# OSSERVAZIONI SU ALCUNI PROBLEMI ELLITTICI NON LINEARI (*)

di ANTONIA DE CANDIA e DONATO FORTUNATO (a Bari) (**)

SOMMARIO. - *Si applica un teorema astratto di punti critici per funzionali che presentano simmetrie allo studio di problemi ellittici non lineari.*

SUMMARY. - *An abstract theorem concerning critical points for a class of functionals with symmetries is applied to nonlinear elliptic problems.*

## 0. - Introduzione

In [4] è stato dimostrato un teorema astratto di punti critici per funzionali che presentano simmetrie, cioè funzionali che siano invarianti per l'azione di un gruppo di Lie compatto soddisfacente opportune «proprietà di dimensionalità» (cfr. teorema 1.4). Tale teorema è stato poi applicato alla ricerca di soluzioni periodiche non costanti di sistemi Hamiltoniani di equazioni differenziali ordinarie (cfr. [4], [5]). In questa nota applicheremo tale teorema allo studio di problemi ellittici non lineari.

Sia $\Omega$ un sottoinsieme aperto e limitato di $\mathbf{R}^n$ e $g$ una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ (1) soddisfacente la proprietà:

---

(*) Pervenuto in Redazione il 4 maggio 1983. Lavoro eseguito nell'ambito della ricerca finanziata dal M.P.I. e sotto gli auspici del C.N.R. (Gruppo G.N.A. F.A.).

(**) Indirizzo degli Autori: Dipartimento di Matematica dell'Università di Bari - Via Nicolai, 2 - 70121 Bari.

(1) Le considerazioni che seguono valgono, con ovvie modifiche, anche nel caso in cui $g$ dipende anche da $x \in \Omega$.

$\mathrm{I}_1)$ $g$ continua e dispari.

Vogliamo trovare soluzioni non banali del problema

$$(1) \qquad \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ -\Delta u + \lambda u + g(u) = 0, \end{cases}$$

ove $\lambda \in \mathbf{R}$.

Per non distinguere vari casi supporremo, per semplicità, che $n \geq 3$ e che $g$ soddisfi la condizione:

$$\mathrm{I}_2) \quad |g(t)| \leq c_1 + c_2 |t|^\beta \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

ove $1 < \beta < \dfrac{n+2}{n-2}$, $c_1$ e $c_2$ sono costanti positive.

Allora è ben noto che le soluzioni di (1) sono i punti critici del funzionale:

$$(0.1) \quad f(u) = 1/2 \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx + \lambda/2 \int_\Omega u(x)^2 \, dx + \int_\Omega G(u(x)) \, dx$$

$$u \in H_0^1(\Omega), \text{ ove } G(t) = \int_0^t g(s) \, ds.$$

Se $G$ soddisfa la seguente condizione di sopraquadraticità:

(i) $g(t) \cdot t \geq \alpha G(t)$ per $|t|$ grande, $\alpha > 2$,

allora è noto (cfr. [1], [2], [9]) che esistono infinite soluzioni del problema (1).

Osserviamo che la (i) implica che:

$$G(t) \geq |t|^\alpha \text{ per } |t| \text{ grande},$$

quindi i risultati di [1] non permettono di trattare funzioni $G$ che «crescono» poco più che quadraticamente all'infinito, come ad esempio la funzione:

$$(*) \; G(t) = t^2 \lg(1 + t^2).$$

Nel paragrafo 3 di questa nota dimostreremo il seguente teorema:

TEOREMA 0.1 - *Se la funzione $g$ soddisfa le ipotesi* $\mathrm{I}_1)$, $\mathrm{I}_2)$ *e le seguenti due condizioni:*

$\mathrm{I}_3)$ $$\lim_{|t| \to +\infty} \frac{g(t)}{t} = -\infty,$$

$\mathrm{I}_4)$ *esiste* $\alpha \in \mathbf{R}, \alpha > \beta$ *e* $\beta/\alpha \leq 1/2 + 1/n$ *tale che*
$G(t) - 1/2\, g(t) \cdot t \geq c_3 |t|^\alpha - c_4 \quad \forall t \in \mathbf{R}$,

*ove* $c_3, c_4 > 0$, *allora il problema* (1) *ha infinite soluzioni non banali, qualunque sia* $\lambda \in \mathbf{R}$.

Si osservi che la funzione (*) soddisfa l'ipotesi $I_4$).

Nel paragrafo 4 si studierà il problema (1) nell'ipotesi in cui $g$ è asintoticamente lineare. Si ottiene un risultato (cfr. teorema 4.9) che permette di stabilire, anche in condizioni di risonanza, un limite inferiore al numero di soluzioni non banali, che dipende dalle derivate di $g$ all'infinito e nell'origine.

## 1. - Il teorema astratto

In questo paragrafo enunceremo, nel caso particolare di funzionali pari, il teorema astratto, dimostrato in [4].

TEOREMA 1.1 - *Sia* $E$ *uno spazio di Hilbert reale e sia* $f$ *un funzionale su* $E$ *soddisfacente le seguenti ipotesi:*

$f_1$) $f(u) = 1/2(Lu \mid u) + \psi(u) \quad \forall u \in E,$

*dove*

i) $L$ *è un operatore lineare e autoaggiunto su* $E$,

ii) $\psi \in C^1(E, \mathbf{R}), \psi(0) = 0, \psi'$ *è un operatore compatto e dispari;*

$f_2$) $0 \notin \sigma_e(L)$ *(cioè 0 è un autovalore isolato di molteplicità finita oppure è nel risolvente di* $L$*);*

$f_3$) *dato* $c \in \,]0, +\infty[$, *ogni successione*
$\{u_n\} \subset f^{-1}(]0, +\infty[)$ *tale che:*
$\{f(u_n)\} \to c$ *per* $n \to \infty$,
$\|f'(u_n)\| \cdot \|u_n\| \to 0$ *per* $n \to \infty$,
*possiede una sottosuccessione limitata (in* $E$*);*

$f_4$) *esistono due sottospazi vettoriali* $V$ *e* $W$ *di* $E$ *chiusi, tali che:*

i) $\dim (V \cap W) < +\infty$, $\operatorname{codim} (V + W) < +\infty$,

ii) *esistono* $R, \delta > 0$ *tali che:*
$f(u) \geq \delta \quad \forall u \in V, \|u\| = R,$

iii) *esiste* $\beta \in \mathbf{R}$ *tale che* $f(u) \leq \beta$ *per ogni* $u \in W$.

*Allora, esistono almeno* $\overline{m}$ *coppie distinte di punti critici con valore critico maggiore o uguale di* $\delta$ *dove:*

$$\overline{m} = \dim (V \cap W) - \operatorname{codim} (V + W).$$

OSSERVAZIONE 1.2 - Nel Teorema 1.1 le ipotesi $f_2$) ed $f_3$) sostituiscono le ben note condizioni di Palais-Smale $(P-S)$, usate in teoremi analoghi da altri autori. Esse non implicano $(P-S)$ ma una condizione «più debole», che è stata introdotta da G. Cerami (cfr. [6]) ed utilizzata in [3] per studiare problemi in forte risonanza all'infinito.

Le ipotesi $f_4$) sono invece condizioni geometriche che consentono di dare un limite inferiore al numero di coppie di punti critici del funzionale $f$.

OSSERVAZIONE 1.3 - Si osservi che $V$ oppure $W$ possono anche avere dimensione e codimensione infinita, caso che si verifica nello studio delle soluzioni periodiche dei sistemi Hamiltoniani (cfr. [4]).

Si osservi inoltre che non è richiesto alcun comportamento del funzionale $\psi$ all'infinito. Pertanto il teorema 1.1 può essere utilizzato sia nel caso in cui $\psi$ sia sopraquadratico all'infinito (cioè $\frac{\psi(u)}{\|u\|^2} \to +\infty$ per $\|u\| \to +\infty$), che sottoquadratico all'infinito (cioè $\frac{\psi(u)}{\|u\|^2} \to 0$ per $\|u\| \to +\infty$).

## 2. - Alcuni preliminari tecnici

Denotiamo con:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

gli autovalori della realizzazione autoaggiunta $\mathcal{L}$ in $L^2(\Omega)$ dell'operatore differenziale:

$$u \to -\Delta u,$$

con la condizione di Dirichlet al bordo. Denotiamo poi con $L$ l'identità in $H_0^1(\Omega)$ con $r_1$ l'isomorfismo canonico tra $L^2(\Omega)$ ed il suo duale $(L^2(\Omega))'$ e con $r$ l'isomorfismo di Riesz che identifica $H^{-1}(\Omega)$ con $H_0^1(\Omega)$.

L'operatore $\tilde{I}$ definito dalla seguente catena di composizioni:

$$H_0^1(\Omega) \overset{i}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \overset{r_1}{\to} (L^2(\Omega))' \overset{i^*}{\hookrightarrow} H^{-1}(\Omega) \overset{r}{\to} H_0^1(\Omega),$$

ove $i^*$ denota l'immersione aggiunta di $i$, è un operatore compatto da $H_0^1(\Omega)$ in sé ed il suo spettro consiste dello zero e degli autovalori $1/\lambda_i$ (cfr. 8).

Nel seguito, se $\alpha \in \mathbf{R}$, porremo:

$$L_\alpha = L + \alpha \tilde{I} ;$$

evidentemente $L_\alpha$ è un operatore autoaggiunto in $H^1_0(\Omega)$ ed il suo spettro consiste di 1 e degli autovalori $1 + \alpha/\lambda_i$.

Inoltre l'autospazio $M_i$ dell'operatore $\mathcal{L}$ (in $L^2(\Omega)$) corrispondente all'autovalore $\lambda_i$ è anche autospazio di $L_\alpha$ corrispondente all'autovalore $1 + \alpha/\lambda_i$.

Con tali posizioni il funzionale (0.1) può scriversi nella seguente forma:

$$f(u) = 1/2(L_\lambda(u)|\,u)_{H^1_{0(\Omega)}} + \psi(u),$$

ove $\psi(u) = \int_\Omega G(u(x))\,dx$.

In questo paragrafo vogliamo esaminare in quali ipotesi su $g$ è possibile stabilire che il funzionale (0.1) soddisfa la condizione $f_3$).

Sussiste la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 2.1 - *Se esiste un numero reale* $\alpha$, *con* $\alpha > \beta$ *e* $\beta/\alpha \leq 1/2 + 1/n$, *tale che valga l'ipotesi* $I_2$) *ed inoltre:*

$I_2$)' $\quad \delta(G(t) - \frac{1}{2}\, g(t) \cdot t) \geq c_3\,|\,t\,|^\alpha - c_4 \quad \forall t \in \mathbf{R}$, *ove* $\delta = 1$ *o* $-1$ *e*

*ove* $c_3, c_4 > 0$, *allora il funzionale* (0.1), *associato al problema* (1), *soddisfa la condizione* $f_3$).

*Dim.* Fissato $c \in ]\,0\,,+\infty[$, sia $\{u_n\}$ una successione di elementi in

$f^{-1}(\,]\,0\,,+\infty\,[\,)$ tale che:

(2.1a) $\{f(u_n)\} \to c \qquad$ per $n \to \infty$,

(2.1b) $\|f'(u_n)\| \cdot \|u_n\| \to 0 \quad$ per $n \to \infty$.

In virtù della (2.1b) la successione

(2.2) $\quad 1/2 \int_\Omega |\,\nabla\, u_n(x)|^2\,dx + \lambda/2 \int_\Omega u_n(x)^2\,dx +$

$\qquad + 1/2 \int_\Omega g(u_n(x)) \cdot u_n(x)\,dx \to 0\,;$

pertanto dalla (2.2) e dalla (2.1a) si deduce che la successione:

(2.3) $\quad \int_\Omega G(u_n(x))\,dx - 1/2 \int_\Omega g(u_n(x))\,u_n(x)\,dx$ è limitata.

In virtù della $I_2$)':

$$G(u_n(x)) - 1/2\, g(u_n(x))\, u_n(x) \geq c_3\,|\,u_n(x)|^\alpha - c_4 \text{ per q.o. } x \in \Omega,$$

e in virtù della (2.3) si deduce che la successione:

(2.4) $\int_\Omega |u_n(x)|^\alpha dx$ è limitata.

Designiamo con $H^+$ (risp. $H^-$) lo spazio generato dalle autofunzioni relative agli autovalori positivi (risp. strettamente negativi) dell'operatore $L_\lambda$ e con $H^0$ il nucleo di $L_\lambda$; allora se $u \in H^1_0(\Omega)$:

$$u = u^+ + u^- + u^0,$$

ove $u^+ \in H^+, u^- \in H^-$ ed $u^0 \in H^0$.

Dalla (2.1b) si deduce che per una sottosuccessione di $\{u_n\}$, che denotiamo ancora con $\{u_n\}$, risulta:

$$\| f'(u_n) \| \cdot \| u_n^+ \| \to 0 \quad \text{per } n \to \infty,$$

da cui la successione:

(2.5) $(L_\lambda u_n \,|\, u_n^+) + \int_\Omega g(u_n(x))\, u_n^+(x)\, dx \to 0$ per $n \to \infty$.

Osserviamo ora che:

$(L_\lambda u_n \,|\, u_n^+) = \| u_n^+ \|^2_{H^1_0(\Omega)} + \lambda \| u_n^+ \|^2_{L^2(\Omega)}$

ed inoltre, per ogni $u \in H^+$, risulta:

$$\| u \|^2_{H^1_0(\Omega)} + \lambda \| u \|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=j}^{+\infty} \lambda_k \| u_k \|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda \sum_{k=j}^{+\infty} \| u_k \|^2_{L^2(\Omega)} =$$

$$= \sum_{k=j}^{+\infty} (\lambda_k + \lambda) \| u_k \|^2_{L^2(\Omega)},$$

ove $j$ è il più piccolo intero tale che:

$$\lambda_j + \lambda > 0,$$

e $\{u_k\}$ è la successione delle componenti di $u$ lungo gli autospazi corrispondenti agli autovalori di $\mathcal{L}$.

E' facile verificare che esiste $M > 0$, tale che, per ogni $u \in H^+$:

$$\sum_{k=j}^{+\infty} (\lambda_k + \lambda) \| u_k \|^2_{L^2(\Omega)} \geq M \sum_{k=j}^{+\infty} \lambda_k \| u_k \|^2_{L^2(\Omega)};$$

pertanto:

(2.6) $(L_\lambda(u_n^+) \,|\, u_n^+) \geq M \| u_n^+ \|^2_{H^1_0(\Omega)}$.

Se poniamo ora $\gamma = \alpha/\beta$, in virtù dell'ipotesi $\mathrm{I}_2$) abbiamo che:

$$|g(t)| \leq c_1 + c_2 |t|^{\alpha/\gamma} \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

quindi l'operatore:

$$u(\cdot) \to g(u(\cdot))$$

è un operatore continuo da $L^{\alpha}(\Omega)$ in $L^{\gamma}(\Omega)$. Inoltre:

$$\gamma' = \frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{\alpha}{\alpha - \beta},$$

e risulta:

$$\frac{\alpha}{\alpha - \beta} \leq \frac{2n}{n-2},$$

dato che

$$(\beta/\alpha \leq 1/2 + 1/n) \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\alpha - \beta} \leq \frac{2n}{n-2}\right);$$

pertanto, in virtù dei teoremi di immersione di Sobolev (essendo $n \geq 3$):

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\gamma'}(\Omega), \tag{2.7}$$

e per la disuguaglianza di Hölder e l'ipotesi $I_2$) abbiamo:

$$\begin{aligned} &- \textstyle\int_\Omega g(u_n(x))\, u_n^+(x)\, dx \leq \left| \int_\Omega g(u_n(x))\, u_n^+(x)\, dx \right| \leq \\ &\leq \left(\textstyle\int_\Omega |g(u_n(x))|^{\gamma} dx\right)^{1/\gamma} \cdot \left(\textstyle\int_\Omega |u_n^+(x)|^{\gamma'} dx\right)^{1/\gamma'} \leq \\ &\leq \left(\textstyle\int_\Omega (c_1 + c_2 |u_n(x)|^{\beta})^{\gamma} dx\right)^{1/\gamma} \cdot \| u_n^+ \|_{L^{\gamma'}(\Omega)} \leq \\ &\leq a + b \left(\textstyle\int_\Omega |u_n(x)|^{\alpha} dx\right)^{1/\gamma} \cdot \| u_n^+ \|_{L^{\gamma'}(\Omega)}, \end{aligned}$$

da cui, tenendo conto della (2.4) e della (2.7), deduciamo che:

$$- \textstyle\int_\Omega g(u_n(x))\, u_n^+(x)\, dx \leq a + c \| u_n^+ \|_{H_0^1(\Omega)}, \tag{2.8}$$

ove $a$, $b$ e $c$ sono costanti positive.

Allora, dalla (2.8) e dalla (2.6), si ricava:

$$\begin{aligned} &(L_\lambda(u_n) | u_n^+) + \textstyle\int_\Omega g(u_n(x))\, u_n^+(x)\, dx \geq \\ &\geq M \| u_n^+ \|^2_{H_0^1(\Omega)} - c \| u_n^+ \|_{H_0^1(\Omega)} - a. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Pertanto da (2.5) e da (2.9) si ricava che:

$$\| u_n^+ \|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \text{è limitata.}$$

Allo stesso modo si ricava che anche la successione:

$$\| u_n^- \|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \text{è limitata.}$$

Pertanto:

(2.10) $$\| u_n^+ + u_n^- \|_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{è limitata.}$$

D'altra parte, per la (2.4), la successione:

(2.11) $$\| u_n \|_{L^\alpha(\Omega)} \quad \text{è limitata.}$$

Da (2.10) e (2.11) e poiché $\dim(\ker L) < +\infty$, si ottiene facilmente che:

$$\| u_n \|_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{è limitata.}$$

## 3. - Dimostrazione del Teorema 0.1

In questo paragrafo dimostreremo il teorema 0.1. A tal fine premetteremo alcuni lemmi.

Nelle ipotesi $I_2$) ed $I_4$) il funzionale (0.1) soddisfa la condizione $f_3$), in virtù della proposizione 2.1. Inoltre, in virtù dell'ipotesi $I_1$), il funzionale (0.1) è pari.

LEMMA 3.1 - *Nelle ipotesi* $I_2$), $I_4$) *il funzionale* (0.1) *soddisfa la seguente condizione:*

$$\exists j \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \exists R, \delta > 0 \text{ t.c. } f(u) \geq \delta \quad \forall u \in V_j^\perp, \| u \| = R,$$

*ove* $V_j = \bigoplus_{k \leq j} M_k$ *ed* $M_k$ *è l'autospazio relativo all'autovalore* $\lambda_k$ *dell'operatore* $\mathcal{L}$.

*Dim.* Osserviamo che dall'ipotesi $I_4$) si deduce che:

$$G(t) - 1/2\, g(t) \cdot t \geq -a \qquad \forall t \in \mathbf{R},$$

ove $a > 0$ e dalla $I_2$) si ha:

$$| g(t) | \leq b(1 + | t |^\beta) \qquad \forall t \in \mathbf{R},$$

ove $b > 0$; pertanto:

(3.1) $$G(t) \geq -a + 1/2\, g(t) \cdot t \geq -a - 1/2\, b(1 + | t |^\beta) \cdot | t | \geq$$
$$\geq -c - d\, | t |^{\beta+1} \qquad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Allora se $j \neq 0$ è un intero sufficientemente grande ed

$$u \in V_j^\perp = \overline{\bigoplus_{k \geq j} M_k}$$

(dove la chiusura è presa in $H_0^1(\Omega)$) dalla (3.1)) abbiamo che:

(3.2) $$f(u) = 1/2 (L_\lambda(u) | u) + \int_\Omega G(u(x))\, dx \geq$$

$$\geq \bar{c}\, \| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega (c + d\, | u(x) |^{\beta+1})\, dx =$$

$$= \bar{c}\,\| u \|^2_{H^1_0(\Omega)} - e - d\,\| u \|^{\beta+1}_{L^{\beta+1}(\Omega)} \qquad (\bar{c} \quad e \geq 0).$$

Per i teoremi di immersione di Sobolev certamente esiste $\varepsilon > 0$ tale che:

$$(3.3) \qquad \| u \|_{L^{\beta+1}(\Omega)} \leq a_1 \| u \|_{H^{1-\varepsilon}_0(\Omega)}, \; a_1 \text{ costante positiva.}$$

Inoltre, se $u \in V_j^{\perp}$, risulta:

$$(3.4) \qquad \| u \|^2_{H^{1-\varepsilon}(\Omega)} = \sum_{k=j+1}^{+\infty} \lambda_k^{(1-\varepsilon)} \| u_k \|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Evidentemente:

$$\lambda_k^{-\varepsilon} \leq \lambda_{j+1}^{-\varepsilon} \qquad \text{per } k \geq j+1\,,$$

da cui:

$$\lambda_k^{(1-\varepsilon)} \leq \lambda_k \cdot \lambda_{j+1}^{-\varepsilon} \quad \text{per } k \geq j+1\,,$$

e tenendo conto della (3.3) e della (3.4) abbiamo:

$$\| u \|^2_{L^{\beta+1}(\Omega)} \leq a_1 \lambda_{j+1}^{-\varepsilon} \sum_{k=j+1}^{+\infty} \lambda_k \| u_k \|^2_{L^2(\Omega)} \leq a_1 \lambda_{j+1}^{-\varepsilon} \| u \|^2_{H^1_0(\Omega)},$$

da cui:

$$(3.5) \qquad \| u \|^{\beta+1}_{L^{\beta+1}(\Omega)} \leq b_1 \lambda_{j+1}^{-\varepsilon/2(\beta+1)} \cdot \| u \|^{\beta+1}_{H^1_0(\Omega)}.$$

In definitiva dalla (3.5) e dalla (3.2) deduciamo che:

$$(3.6) \qquad f(u) \geq \bar{c}\,\| u \|^2_{H^1_0(\Omega)} - e - d_1 \lambda_{j+1}^{-\varepsilon/2(\beta+1)} \cdot \| u \|^{\beta+1}_{H^1_0(\Omega)} \qquad \forall u \in V_j^{\perp}.$$

Scegliamo ora $R > 0$ tale che $(\bar{c} R^2 - e) > 0$, allora se $j$ è sufficientemente grande:

$$(3.7) \qquad d_1 \lambda_{j+1}^{-\varepsilon/2(\beta+1)} \cdot R^{\beta+1} < \frac{\bar{c} R^2 - e}{2} = \delta\,;$$

pertanto:

$$f(u) \geq (\bar{c} R^2 - e) - d_1 \lambda_{j+1}^{-\varepsilon/2(\beta+1)} R^{\beta+1} > \delta > 0 \quad \forall u \in V_j^{\perp}, \| u \| = R.$$

PROPOSIZIONE 3.2 - *Nelle ipotesi* $I_1$), $I_2$), $I_3$) *il funzionale* (0.1) *è limitato superiormente su ogni sottospazio vettoriale di* $H^1_0(\Omega)$ *di dimensione finita.*

*Dim.* Sia $W_n$ un sottospazio vettoriale di $H^1_0(\Omega)$ di dimensione finita $n$; in virtù della $I_3$), se $k > 0$, risulta:

(3.8) $\quad \exists \beta > 0 \ni -g(t) \geq kt \quad \forall t \in \mathbf{R}, |t| > \beta.$

Sia $u \in W_n$, allora:

$$f(u) = 1/2 \| u \|^2_{H^1_0(\Omega)} + \lambda/2 \| u \|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega G(u(x))\, dx,$$

quindi:

(3.9) $\quad f(u) \leq \bar{c} \| u \|^2_{H^1_0(\Omega)} + \int_\Omega G(u(x))\, dx.$

Poniamo:

$$\beta + = \{x \in \Omega \mid |u(x)| > \beta\}, \beta - = \{x \in \Omega \mid |u(x)| \leq \beta\},$$

pertanto:

$$\int_\Omega G(u(x)\, dx = \int_{\beta+} G(u(x)\, dx + \int_{\beta-} G(u(x)\, dx \leq a + \\ + \int_{\beta+} dx \int_0^{u(x)} g(s)\, ds,$$

ove $a$ è una costante positiva. Inoltre

$$\int_{\beta+} dx \int_0^{u(x)} g(s)\, ds = \int_{\beta+} dx \int_0^\beta g(s)\, ds + \\ + \int_{\beta+} dx \int_\beta^{u(x)} g(s)\, ds \leq M \beta \operatorname{mis}(\beta+) + \int_{\beta+} dx \int_\beta^{u(x)} g(s)\, ds,$$

ove $M = \sup_{0 \leq t \leq \beta} |g(t)|$.

In definitiva:

$$\int_\Omega G(u(x))\, dx \leq a + b + \int_{\beta+} dx \int_\beta^{u(x)} g(s)\, ds.$$

Poniamo ora:

$$\beta^1_+ = \{x \in \beta_+ \mid u(x) > \beta\}, \beta^2_+ = \{x \in \beta+ \mid u(x) < -\beta\},$$

allora

(3.10)
$$\int_{\beta+} dx \int_\beta^{u(x)} g(s)\, ds = \int_{\beta^1+} dx \int_\beta^{u(x)} g(s)\, ds + \\ + \int_{\beta^2+} dx \int_\beta^{u(x)} g(s)\, ds \leq - \int_{\beta^1+} dx \int_\beta^{u(x)} ks\, ds + \\ + \int_{\beta^2+} dx \int_\beta^{u(x)} g(s)\, ds = \int_{\beta^1+} [k/2\, \beta^2 - k/2\, u(x)^2]\, dx + \\ + \int_{\beta^2+} dx \int_\beta^{u(x)} g(s)\, ds,$$

e, in virtù della $I_1$), abbiamo che:

(3.11)
$$\int_{\beta^2+} dx \int_\beta^{u(x)} g(s)\, ds = \int_{\beta^2+} dx \int_{-\beta}^{-u(x)} g(s)\, ds = \\ = \int_{\beta^2+} dx \int_{-\beta}^{\beta} g(s)\, ds + \int_{\beta^2+} dx \int_\beta^{-u(x)} g(s)\, ds \leq c - \\ - \int_{\beta^2+} dx \int_\beta^{-u(x)} ks\, ds = c - \int_{\beta^2+} [k/2\, u(x)^2 - k/2\, \beta^2]\, dx,$$

ove $c = \int_{\beta^2+} dx \int_{-\beta}^{\beta} g(s)\, ds$.

Pertanto, dalla (3.11) e dalla (3.10), si ottiene:

$$\int_{\beta+} dx \int_{\beta}^{u(x)} g(s)\, ds \leq c + d - k/2 \int_{\beta+} u(x)^2\, dx,$$

ove $d = k/2 \int_\Omega \beta^2\, dx$, perciò:

(3.12) $\quad \int_\Omega G(u(x))\, dx \leq e - k/2 \int_{\beta+} u(x)^2\, dx,$

ove $e = a + b + c + d$.

Dalla (3.12) e dalla (3.9) deduciamo che:

(3.13) $\quad f(u) \leq \bar{c}\, \| u \|^2_{H^1_0(\Omega)} + e - k/2\, \| u \|^2_{L^2(\Omega)} +$

$$+ k/2 \int_{\beta-} u(x)^2\, dx \leq \bar{c}\, \| u \|^2_{H^1_0(\Omega)} - k/2\, \| u \|^2_{L^2(\Omega)} + e_1,$$

ove $e_1 = e + k/2\, \beta^2 \operatorname{mis}(\Omega)$.

Poiché $\dim W_n < +\infty$, dalla (3.13) si ottiene:

$$f(u) \leq c\, \| u \|^2_{H^1_0(\Omega)} - k \cdot d_2\, \| u \|^2_{H^1_0(\Omega)} + e_1,$$

ove $d_2$ è una costante positiva; se scegliamo $k$ sufficientemente grande abbiamo che:

$$f(u) \leq e_1 \quad \forall u \in W_n.$$

In virtù delle considerazioni premesse è facile verificare che per il funzionale (0.1) sono soddisfatte le ipotesi del «teorema astratto» relativamente a $V_j^\perp$ ed a $W_n = \bigoplus_{k \leq j} M_{k+n}$ ($n$ intero).

Allora, fissato un intero $n > 1$, in virtù del suddetto teorema, esistono almeno $m$ coppie di punti critici distinti per il funzionale (0.1), ove:

$$m = \dim(V_j^\perp \cap W_n) - \operatorname{codim}(V_j^\perp + W_n) \geq (n-1),$$

dato che:

$$\dim(V_j^\perp \cap W_n) \geq (n-1), \operatorname{codim}(V_j^\perp + W_n) = 0.$$

Allora, per ogni intero $n > 1$, esistono almeno $(n-1)$ coppie di soluzioni non banali del problema (1), dunque esistono infinite soluzioni non banali di (1).

## 4. - Problemi ellittici asintoticamente lineari

In questo paragrafo vogliamo stabilire un risultato di molteplicità nel caso in cui $g$ è asintoticamente lineare. A tale scopo poniamo per ogni $u \in H^1_0(\Omega)$:

(4.1) $L_\infty(u) = L(u) + \lambda \tilde{I}(u) = L_\lambda(u)$ (linearizzato di $L$ all'infinito),

(4.2) $L_0(u) = L(u) + \alpha \tilde{I}(u) = L_\alpha(u)$ (linearizzato di $L$ nell'origine),

ove $\alpha = \lambda + g'(0)$ e gli operatori $L$ ed $\tilde{I}$ sono quelli introdotti nel paragrafo 2.

Sussiste il seguente teorema:

TEOREMA 4.1 - *Se la funzione $g$ è derivabile e soddisfa le ipotesi* $I_1$), $I_2$) *e valgono le seguenti condizioni:*

$I_3$) $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} \frac{g(t)}{t} = 0,$

$I_4$) $(-\lambda) \notin \sigma(\mathcal{L})$,

*allora il problema* (1) *possiede almeno $m$ coppie di soluzioni non banali, dove:*

$$m = \begin{cases} \dim H^-_\infty - \dim(H^-_0 \oplus \ker L_0) & se\ \dim H^-_\infty \geq \dim(H^-_0 \oplus \ker L_0), \\ \dim H^-_0 - \dim H^-_\infty & se\ \dim H^-_0 \geq \dim H^-_\infty, \end{cases}$$

*ed* $H^-_\infty = \bigoplus_{\gamma<0} M^\infty_\gamma$ *con* $M^\infty_\gamma$ *autospazio relativo all'autovalore* $\gamma$ *di* $L_\infty$

*ed* $H^-_0 = \bigoplus_{\gamma<0} M^0_\gamma$ *con* $M^0_\gamma$ *autospazio relativo all'autovalore* $\gamma$ *di* $L_0$.

OSSERVAZIONE 4.2 - Dal teorema 4.1 discende che se non vi è neanche risonanza a zero (cioè $\ker L_0 = \{0\}$), allora il problema (1) possiede almeno

$$m = |\dim H^-_\infty - \dim H^-_0|$$

coppie di soluzioni non banali.

In termini meno precisi, possiamo dire che (1) possiede almeno tante coppie di soluzioni non banali quanti sono gli autovalori (contati con la loro molteplicità) di $L_\lambda$ «attraversati» dal termine non lineare $(-g)$.

DEFINIZIONE 4.3 - Sia $E$ uno spazio di Hilbert ed $f$ un funzionale reale su $E$ tale che:

$$f(u) = 1/2(L(u)|\,u) + \psi(u) \quad \forall u \in E,$$

ove $L$ è un operatore lineare e autoaggiunto in $E$ e $\psi$ è un funzionale su $E$ di classe $C^1$, tale che $\psi'$ è un operatore compatto.

Diremo che il funzionale $f$ è asintoticamente quadratico (o che $f'$ è asintoticamente lineare) se esiste un operatore $L_\infty$ su $E$, autoaggiunto e tale che:

a) $\displaystyle\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{f'(u) - L_\infty(u)}{\|u\|} = 0.$

L'operatore $L_\infty$ prende il nome di linearizzato di $f'$ all'infinito.

Inoltre se $0 \in \sigma(L_\infty)$, diremo che l'operatore

$$u \in E \to f'(u) \in E$$

è risonante all'infinito.

Per i funzionali asintoticamente quadratici sussiste il seguente teorema:

TEOREMA 4.4 - *Sia $f$ un funzionale asintoticamente quadratico su $E$, tale che $0 \notin \sigma_e(L)$ (ove $f' = L + \psi'$). Allora se l'operatore*

$$u \in E \to f'(u) \in E$$

*è non risonante all'infinito (cioè $0 \notin \sigma(L_\infty)$), il funzionale $f$ soddisfa la condizione* $f_3$) *(cfr. § 1, Teor. 1.1).*

Tale risultato è noto in varie forme in letteratura, comunque una sua dimostrazione si trova in [6].

PROPOSIZIONE 4.5 - *Nelle ipotesi* $I_2$), $I_3$) *il funzionale* (0.1), *associato al problema* (1), *è asintoticamente quadratico; precisamente l'operatore $L_\infty$, definito dalla* (4.1), *è il linearizzato di $f'$ all'infinito.*

*Dim.* Proviamo la a) della definizione 4.3. A tale scopo osserviamo che, se $u \in H^1_0(\Omega)$, risulta:

$$f'(u) - L_\infty(u) = g(u)\,;$$

perciò basterà dimostrare che:

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{g(u)}{\|u\|} = 0\,. \tag{4.3}$$

Sia $\varepsilon > 0$, in virtù dell'ipotesi $I_3$)

$$\exists \delta_1 > 0 \ni |g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2a_1^2}|t| \quad \forall t \in \mathbf{R}, |t| > \delta_1\,, \tag{4.4}$$

ove $a_1 > 0$ è la costante di immersione di $H^1_0(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$.

Osserviamo ora che, fissato arbitrariamente $u \in H^1_0(\Omega)$ e $\varphi \in H^1_0(\Omega)$, $\|\varphi\| \leq 1$ risulta:

$$\int_\Omega g(u(x))\,\varphi(x)\,dx = \int_{\beta+} g(u(x))\,\varphi(x)\,dx + \int_{\beta-} g(u(x))\,\varphi(x)\,dx$$
ove $\beta+ = \{x \in \Omega \mid \ |u(x)| > \delta_1\}$, $\beta- = \{x \in \Omega \mid \ |u(x)| \leq \delta_1\}$; pertanto, tenendo conto della (4.4), abbiamo che:

$$\int_\Omega g(u(x))\,\varphi(x)\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2a_1^2}\int_\Omega |u(x)| \cdot |\varphi(x)|\,dx + M\int_\Omega |\varphi(x)|\,dx\,,$$

ove $M = \sup\limits_{t \in [-\delta_1, \delta_1]} |g(t)|$ .

Posto $c = (\text{mis}(\Omega))^{1/2}$, dalla disuguaglianza precedente abbiamo che:

$$\int_\Omega g(u(x))\, \varphi(x)\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2a_1^2} \| u \|_{L^2(\Omega)} \cdot \| \varphi \|_{L^2(\Omega)} + M c \| \varphi \|_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\leq \varepsilon/2 \| u \|_{H_0^1(\Omega)} + M c_1 \quad (c_1 = a_1 c),$$

perciò

$$(4.5) \qquad \| g(u) \|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\| \varphi \|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \left| \int_\Omega g(u(x))\, \varphi(x)\, dx \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon/2 \| u \|_{H_0^1(\Omega)} + M c_1 .$$

Dalla (4.5) segue evidentemente la conclusione.

OSSERVAZIONE 4.6 - Il funzionale (0.1) soddisfa la condizione $f_3$), in quanto per esso sono soddisfatte le ipotesi del teorema 4.4. Infatti, in virtù della proposizione 4.5, il funzionale (0.1) è asintoticamente quadratico e $0 \notin \sigma_e(L_\lambda) = \{1\}$. Inoltre, da come è stato definito loperatore $L_\infty$, i suoi autovalori sono dati dalla seguente successione:

$$1 + \lambda/\lambda_1 , 1 + \lambda/\lambda_2 , \ldots , 1 + \lambda/\lambda_n , \ldots ,;$$

pertanto, per l'ipotesi $I_4$), $0 \notin \sigma(L_\infty)$.

Dimostriamo ora la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 4.7 - *Nelle ipotesi* $I_1$), $I_2$), $I_3$) *esistono* $R, \delta > 0$ *tali che*

$$f(u) \geq \delta \quad \forall u \in H_o^+ , \| u \| = R ,$$

*ove* $H_o^+ = \overline{\bigoplus M_\gamma^o} \quad \gamma \in \{\mu \in \sigma(L_o) | \mu > 0\}$.

*Dim.* Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ ed osserviamo che:

$$f(u) = f(o) + f'(o)\,(u) + 1/2 f''(o)\,(u,u) + o(\| u \|^2) =$$

$$= 1/2 f''(o)\,(u,u) + o(\| u \|^2),$$

dato che $f(o) = f'(o) = 0$. Allora:

$$f(u) = 1/2 (L_o(u) | u) + o(\| u \|^2).$$

Pertanto:

$$(4.6) \qquad f(u) \geq \lambda_o/2 \| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} + o(\| u \|^2) \quad \forall u \in H_o^+ ,$$

ove $\lambda_0 = \min\{\lambda \in \sigma(L_0) | \lambda > 0\}$ e, tenendo conto che $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, dalla (4.6) si deduce banalmente la tesi.

PROPOSIZIONE 4.8 - *Nell'ipotesi* I$_3$) *il funzionale* (0.1) *è limitato superiormente su* $H^-_\infty$.

*Dim.* Poniamo: $p(t) = g(t) + \lambda t$,
$P(t) = \int_0^t p(s)\, ds$,

ed osserviamo che:

(4.7) $$\forall u \in H^-_\infty \quad f(u) = 1/2 \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \int_\Omega P(u(x))\, dx =$$
$$= 1/2 (L_\infty(u)| u) - \lambda/2 \int_\Omega u(x)^2 dx + \int_\Omega P(u(x))\, dx \leq$$
$$\leq \mu_1/2 \| u \|^2_{H^1_0(\Omega)} + \int_\Omega (P(u(x)) - \lambda/2\, u(x)^2)\, dx,$$

dove $\mu_1 = \max\{\mu \in \sigma(L_\infty) | \mu < 0\}$.

Inoltre osserviamo che:

(4.8) $$|P(t) - \lambda/2\, t^2| = |\int_0^1 g(st)\, t\, ds| \leq |t| \int_0^1 |g(st)|\, ds.$$

In virtù della I$_3$), fissato $\varepsilon > 0$ arbitrariamente

(4.9) $\exists M > 0 \ni |g(s)| \leq \varepsilon |s| \quad \forall s \in \mathbf{R}, |s| \geq M$, allora, se $t \in \mathbf{R}$ tale che $|t| > M$, posto:

$$\gamma^+ = \{s \in [0,1] \mid |st| > M\},\ \gamma^- = \{s \in [0,1] \mid |st| \leq M\},$$

risulta:

$$\int_0^1 |g(st)|\, ds = \int_{\gamma^+} |g(st)|\, ds + \int_{\gamma^-} |g(st)|\, ds \leq$$
$$\leq a + \varepsilon \int_{\gamma^+} |st|\, ds \leq a + \varepsilon/2\, |t|,$$

ove $a = \sup\limits_{t \in [-M,M]} |g(t)|$ .

Pertanto, tenendo conto della (4.8), abbiamo che:

(4.10) $|P(t) - \lambda/2\, t^2| \leq a|t| + \varepsilon/2\, |t|^2$ per $|t| > M$, e dalla (4.10)

(4.7) ricaviamo:

(4.11) $$\forall u \in H^-_\infty\ f(u) \leq \mu_1/2 \| u \|^2_{H^1_0(\Omega)} + \int (a|u(x)| + \varepsilon/2\, |u(x)|^2)\, dx + b,$$

ove l'integrale è esteso all'insieme $\{x \in \Omega \mid |u(x)| > M\}$, e ove $b = \int (P(u(x)) - (\lambda/2)\, u(x)^2)\, dx$, quest'ultimo integrale essendo esteso all'insieme $\{x \in \Omega \mid |u(x)| \leq M\}$.

Indicando come al solito con $a_1$ la costante di immersione di $H^1_0(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$, si ottiene:

(4.12) $\forall u \in H_\infty^- \; f(u) \leq \mu_1/2 \; \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + a\|u\|^2_{L^1(\Omega)} +$

$$+ \varepsilon/2\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + b \leq 1/2(\mu_1 + a_1^2\varepsilon)\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} +$$

$$+ c\|u\|_{H^1_0(\Omega)} + b \; (c > 0).$$

Scelto $\varepsilon > 0$ tale che $(\mu_1 + a_1^2\varepsilon) < 0$, dalla (4.12) deduciamo che:

$$\lim_{\|u\|\to\infty} f(u) = -\infty, \; u \in H_\infty^- .$$

In virtù delle considerazioni premesse è facile verificare che il funzionale (0.1), associato al problema (1), soddisfa alle ipotesi del «teorema astratto» (cf. § 1, teorema 1.1) relativamente ad $H_\infty^-$ ed $H_o^+$.

Pertanto esistono almeno $m$ coppie di punti critici distinti del funzionale (0.1), ove:

$$m = \dim(H_o^+ \cap H_\infty^-) - \operatorname{codim}(H_o^+ + H_\infty^-).$$

Se supponiamo che $\dim H_\infty^- \geq \dim(H_o^- \oplus \ker L_o)$, poiché:

$$H_o^1(\Omega) = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4,$$

ove $H_2 = H_o^+ \cap H_\infty^-$, $H_1 + H_2 = H_o^+$, $H_2 + H_3 = H_\infty^-$,

risulta $\dim H_4 = \operatorname{codim}(H_o^+ + H_\infty^-)$, da cui:

$$m = \dim H_2 - \dim H_4 = \dim H_2 - (\operatorname{codim} H_o^+ - \dim H_3) =$$

$$= \dim H_2 + \dim H_3 - \operatorname{codim} H_o^+ = \dim H_\infty^- - \operatorname{codim} H_o^+ =$$

$$= \dim H_\infty^- - \dim(H_o^- \oplus \ker L_o).$$

Supponiamo ora $\dim H_o^- \geq \dim H_\infty^-$, ragionando come nella dimostrazione della proposizione 4.7, abbiamo che:

$$\exists R, \delta > 0 \ni -f(u) \geq \delta \quad \forall u \in H_o^-, \|u\| = R,$$

e che $(-f)$ è limitato superiormente su $H_\infty^+ = \overline{\bigoplus_{\gamma>0} M_\gamma^-}$.

Pertanto, applicando il «teorema astratto» al funzionale $(-f)$ si ha che esistono almeno

$$m = \dim(H_o^- \cap H_\infty^+) - \operatorname{codim}(H_o^- + H_\infty^+) = \dim H_o^- - \dim H_\infty^-$$

coppie di punti critici del funzionale $(-f)$.

Se la condizione di non risonanza all'infinito (cioè la $I_4$)) non è verificata, sussiste il seguente teorema:

TEOREMA 4.9 - *Se valgono* $I_1$), $I_2$), $I_3$) *(cfr. Teor. 4.1) ed inoltre vale* $I_2$)' *(cfr. Prop. 2.1), allora il problema* (1) *ha almeno un numero m di coppie di soluzioni non banali, dove:*

$$m = \begin{cases} \dim H_\infty^- - \dim(H_0^- \oplus \operatorname{Ker} L_0) & se \ \dim H_\infty^- \geq \dim(H_0^- \oplus \operatorname{Ker} L_0), \\ \dim H_0^- - \dim(H_\infty^- \oplus \operatorname{Ker} L_\infty) & se \ \dim H_0^- \geq \dim(H_\infty^- \oplus \operatorname{Ker} L_\infty) \end{cases}$$

La dimostrazione del teorema 4.9 è del tutto analoga alla dimostrazione del teorema 4.1; l'unica variante è costituita dal fatto che, in tal caso, il funzionale (0.1) soddisfa la condizione $f_3$) in virtù della proposizione 2.1.

## BIBLIOGRAFIA

[1] A. AMBROSETTI, P. H. RABINOWITZ,*Dual variational methods in critical points theory and applications,* J. Funct. Anal. *14* (1973), 349-381.

[2] V. BENCI, *Some critical point theorems and Applications,* Comm. Pure Appl. Math. *33* (1980), 169-172.

[3] P. BARTOLO, V. BENCI, D. FORTUNATO, *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with «strong resonance» at «infinity»,* Nonlinear Analysis Theory Methods and Appl., 7 (1983), 981-1012.

[4] V. BENCI, A. CAPOZZI, D. FORTUNATO, *Periodic solutions of Hamiltonian systems with a prescribed period,* preprint, M. R. C. Technical Report, n. 2508.

[5] V. BENCI, A. CAPOZZI, D. FORTUNATO, *Periodic solutions for a class of Hamiltonian system,* Lectures Notes in Mathematic, Springer Verlag, *964* (1982), 86-94.

[6] G. CERAMI, *Un criterio di esistenza per i punti critici su varietà illimitate,* Rendiconti dell'Accademia di Sc. e Lettere dell'Ist. Lombardo, *112* (1978), 332-336.

[7] A. DE CANDIA, *Teoria dei punti critici in presenza di simmetrie ed applicazioni,* tesi di laurea, Università degli Studi di Bari, (1982).

[8] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators,* Springer Verlag, New York (1966).

[9] P. H. RABINOWITZ, *Variational methods for nonlinear eigenvalue problems,* corso C.I.M.E. (G. Prodi coordinatore), Edizioni Cremonese (1974), 141-195.