÈS, *Contributions à l'étude des équations différentielles multivoques dans les espaces de Banach,* C. R. Acad. Sci. Paris *270* (1970), 769-772.

[11] C. BARDARO - P. PUCCI, [.]$_1$ *Un teorema di esistenza per equazioni contingenti in spazi di Banach,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena *27* (1978), 207-211; [.]$_2$ *Some contributions to the theory of multivalued differential equations,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena *32* (1983), 175-202.

[12] M. KISIELEWICZ, *Multivalued differential equations in separable Banach spaces,* J. Optimization Theory and Applications *37,* 2, June 1982.

[13] C. CASTAING, *Sur les multi-applications mesurables,* Revue Franç. Informat. Recherche Opérationelle *1* (1967), 91-126.

[14] A. FIACCA, *Un teorema di esistenza per equazioni differenziali multivoche,* in corso di stampa su Riv. Mat. Univ. Parma.

[15] N. BOURBAKI, *Eléménts de Mathematique - Topologie générale,* Hermann, Paris (1961), Cap. XVI.

[16] R. G. BARTLE, *The Elements of Integration,* John Wiley & Sons, Inc., (1966).

[17] C. BERGE, *Espaces Topologiques Fonctions Multivoques,* Collectio Universitaire de Mathématiques, II Edizione, Paris, Dunod (1966).