PROBLEMI DI CAUCHY REGOLARI E SINGOLARI PER UNA CLASSE DI EQUAZIONI DI TIPO MISTO CON DATI SULLA LINEA PARABOLICA (*)

di Magda Leschiutta Rolando (a Torino) (**)

Sommario. - *Si studia l'equazione*

$$(1 + X^2) Z_{XX} + (1 - Y^2) Z_{YY} + p(XZ_X - YZ_X) = 0$$

nel semipiano $Y \geqslant 1$ per ogni valore reale di p.

Summary. - *The equation*

$$(1 + X^2) Z_{XX} + (1 - Y^2) Z_{YY} + p(XZ_X - YZ_X) = 0$$

is analysed for every real p in the half plane $Y \geqslant 1$.

1. - Introduzione

Si considera l'equazione

$$(1 + X^2) Z_{XX} + (1 - Y^2) Z_{YY} + p(XZ_X - YZ_X) = 0,$$

che d'ora in poi chiameremo equazione (1), con p parametro reale. Essa fu introdotta da S. Nocilla in [1] con lo scopo di eliminare la polidromia che si presenta nello studio del flusso transonico attorno a profili alari con metodo odografico. E' di tipo ellittico per $|Y| < 1$ ed iperbolico per $|Y| > 1$. Le sue caratteristiche sono archi di iperboli equilatere di equazione

(1.1) $\quad Y + (Y - 1)^{1/2} = C[(X + 1) \pm X].$

(*) Pervenuto in Redazione il 29 luglio 1983.

(**) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica del Politecnico di Torino - Corso Duca degli Abruzzi, 24 - 10100 Torino.

Esse son tangenti alla linea parabolica $Y = 1$ che è essa stessa una caratteristica. Nel caso $p = 4/3$ S. Nocilla [3], riconducendo l'equazione in esame all'equazione di Tricomi e sfruttando i risultati già noti per questa ultima, ha determinato una soluzione per l'equazione (1) nell'ipotesi che la curva portante i dati sia un segmento della linea parabolica $Y = 1$ e che nei soliti dati di Cauchy si sostituisca al valore della derivata normale il valore del limite di $(1 - Y)^{2/3} Z_Y$ (per $Y \to 1+$).

Nel presente lavoro viene studiata l'equazione predetta nel semipiano $Y \geqslant 1$ per tutti i valori reali di p al fine di stabilire come possa essere posto il problema di Cauchy con condizioni sulla linea parabolica $Y = 1$ affinché il problema ammetta soluzioni. Tali condizioni sono del «tipo di Cauchy» nel senso che involgono i valori della funzione e della sua derivata normale, non però soltanto nel senso tradizionale di Cauchy, in quanto vengono esaminati e discussi anche i casi in cui i valori suddetti della funzione o della derivata normale diventano identicamente infiniti su un segmento di linea parabolica.

A tale scopo mediante la sostituzione

$$(1.2) \quad \begin{cases} u = -XY - (X^2+1)^{1/2}(Y^2-1)^{1/2}, \\ v = -XY + (X^2+1)^{1/2}(Y^2-1)^{1/2} \end{cases}$$

l'equazione proposta viene ricondotta all'equazione di Euler-Poisson-Darboux

$$(1.3) \quad E(\beta, \beta) = \frac{\partial^2 z}{\partial u \, \partial v} - \frac{\beta}{u - v}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) = 0$$

con $\beta = \frac{1}{2}(p-1)$; partendo poi dalle note formule che danno una soluzione di $E(\beta, \beta)$ dipendente da due funzioni arbitrarie si introducono sulla $Y = 1$ dati di Cauchy «singolari» imponendo condizioni del tipo

$$(1.4) \quad Z(X,Y) \sim f(X)\,(Y-1)^{-h}, \; Z_Y(X,Y) \sim g(X)\,(Y-1)^{-k} \quad (\text{per } Y \to 1+)$$

con $f(X)$ e $g(X)$ indipendenti fra loro e h e k costanti > 0 dipendenti da p.

Si può osservare che mediante il cambiamento di variabili

$$(1.5) \quad XY = -x, \quad (X^2+1)(Y^2-1) = (2-p)^2 y^{2/(2-p)}$$

che muta la regione iperbolica $|Y| > 1$ del piano (X, Y) nella regione $y^{2/2-p} > 0$ e dove il parametro p è legato ad r dall'eguaglianza

$$(1.6) \quad r = 2(p-1)/(p-2)$$

l'equazione (1) si muta nella

(1.7) $z_{xx} - y^r z_{yy} = 0$

le cui caratteristiche hanno equazione

$$y = \pm \tfrac{1}{2}(2-r)\,(x-x_0)^{2/(2-r)} \qquad \text{se } r \neq 2$$

$$y = e^{\pm(x-x_0)} \qquad \text{se } r = 2$$

dove si deve scegliere il segno $+$ se $x > x_0$ e il segno $-$ se $x < x_0$. Si tratta di una equazione del primo tipo misto se $-\infty < r < 0$, del secondo tipo misto se $0 < r < 2$, mentre per $f \geqslant 2$ la linea parabolica $y = 0$ è asintoto per le caratteristiche. Il problema di Cauchy con dati sulla linea parabolica per equazioni del tipo (1.7) è stato già studiato dai vari Autori. Fra questi si ricordano F. G. Tricomi per $r = -1$ [4]; M. Cinquini Cibrario [5] per $r = 1$; G. Seita [6] per $0 < r < 2$; S. Nocilla ed E. Longo Marcante [7] per $-\infty < r < 0$ e ancora E. Longo Marcante [8] per $0 < r < 2$. M. Cinquini Cibrario e G. Seita si limitarono a studiare la soluzione nulla sulla linea parabolica, mentre E. Longo Marcante studiò soluzioni soddisfacenti condizioni del tipo:

$$z(x,0) = \tau(x) \;;\; z_y(x,0) = \nu(x) \qquad \text{per } 0 < r < 1$$

$$z(x,0) = \tau(x) \;;\; \lim_{y\to 0} y^{1-r} z_y(x,y) = k\tau''(x) \qquad \text{per } 1 < r < 2$$

dove τ e ν sono funzioni arbitrariamente assegnate e k è una opportuna costante dipendente da r, senza peraltro fornire una trattazione completa dei casi presi in considerazione.

La corrispondenza (1.6) esistente fra p ed r si riflette nella formulazione del problema nel senso che per $0 < p < 2$ (cui corrisponde $-\infty < r < 1$) le due condizioni di Cauchy possono essere assegnate indipendentemente una dall'altra però mentre per la (1.7) le condizioni sono regolari, per la nostra equazione (1) la $Z_Y(X,Y)$ sulla linea parabolica diverge come $(Y-1)^{p/2}$. Per $p = 0, -2, -4, -6\ldots$ si assegnano per la (1) condizioni regolari, ma una identicamente nulla e ciò corrisponde per la (1.7) ai risultati ottenuti da M. Cinquini Cibrario [5] e G. Seita [6]. Inoltre per *tutti* i valori reali di p si risolve il problema di Cauchy con dati del tipo (1.4) regolari o singolari ma con $f(X)$ e $g(X)$ legati fra loro da relazioni di vario tipo. Nei casi $p < 0$ (problema regolare) e $p > 2$ (problema singolare) rimane la possibilità di imporre anche altri tipi di condizioni. Per l'equazione (1.7) il caso delle condizioni dipendenti fra loro è stato trattato solo da E. Longo Marcante [8] per $1 < r < 2$. Per l'equazione (1) emergono poi *due casi particolari* $(p = 0$ e $p = 2)$ nei quali, oltre a soluzioni soddisfacenti condizioni del tipo precedente, si possono determinare anche soluzioni che presentano sulla retta $Y = 1$ una singolarità di tipo logaritmico e precisamente per $p = 0$ si determinano soluzioni soddisfacenti le condizioni:

$$(1.8)\quad Z(X,Y) = f(X)\,;\ \lim_{y\to 1+} \frac{Z_Y(X,Y)}{\log(Y-1)} = -\tfrac{1}{2}(X^2+1)\,f''(X)$$

con $f(X)$ di classe $C^{(3)}$ e per $p = 2$ si determinano soluzioni soddisfacenti le condizioni:

$$(1.9)\quad \lim_{y\to 1+} \frac{Z_Y(X,Y)}{\log(Y-1)} = \lim_{y\to 1+} (X-1)\,Z_Y(X,Y) = f(X)$$

con $f(X)$ di classe $C^{(1)}$.

Però per $r = 0$ l'equazione non è più di tipo misto, in quanto degenera nell'equazione di d'Alambert $z_{xx} - z_{yy} = 0$.

Scopo principale del presente lavoro è di dare sistematicità alla trattazione e colmare le lacune esistenti. Ciò viene fatto esaminando tutti i casi, al variare del parametro p intero e non intero per stabilire come debbano essere poste le condizioni al contorno sulla linea parabolica affinché il problema ammetta soluzioni, e ricavando esplicitamente dette soluzioni. Così facendo si considerano per l'equazione (1) anche i casi che per la (1.7) non sono stati trattati o per mancanza di indagine o perché degenerano nel senso precisato sopra. I risultati ottenuti sono indicati riassuntivamente nelle tabelle finali.

La sostanziale differenza fra l'equazione (1) qui considerata e la (1.7) consiste nel fatto che, mentre per la prima le caratteristiche sono fisse al variare di p, per la (1.7) le caratteristiche variano con p. Ciò permette, nel primo caso, che è quello oggetto del presente lavoro, una trattazione sistematica e completa del problema, mentre per la (1.7) non è possibile fare altrettanto in quanto per $r \geqslant 2$ il triangolo caratteristico degenera.

Per quanto riguarda il metodo seguito in questa trattazione, si utilizza, come già detto, la teoria relativa all'equazione $E(\beta,\beta)$ che fornisce al variare di β, soluzioni che dipendono generalmente da due funzioni arbitrarie e, come è noto, bisogna distinguere i casi: β intero negativo o nullo; $\beta \in]0,1[$; β intero positivo; β non intero e non $\in]0,1[$.

Se β non è intero si deve osservare che, nei casi particolari in cui sia $\beta = \tfrac{1}{2} \pm n$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$ la soluzione ottenuta dipende sostanzialmente da una sola funzione arbitraria. E' pur tuttavia ancora possibile scrivere in altro modo la soluzione dipendente da *due* funzioni arbitrarie, come è esplicitamente riportato in [2].

Ritornando all'equazione (1), nel presente lavoro si sfrutterà opportunamente l'arbitrarietà delle funzioni suddette per imporre le condizioni volute. L'operazione è però delicata nel senso che richiede una preventiva analisi critica delle espressioni della $Z(X,Y)$ e della $Z_Y(X,Y)$ in prossimità della linea parabolica $Y = 1$. Da tale analisi emerge la necessità di suddividere i vari intervalli considerati al variare del parametro β in ulteriori intervalli relativamente al parametro p. Si ottiene così, per ogni valore di p, una soluzione $Z(X,Y)$ dell'equazione proposta tale che $\lim_{Y\to 1+}(Y-1)^h Z(X,Y)$ e $\lim_{Y\to 1+}(Y-1)^k Z_y(X,Y)$ dipendono da una o due funzioni arbitrarie e mediante una oculata scelta di tali funzioni si possono imporre condizioni del tipo (1.4) per *tutti* i valori reali di p. Una circostanza del tutto speciale emerge nei casi $p=0$ (cui corrisponde $\beta = -\frac{1}{2}$) e $p=2$ (cui corrisponde $\beta = \frac{1}{2}$) in quanto la soluzione dipendente da due funzioni arbitrarie presenta in entrambi i casi una *singolarità di tipo logaritmico* sulla linea parabolica. Ciò consente di risolvere il problema con condizioni del tipo (1.8) se $p=0$ e (1.9) se $p=2$. In questi due casi è però sempre possibile, come detto, risolvere anche il problema con condizioni del tipo (1.4). E' da notare che, mentre per p intero dispari (cioè β intero) la soluzione più generale dell'equazione (1) dipende da due funzioni arbitrarie $U(u)$ e $V(v)$ di argomenti diversi u e v dati dalle (1.2), in tutti gli altri casi detta soluzione dipende da due funzioni arbitrarie dello stesso argomento e queste ultime compaiono sotto segno di integrale.

Nel presente lavoro vengono sviluppati dettagliatamente i casi $p=1+2n$ con $n=1,2,3,\ldots$ e $p=2+2n$ con $n=0,1,2,\ldots$ mentre per tutti gli altri valori di p sono riportati solo i risultati.

2. - Studio del problema di valori al contorno iperbolico-parabolico dell'equazione proposta nel caso p dispari.

Come si è già detto, mediante le formule di trasformazione (1.5), l'equazione (1) si muta nella (1.6) : $E(\beta,\beta)=0$. Se p è un numero dispari e quindi esprimibile ad esempio sotto la forma $p=1\pm 2n$ con $n=0,1,2,\ldots$ in virtù della relazione che lega p e β risulta $\beta=\pm n$. In tal caso la soluzione più generale (cioè dipendente da due funzioni arbitrarie) della (1.6) è data dalle seguenti formule, per la deduzione delle quali si rimanda a Darboux [2]:

$$(2.1)\quad Z(u,v) = \frac{\partial^{2n-2}}{\partial u^{n-1}\partial v^{n-1}}\frac{U-V}{u-v} \quad \text{se } \beta = n$$

$$(2.2)\quad Z(u,v) = (v-u)^{2n+1}\frac{\partial^{2n}}{\partial u^{n}\partial v^{n}}\frac{U-V}{u-v} \quad \text{se } \beta = n$$

con n intero positivo o nullo. U e V sono due funzioni arbitrarie rispettivamente della sola u e della sola v date dalla (1.5) : $U=U(u)$, $V=V(v)$.

Tenuto conto che $\beta=(p-1)/2$ si distinguono per l'equazione (1) i seguenti casi:

a) $p=3,5,7,\ldots$ *cioè* $p=1+2n$ *con* $n=1,2,3,\ldots$

Tenuto conto della formula di trasformazione (1.1), la (2.1) fornisce per l'equazione (1) la seguente soluzione dipendente da due funzioni arbitrarie

$$(2.3)\quad Z(X,Y) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i} \binom{n-1}{i} (2n-2-i)!\,\cdot$$

$$\cdot\, 2^{-2n+1+i} [(x^2+1)(Y^2-1)]^{(-2n-1-i)/2} [V^{(i)} - (-1)^i U^{(i)}]$$

dove si è posto $V^{(i)} = d^i V/dv^i$ e $U^{(i)} = d^i U/du^i$.

L'analisi dei valori assunti dalla $Z(X,Y)$ e della sua derivata $Z_Y(X,Y)$ in prossimità della retta parabolica $Y=1$ conduce ai seguenti risultati:

$$(2.4)\quad \lim_{Y\to 1+} [(Y-1)^{-1+p/2} Z(X,Y)] = (-1)^{(p-3)/2} (p-3)!\,\cdot$$

$$\cdot\, 2^{3-3p/2} (X^2+1)^{1-p/2} V(-X) - U(-X)]$$

$$(2.5)\quad \lim_{Y\to 1+} [(Y-1)^{p/2} Z_Y(X,Y)] = (-1)^{(p-1)/2} (p-2)!\,\cdot$$

$$\cdot\, [V(-X) - U(-X)].$$

Sfruttando l'arbitrarietà delle funzioni U e V si può risolvere il problema proposto con condizioni del tipo (1.2) e precisamente:

$$(2.6)\quad \lim_{Y\to 1+} [(Y-1)^{-1+p/2} Z(X,Y)] = f(X) \quad \text{con } f(X) \in S^{((p-1)/2)}$$

$$\lim_{Y\to 1+} [(Y-1)^{p/2} Z_Y(X,Y)] = (2-p)/2f(X);\ p = 3,5,7,\ldots$$

Poiché però le condizioni (2.6) non sono atte ad individuare entrambe le funzioni U e V ma solo una di esse, si potrà assumere rispettivamente $U=0$ oppure $V=0$. Corrispondentemente si ottengono le seguenti soluzioni del problema:

$$(2.7)\quad Z(X,Y) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{(2n-2-i)!}{(2n-2)!}\,\cdot$$

$$\cdot\, 2^{3(n-1/2)} (v-u)^{1-2n+i} \frac{d^i [(v^2+1)^{n-1/2} f(-v)]}{dv^i}$$

oppure

$$(2.8)\quad Z(X,Y) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \frac{(2n-2-i)!}{(2n-2)!}\,\cdot$$

$$\cdot\, 2^{3(n-1/2)} (v-u)^{1-2n+i} \frac{d^i [(u^2+1)^{n-1/2} f(-u)]}{du^i}$$

con $n = (p-1)$ e con u e v dati dalle (1.5).

b) $p=1$

L'equazione (1) con le condizioni

$$(2.9)\quad \begin{cases} Z(X,1) = f(X) & \text{con } f(X) \in S^{(1)} \\ \lim\limits_{Y\to 1+} [\sqrt{Y-1}\, Z_Y(X,Y)] = g(X) & \text{con } g(X) \in S^{(0)} \end{cases}$$

ammette la soluzione

$$(2.10)\quad Z(X,Y) = \tfrac{1}{2}\,[f(-v) - \bar{g}(-v) + f(-u) + \bar{g}(-u)]$$

dove $\bar{g}$ deve soddisfare l'eguaglianza $\bar{g}'(X) = -\sqrt{2}(X^2+1)^{-1/2} g(X)$.

Se invece si aggiunge l'ipotesi che f e g siano legate da una delle due eguaglianze $g(X) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (X^2+1)^{1/2} f'(X)$ si ottengono due soluzioni formalmente molto semplici e precisamente

$$(2.11)\quad Z(X,Y) = f(-v)$$

$$(2.12)\quad Z(X,Y) = f(-u)$$

c) $p = -1, -3, -5, \dots$

L'equazione (1) con le condizioni

$$(2.13)\quad \begin{cases} Z(X,1) = f(X) & \text{con } f \in S^{(3-p)/2} \\ Z_Y(X,1) = Xf'(X) + \dfrac{(X^2+1)}{p} f''(X) \end{cases}$$

$$(2.14)\quad Z(X,Y) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \frac{(2n-i)!}{(2n)!} (v-u)^i \frac{d^i f(-v)}{dv^i}$$

$$(2.15)\quad Z(X,Y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(2n-i)!}{(2n)!} (v-u)^i \frac{d^i f(-u)}{du^i}$$

con u e v date al solito dalle (1.5).

3. - Caso di p pari

Se p è un numero pari e quindi esprimibile ad esempio sotto la forma $p = 2 \pm 2n$ con $n = 0, 1, 2, \dots$ con procedimento analogo a quello seguito per p dispari, si ottengono per l'equazione (1) soluzioni dipendenti da due funzioni arbitrarie dei loro argomenti φ e ψ. Sarà qui sviluppato il caso $p = 2 + 2n$ mentre negli altri casi saranno soltanto elencate le condizioni da associare all'equazione (1) e le corrispondenti soluzioni.

a) $p = 2 + 2n$ *con* $n = 0, 1, 2, \dots$

L'equazione (1) ammette le seguenti soluzioni:

$$(3.1)\quad Z_{2+2n}(X,Y) = \int_0^1 \overset{(2n)}{\varphi}(\xi)\, t^{n-1/2} (1-t)^{n-1/2}\, dt +$$

$$+\int_0^1 \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-1} \binom{n}{i} \binom{n}{j} t^{j-1/2}(1-t)^{i-1/2} \cdot$$
$$\cdot \overset{(i+j)}{\psi}(\xi) \quad \frac{d^{2n-i-j} \log \bar{\eta}}{d\eta^{2n-i-j}} dt$$

ove si è posto

$$(3.3) \quad \begin{cases} \xi = -XY + (2t-1)\sqrt{(X^2+1)(Y^2-1)} \\ \eta = 2\sqrt{(X^2+1)(Y^2-1)} \\ \bar{\eta} = t(1-t)\eta . \end{cases}$$

Dall'analisi critica dei valori assunti da $Z(X,Y)$ e da $Z_Y(X,Y)$ in prossimità della retta parabolica $Y=1$ emerge la necessità di suddividere l'intervallo di variabilità del parametro p in due sottointervalli e di distinguere vari casi a seconda che si supponga, o meno, che la funzione arbitraria ψ sia identicamente nulla. Più precisamente, tenuto conto che per $h > -1$ risulta

$$\int_0^1 (2t-1)\, t^h (1-t)^h dt = 0$$

a conti fatti si ottengono i seguenti risultati:

a_1) *per* $p = 2$

Se si suppone $\psi \neq 0$ si ha

$$(3.4) \quad \lim_{Y \to 1+} \frac{Z(X,Y)}{\log(Y-1)} = \lim_{Y \to 1+} [(Y-1) Z_Y(X,Y)] = (\pi/2)\,\psi(-X)$$

mentre se si assume $\psi = 0$ si ha

$$(3.5) \quad Z(X,1) = \sqrt{\pi}\varphi(-X) \text{ e } Z_Y(X,1) = -\sqrt{\pi}X\varphi'(-X)$$

a_2) *per* $p = 4, 6, 8, \ldots$

Se si suppone $\psi \neq 0$ si ha

$$(3.6) \quad \begin{cases} \lim\limits_{Y \to 1+} [(Y-1)^{p/2-1} Z(X,Y)] = \\ \qquad = (-1)^{p/2} \dfrac{\pi(p-3)!}{2^{-3+3p/2}} (X^2+1)^{-p/2+1} \psi(-X) \\ \lim\limits_{Y \to 1+} [(Y-1)^{p/2} Z_Y(X,Y)] = \\ \qquad = (-1)^{p/2-1} \dfrac{\pi(p-2)!}{2^{-2+3p/2}} (X^2+1)^{-p/2+1} \psi(-X) \end{cases}$$

mentre se si assume $\psi \equiv 0$ si ha

$$Z(X,1) = \frac{\sqrt{\pi}(p/2-1/2)}{2^{p-2}(p/2)} \overset{(p-2)}{\varphi}(-X)$$

(3.7)

$$Z_Y(X,1) = \frac{\sqrt{\pi}(p/2-1/2)}{2^{p-2}\Gamma^{p/2}} X \overset{(p-1)}{\varphi}(-X)$$

L'arbitrarietà delle funzioni φ e ψ permette di formulare e risolvere per l'equazione (1) i seguenti problemi di valori al contorno con dati sulla linea parabolica:

a) *per* $p = 2$

Se $\psi \neq 0$ è possibile risolvere il problema con le condizioni (1.4) infatti, in virtù della (3.4) le suddette condizioni permettono di determinare la ψ: mentre la φ rimane tuttora arbitraria. Le (3.1) ove si attribuisca a ψ il valore così determinato ed ove si assuma $n = 0$ fornisce le soluzioni volute. Queste soluzioni presentano una *singolarità di tipo logaritmico sulla retta parabolica* e sono:

$$(3.8) \quad Z(X,Y) = Z^*(X,Y) + 2/\pi \int_0^1 f(-\xi) \log \eta t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}\, dt$$

con $$Z^*(X,Y) = \int_0^1 \varphi(\xi)\, t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}\, dt$$

dove ξ e $\bar{\eta}$ sono date dalle (3.3). Per illustrare meglio questo caso speciale, in seguito verrà dato un esempio specifico (v. n. 5).

Inoltre, sempre per $p = 2$, se si assume $\psi \equiv 0$, si può determinare una soluzione dell'equazione proposta soddisfacente le condizioni

$$Z(X,1) = f(X); \; Z_Y(X,1) = Xf'(X) \text{ con } f(X) \in S^{(1)}$$

le quali permettono di determinare la φ in virtù delle (3.5).

La soluzione è ancora fornita dalle (3.1) per $n = 0$ ed è

$$(3.9) \quad Z(X,Y) = (1/\pi) \int_0^1 f(-\xi)\, t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}\, dt$$

dove ξ è legata a t dalla prima delle (3.3). Si tratta dunque di una soluzione regolare sulla retta parabolica e con derivata anch'essa regolare.

a_2) *per* $p = 4, 6, 8, \ldots$

Le (3.6) permettono di risolvere il problema proposto con le condizioni

$$\begin{cases} \lim\limits_{Y \to 1+} [(Y-1)^{p/2-1} Z(X,Y)] = f(X) & \text{con } f(X) \in S^{(p-1)} \\ \lim\limits_{Y \to 1+} [(Y-1)^{p/2} Z_Y(X,Y)] = \tfrac{1}{2}(2-p) f(X). \end{cases}$$

Corrispondentemente la (3.1) con la ψ determinata in virtù delle (3.6) e la φ tuttora arbitraria, fornisce le soluzioni:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} Z(X,Y) = Z^*(X,Y) + \int_0^1 \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i}\binom{n}{j} \frac{2^{3n}}{\pi(2n-1)!} \cdot \\ \cdot\, t^{j-1/2}(1-t)^{i-1/2} \frac{d^{i+j}[(\xi^2+1) f(-\xi)]}{d\xi^{i+j}} \frac{d^{2n-i-j} \log \bar{\eta}}{d\eta^{2n-i-j}} \end{aligned}$$

con $Z^*(X,Y) = \int_0^1 \varphi^{(p-2)}(\xi)\, t^{(p-3)/2}\, (1-t)^{(p-3)/2}\, dt$

e con $n = (p-2)/2 = 1,2,3,\ldots$; η ed $\bar{\eta}$ sono date al solito dalle (3.3).

Inoltre, *sempre per p positivo pari*, assumendo $\psi \equiv 0$ nella (3.1), le (3.7) permettono di risolvere il problema proposto con le condizioni

$Z(X,1) = f(X)$; $Z_Y(X,1) = Xf'(X)$ con $f(X) \in S^{(p-1)}$ e con $p = 4,6,\ldots$

La soluzione è

$$(3.11)\quad Z(X,Y) = \frac{2^{p-2}\,\Gamma(p/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p/2-½)} \int_0^1 f(-\xi)\, t^{(p-3)/2}(1-t)^{(p-3)/2}\, dt$$

con ξ data dalla prima delle (3.3). E' da notare che la (3.11) è valida anche per $p = 2$, caso in cui si ritrova la (3.9) e, come si vedrà in seguito, anche per ogni $p > 1$.

Se $p = 2 - 2n$ con $n = 1,2,3,\ldots$ si procede come nel caso precedente e si ottengono i seguenti risultati:
b) *per* $p = 0$

Se all'equazione (1) si associano le condizioni (1.3) si ottengono le soluzioni

$$(3.12)\quad Z(X,Y) = Z^*(X,Y) +$$
$$+ (\eta^2/\pi) \int_0^1 \sum_{j=0}^{1} \sum_{i=0}^{1} (-1)^{1-i}\, t^{j-1/2}(1-t)^{i-1/2}\, \frac{d^{i+j} f(-\xi)}{d\xi^{i+j}}\, \frac{d^{2-i-j} \log\bar{\eta}}{d\eta^{2-i-j}}\, dt$$

con

$$Z^*(X,Y) = \eta^2 \int_0^1 \varphi''(\xi)\, t^{1/2}(1-t)^{1/2}\, dt$$

dove ξ, η ed $\bar{\eta}$ sono date dalle (3.3) e φ (ξ) è una funzione arbitraria. Anche per questo caso del tutto speciale, verrà fornito un esempio concreto alla fine della trattazione generale. Questa soluzione si mantiene limitata sulla linea parabolica, mentre *la sua derivata presenta ivi una singolarità di tipo logaritmico.*

Inoltre se si associano all'equazione (1) le condizioni del tipo (1.2)

$$Z(X,1) = 0;\ Z_Y(X,1) = g(X) \text{ con } g(X) \in S^{(3)}$$

si ottiene la soluzione

$$(3.13)\quad Z(X,Y) = ½\,\pi(X^2+1)\,(Y^2-1) \int_0^1 \frac{g(-\xi)\, t^{1/2}(1-t)^{1/2}}{(\xi^2+1)}\, dt$$

con ξ data dalla prima delle (3.3).

c) *per* $p = -2, -4, -6, \ldots$

L'equazione (1) con le condizioni

$Z(X,1) = f(X)$; $Z_Y(X,1) \equiv 0$ con $f(X) \in S^{(3-p)}$ e $p = -2, -4, -6, \ldots$

ammette le soluzioni

$$(3.14)\quad Z(X,Y) = Z^*(X,Y) + \eta^{2n}/\pi \int_0^1 \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{i} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(2n-1)!} t^{j-1/2}(1-t)^{i-1/2} \frac{d^{i+j} f(-\xi)}{d\xi^{i+j}} \frac{d^{2n-i-j} \log \bar{\eta}}{d\eta^{2n-i-j}}$$

con $Z^*(X,Y) = \eta^{2n} \int_0^1 \varphi^{(2n)}(\xi)\, t^{n-1/2}(1-t)^{n-1/2}\, dt$

e con $n = (2-p)/2 = 2, 3, 4, \ldots$; η ed $\bar{\eta}$ sono date al solito (3.3) e $\varphi(\xi)$ è funzione arbitraria. Sempre in questo caso si hanno anche le soluzioni

$$(3.15)\quad Z(X,Y) = Z^*(X,Y) =$$

$$= 2^{2n}(X^2+1)^n (Y^2-1)^n \int_0^1 \varphi^{(2n)}(\xi)\, t^{n-1/2}(1-t)^{n-1/2}\, dt\,.$$

Ognuna di queste soluzioni si annulla identicamente sulla linea parabolica insieme alla sua derivata Z_Y. Questo caso verrà illustrato al punto 5 con un esempio.

4. - Caso di p non intero

Se p non è intero si distinguono i seguenti casi:

a) *per* $1 < p < 2$

L'equazione (1) con le condizioni

$$(4.1)\quad \begin{cases} Z(X,1) = f(X) & \text{con } f(X) \in S^{(1)} \\ \lim\limits_{Y \to 1+} [(Y-1)^{1/2p} Z_Y(X,Y)] = g(X) & \text{con } g(X) \in S^{(1)} \end{cases}$$

ammette la soluzione

$$Z(X,Y) = \frac{2^{p/2}}{\sqrt{\pi}\,(2-p)} \frac{\Gamma(2-p/2)}{\Gamma((3-p)/2)} \cdot$$

$$(4.2)\quad \cdot\, \eta^{2-p} \int_0^1 (\xi^2+1)^{1/2(p-1)} g(-\xi)\, t^{1/2-p/2} (1-t)^{1/2+p/2} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\tfrac{1}{2}p)}{\Gamma(\tfrac{1}{2}(p-1))} \int_0^1 f(-\xi)\, t^{1/2(p-3)}(1-t)^{1/2(p-3)}\, dt$$

con η e ξ dati dalle (3.3) e $1 < p < 2$.

Mentre se all'equazione (1) si associano le condizioni

$$(4.3)\quad Z(X,1)=f(X);\ Z_Y(X,1)=Xf'(X)\ \text{con}\ f(X)\in S^{(1)}$$

la soluzione è formalmente data dalle (3.11) dove però si deve assumere $1<p<2$.

b) *per* $2<p<3$

L'equazione (1) con le condizioni

$$(4.4)\quad \begin{cases} \lim\limits_{Y\to 1+}[(Y-1)^{1/2p-1}Z(X,Y)]=f(X) \\ \lim\limits_{Y\to 1+}[(Y-1)^{1/2p}Z_Y(X,Y)]=\tfrac{1}{2}(2-p)f(X)\ \text{con}\ f(X)\in S^{(1)} \end{cases}$$

ammette le soluzioni

$$(4.5)\quad Z(X,Y)=Z^*(X,Y)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{1/2p-1}\frac{\Gamma(2-\tfrac{1}{2}p)}{\Gamma(\tfrac{1}{2}(3-p))}\eta^{2-p}\int_0^1(\xi^2+1)^{1/2p-1}(1-t)^{1/2p-1}dt$$

con

$$Z^*(X,Y)=\int_0^1\psi(\xi)\,t^{1/2(p-3)}(1-t)^{1/2(p-3)}dt$$

e con η e ξ date dalla (3.3) e con ψ funzione arbitraria. Inoltre valgono ancora i risultati dati dalla (3.11) dove però si deve assumere $2<p<3$.

c) *per* $p>3$

L'equazione (1) con le condizioni

$$(4.6)\quad \begin{cases} \lim\limits_{Y\to 1+}[(Y-1)^{1/2p-1}Z(X,Y)]=f(X) & \text{con}\ f\in S^{(2n+1)} \\ \lim\limits_{Y\to 1+}[(Y-1)^{1/2p}Z_Y(X,Y)]=\tfrac{1}{2}(2-p)f(X) \end{cases}$$

dove n è l'intero positivo soddisfacente le diseguaglianze

$$(p-3)/2<n<(p-1)/2\,,$$

ammette le soluzioni:

$$(4.7)\quad Z(X,Y)=Z^*(X,Y)+\frac{\Gamma(2n-p-3)}{P_n(p)}$$

$$\sum_{k=0}^{2n}\frac{\eta^{2+k-p}}{\Gamma(k-p+3)}\int_0^1\frac{d^k[(\xi^2+1)^{1/2p-1}f(-\xi)H_n^k(t)]}{d\xi^k}dt$$

con $Z^*(X,Y)=\int_0^1\psi^{(2n)}(\xi)\bar{H}(t)\,dt$ dove ψ è una funzione arbitraria e

con η e ξ date al solito dalle (3.3); $H_n^k(t)$ e $\bar{H}(t)$ sono date dalle

$$
(4.8)\quad \begin{cases} H_n^k(t) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n}{k-i}(-1)^i t^{n-\beta+i}(1-t)^{n-\beta+k-i} & \text{se } 0 \leqslant k \leqslant n \\ H_n^k(t) = \sum_{h=k-n}^{n} \binom{n}{n-h}\binom{n}{n-k-h}(-1)^h t^{n-\beta+h}(1-t)^{n-\beta+k-h} & \text{se } n < k \leqslant 2n \\ \bar{H}(t) = t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1} \end{cases}
$$

con $\beta = ½(p-1)$. Inoltre si è posto:

$$
(4.9)\quad P_n(p) = \frac{\Gamma(2n-p-3)}{\Gamma(p-3)}\, 2^{3(2-p)/2} \int_0^1 H_n^0(t)\, dt .
$$

E' da notare che la (4.7) è valida anche per $n = 0$, caso in cui si ritrova la (4.5).

Inoltre, se all'equazione (1) si associano le condizioni

(4.10) $Z(X,1) = f(X);\ Z_Y(X,1) = Xf'(X)$ con $f(X) \in S^{(1)}$

si ottiene una soluzione formalmente data dalla (3.11) dove però ora si deve assumere $p > 3$.

d) *per* $0 < p < 1$

L'equazione (1) con le condizioni

(4.11) $Z(X,1) = f(X);\ \lim_{Y \to 1+} [(Y-1)^{p/2} Z_Y(X,Y)] = g(X)$

con $f(X) \in S^{(3)}$ e $g(X) \in S^{(1)}$ ammette la soluzione

$$
(4.12)\quad \begin{aligned} Z(X,Y) = {} & \frac{\Gamma(p+1)}{R_1(p)} \sum_{k=0}^{2} \left\{ \frac{\eta^k}{(k+p-1)} \int_0^1 \frac{d^k f(-\xi)}{d\xi^k} A_1^k(t)\, dt \right\} + \\ & + \frac{2^{p/2}\Gamma(2-p/2)}{\sqrt{\pi}(2-p)\Gamma(½(3-p))}\, \eta^{2-p} \int_0^1 (\xi^2+1)^{p/2-1} g(-\xi)\, \bar{A}(t)\, dt \end{aligned}
$$

dove η e ξ sono date dalle (3.3), $A_1^k(t)$ e $\bar{A}(t)$ sono date da:

$$
(4.13)\quad \begin{cases} A_n^k(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{k-i}(-1)^i t^{\beta+n+i-1}(1-t)^{\beta+n-1+k-i} & \text{se } 0 \leqslant k \leqslant n \\ A_n^k(t) = \sum_{h=k-n}^{n} \binom{n}{n-h}\binom{n}{n-k-h} \cdot \\ \quad \cdot (-1)^h t^{\beta+n-1+h}(1-t)^{\beta+n-1+k-h} & \text{se } n < k \leqslant 2n \\ \bar{A}(t) = t^{-\beta}(1-t)^{-\beta} \end{cases}
$$

con $\beta = ½(p-1)$ ed inoltre

$$
(4.14)\quad \mathbf{R}_1(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-1)} \int_0^1 A_1^0(t)\, dt
$$

Se invece all'equazione (1) si associano le condizioni

$$
(4.15)\quad Z(X,1) = f(X);\ Z_Y(X,1) = Xf'(X) + \frac{R_1(p)}{T_1(p)}(X^2+1) f''(X)
$$

con $f(X) \in S^{(3)}$ ammette la soluzione

$$(4.16)\quad Z(X,Y) = \frac{\Gamma(p+1)}{R_1(p)} \sum_{k=0}^{2} \frac{\eta^k}{\Gamma(k+p-1)} \int_0^1 \frac{d^k f(-\xi)}{d\xi^k} A_1^k(t)\, dt$$

con η e ξ date dalle (3.13), $R_1(p)$ dalla (4.14), $A_1^k(t)$ dalle (4.13) e inoltre

$$(4.17)\quad T_1(p) = 2\Gamma(p+1) \int_0^1 B_1^2(t)\, dt$$

con

$$B_1^2(t) = \frac{4A_1^2(t)}{\Gamma(p+1)} + \frac{(2t-1)A_1^2(t)}{\Gamma(p+k+2)}$$

e) *per* $p < 0$

Se all'equazione (1) si associano le condizioni

$$(4.18)\quad \begin{aligned} &Z_Y(X,1) = Xf'(X) + \frac{T_n(p)}{R_n(p)}(X^2+1)f''(X) \\ &\qquad\qquad\qquad \text{con } n \text{ intero e } (1-p)/2 < n < (3-p)/2 \\ &Z(X,1) = f(X) \qquad \text{con } f(X) \in S^{(2n+1)} \end{aligned}$$

si hanno le soluzioni

$$(4.19)\quad Z(X,Y) = Z^*(X,Y) + \\ + \frac{\Gamma(p+2n-1)}{R_n(p)} \sum_{k=0}^{2n} \frac{\eta^k}{\Gamma(k+p-1)} \int_0^1 \frac{d^k f(-\xi)}{d\xi^k} A_n^k(t)\, dt$$

con

$$Z^*(X,Y) = \eta^{2-p} \int_0^1 \psi^{(2n)}(\xi)\, \bar{A}(t)\, dt$$

dove ψ è una funzione arbitraria e η e ξ sono date dalle (3.3), $A_n^k(t)$ ed $\bar{A}(t)$ dalle (4.13) e dove si è posto

$$(4.20)\quad \begin{cases} B_n^k(t) = \dfrac{2kA_n^k(t)}{\Gamma(p+k-1)} + \dfrac{(2t-1)A_n^{k-1}()t}{\Gamma(p+k-2)} \\ R_n(P) = \dfrac{\Gamma(p+2n-1)}{\Gamma(p-1)} \displaystyle\int_0^1 A_n^0(t)\, dt \\ T_n(P) = 2\Gamma(p+2n-1) \displaystyle\int_0^1 B_n^2(t)\, dt. \end{cases}$$

Inoltre, sempre in questo caso, si hanno soluzioni del tipo

$$(4.21)\quad Z^*(X,Y) = 2^{2-p}[(X_n+1)(Y^2-1)]^{1-p/2} \int_0^1 \psi^{(2n)}(\xi)\, \bar{A}(t)\, dt,$$

con ξ data dalla prima delle (3.3) e $\bar{A}(t)$ dalla terza delle (4.13). Esse si annullano identicamente sulla retta parabolica insieme alla loro derivata. Al numero 5 verrà dato un esempio per illustrare meglio questo caso. E' da notare che le formule (4.7) e (4.19) perdono significato se p è un intero pari a causa dell'annullarsi, in tal caso, di $P_n(p)$, $R_n(p)$ e $T_n(p)$, mentre le altre formule ottenute per p non intero continuano a valere anche per p intero pari.

Le soluzioni ottenute per ogni p sono valide in tutto il triangolo caratteristico di base AB se le condizioni iniziali sono assegnate su un segmento AB di linea parabolica. Se le condizioni iniziali sono assegnate su tutta la retta parabolica $Y = 1$ il corrispondente triangolo caratteristico diventa un triangolo improprio avente per base la retta $Y = 1$, il vertice C all'infinito e limitato dalle curve di equazione (1.1).

5. - Alcuni esempi notevoli

Nei due casi particolari $p = 0$ e $p = 2$ si presenta, come si è visto, una situazione del tutto speciale nel senso che si può determinare una soluzione $Z(X, Y)$ soddisfacente soluzioni del tipo (1.3) e (1.4) rispettivamente. L'anomalia di questi casi, rispetto a tutti gli altri valori reali di p consiste nel fatto che la funzione $Z(X, Y)$ $(p = 2)$ oppure la sua derivata (se $p = 0$) presentano, sulla linea parabolica, una singolarità di tipo logaritmico ossia divergono come $\log(Y - 1)$. Per tutti gli altri valori reali di p, se pur si ha divergenza della Z o della Z_Y, si tratta sempre di infinito confrontabile con una potenza di $1/(Y - 1)$. Allo scopo di illustrare meglio i due casi anormali si riportano i due esempi seguenti:

1) Si determini una soluzione dell'equazione

$$(X^2 + 1) Z_{XX} + (1 - Y^2) Z_{YY} = 0 \quad (p = 0) \tag{5.1}$$

soddisfacente le seguenti condizioni;

$$Z(X, 1) = X^2 \, ; \; \lim_{Y \to 1+} [Z_Y(X, Y) / \log(Y - 1)] = -(X^2 + 1). \tag{5.2}$$

La (3.12) con $f(-\xi) = \xi^2$ e $\varphi(\xi) \equiv 0$ fornisce, a meno di una costante inessenziale, la soluzione:

$$Z(X, Y) = X^2 Y^2 + (X^2 + 1)(Y^2 - 1) \log [(X^2 + 1)(Y^2 - 1)]^{1/2}. \tag{5.3}$$

E' facile verificare che la (5.3) soddisfa effettivamente l'equazione (1) con le condizioni (5.2).

2) Si determini una soluzione dell'equazione

$$(X^2 + 1) Z_{XX} + (1 - Y^2) Z_{YY} + 2 (XZ_X - YZ_Y) = 0 \quad (p = 2) \tag{5.4}$$

soddisfacente le seguenti condizioni

$$\lim_{Y \to 1+} [Z(X, Y) / \log(Y - 1)] = X \, ; \; \lim_{Y \to 1+} [(Y - 1) Z_Y(X, Y)] = X. \tag{5.5}$$

La (3.8) con $f(-\xi) = -\xi^2$ e $\varphi(\xi) \equiv 0$ fornisce, a meno di una costante inessenziale, la soluzione:

$$Z(X, Y) = XY \log [(X^2 + 1)(Y^2 - 1)]. \tag{5.6}$$

E' facile verificare che la (5.6) soddisfa effettivamente l'equazione (5.4) con le condizioni (5.5).

E' ancora degno di nota il fatto che per $p < 0$ non dispari, si possono determinare soluzioni $Z(X, Y)$ dell'equazione (1) che si annullano identicamente sulla retta parabolica insieme alla loro derivata Z_Y. A questo proposito si riportano i due esempi seguenti:

3) Si determini una soluzione dell'equazione

(5.7) $(X^2 + 1) Z_{XX} + (1 - Y^2) Z_{YY} - 2 (ZX_X - YZ_Y) = 0$ (per $p = -2$)

soddisfacente le condizioni:

(5.8) $Z(X, 1) \equiv 0 \,;\; Z_Y(X, 1) \equiv 0\,.$

La (3.15) con $n = 2$ (ossia $p = -2$) e $\varphi''(\xi) = \xi$ fornisce, a meno di un fattore costante inessenziale, la soluzione:

(5.9) $Z(X, Y) = XY (X^2 + 1)^2 (Y^2 - 1)^2\,.$

E' facile verificare che tale funzione soddisfa effettivamente l'equazione (5.7) e che si annulla insieme alla sua derivata Z_Y sulla retta parabolica $Y = 1$ senza essere identicamente nulla sul piano (X, Y).

4) Si determini una soluzione dell'equazione

(5.10) $(X^2 + 1) Z_{XX} + (1 - Y^2) Z_{YY} - \tfrac{1}{2} (XZ_X - YZ_Y) = 0 \quad (p = -\tfrac{1}{2})$

soddisfacente ancora le condizioni (5.8).

La (4.21) con $n = 1$ (ossia $p = -\tfrac{1}{2}$ e $\psi''(\xi) = \xi$ fornisce, a meno di un fattore costante inessenziale, la seguente soluzione:

(5.11) $Z(X, Y) = XY (X^2 + 1)^{5/4} (Y^2 - 1)^{5/4}\,.$

E' facile verificare che la (5.11) soddisfa effettivamente l'equazione (5.10) e che si annulla insieme alla sua derivata Z_Y sulla retta parabolica $Y = 1$ senza essere identicamente nulla sul piano (X, Y).

BIBLIOGRAFIA

[1] NOCILLA S., *An uniformizing process on the hodograph plane for the study of transonic airfoils,* «Journal de Mécanique», vol. II, n. 3, september 1963.

[2] DARBOUX G., *Leçons sur la théorie générale des Surfaces,* Ed. Gautier-Villars et C.ie (1915), Tomo II, cap. III.

[3] NOCILLA S., *A proposito di un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine di tipo misto,* «Atti Accad. Sc. di Torino», vol. 99 (1964-65), p. 1035.

[4] TRICOMI F. G., *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto,* «Memorie Accad. Lincei», vol. 5, 14 (1923), p. 133.

[5] CINQUINI-CIBRARIO M., *Equazioni a derivate parziali di tipo misto,* «Rendiconti Seminario Matematico e Fisico di Milano», t. 25 (1953-54).

[6] SEITA G., *Attorno a una equazione alle derivate parziali del secondo ordine di tipo misto,* «Rendic. Sc. Istituto Lombardo» A. 98 (1964), p. 327.

[7] NOCILLA S., LONGO MARCANTE E., *Sulla risoluzione del problema di Cauchy, con dati sulla linea parabolica, per le equazioni di tipo misto della forma* $Y^r Z_{xx} - Z_{yy} = 0$, «Atti Accad. Sc. di Torino», vol. 101, (1966-67).

[8] LONGO MARCANTE E., *Problemi di Cauchy regolari e singolari per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine di tipo misto nella forma* $Z_{xx} - y^r Z_{yy} = 0$, «Atti Accad. Sc. di Torino», vol. 101 (1966-67), p. 251.