SUGLI ULTRAFILTRI SU UN INSIEME DIRETTO (*)

di ASSUNTA RUSSO (a Napoli) (**)

SOMMARIO. - *Dimostro che lo spazio degli ultrafiltri su un arbitrario insieme diretto complementato è omeomorfo allo spazio degli ultrafiltri su un'opportuna algebra di Boole. Caratterizzo inoltre i $\mathcal{S}$-filtri che sono intersezioni di $\mathcal{S}$-ultrafiltri per una classe di insiemi diretti complementati $\mathcal{S}$ che include le topologie; provo con un controesempio che tale caratterizzazione non vale in generale.*

SUMMARY. - *We prove that for any complemented directed set $\mathcal{S}$ the space of all ultrafilters on $\mathcal{S}$ is homeomorphic to the space of all ultrafilters on a suitable Boolean algebra. Furthemore, we characterize the $\mathcal{S}$-filters which are intersections of $\mathcal{S}$-ultrafilters for a class of directed complemented sets $\mathcal{S}$ which includes the topologies. By exhibiting a counterexample, we show that such a characterization is not in general true.*

Introduzione. - P. SAMUEL in [2] ha esteso le nozioni di filtro e ultrafiltro a un arbitrario insieme diretto $\mathcal{S}$ introducendo in particolare una topologia «naturale» sull'insieme degli ultrafiltri su $\mathcal{S}$. In [1] B. BANASCHEWSKI studia tale topologia nel caso particolare in cui $\mathcal{S}$ è l'insieme delle parti di un dato insieme.

Nella presente nota dopo avere, nel n. 1, richiamato le nozioni e i risultati che utilizzerò, nel n. 2 provo che lo spazio degli ultrafiltri su un arbitrario insieme diretto complementato è omeomorfo

(*) Pervenuto in Redazione il 7 febbraio 1983.
(**) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli» - Via Mezzocannone, 8 - 80134 Napoli.

allo spazio degli ultrafiltri su un'opportuna algebra di Boole e generalizzo due risultati contenuti in [1]; nel n. 3 dò una caratterizzazione dell'insieme dei filtri intersezioni di ultrafiltri per una classe di insiemi diretti comprendente le topologie, provando con un controesempio che tale caratterizzazione non vale in generale. Nel n. 4 dimostro ulteriori proprietà dello spazio degli ultrafiltri nel caso in cui $\mathcal{S}$ sia una topologia.

1. - In questo numero richiamo le nozioni e i risultati che utilizzerò.

Seguendo SAMUEL [2] diremo che $\mathcal{S}$ è un insieme *diretto* se in $\mathcal{S}$ è definito un ordine parziale $\leq$ godente delle proprietà:

i) Per ogni $a, b \in \mathcal{S}$ esiste l'estremo inferiore dell'insieme $\{a, b\}$.

ii) $\mathcal{S}$ ha minimo ω.

Per ogni $a, b \in \mathcal{S}$ l'estremo inferiore di $\{a, b\}$ sarà denotato con $a \wedge b$.

Un $\mathcal{S}$-filtro $\mathcal{F}$ è una parte di $\mathcal{S}$ godente delle proprietà: I) $a \in \mathcal{F}$ e $x \geqq a \Rightarrow x \in \mathcal{F}$, II) $a, b \in \mathcal{F} \Rightarrow a \wedge b \in \mathcal{F}$, III) $\omega \notin \mathcal{F}$.

Un $\mathcal{S}$-ultrafiltro è un $\mathcal{S}$-filtro massimale rispetto all'inclusione.

1.1 - *Ogni $\mathcal{S}$-filtro è incluso in qualche $\mathcal{S}$-ultrafiltro.*

Come in [2] diremo che $\mathcal{S}$ è *complementato* se per ogni $a \in \mathcal{S}$ l'insieme $\{x \in \mathcal{S}, a \wedge x = \omega\}$ ha massimo $\mathcal{C}a$. In tal caso $\mathcal{C}a$ è detto *complemento* di a. In generale $\mathcal{C}\mathcal{C}a \geqq a$. Un insieme complementato è dotato di massimo dato dal complemento di ω.

Nel seguito di questo numero $\mathcal{S}$ sarà un insieme diretto complementato. Per ogni $a, b \in \mathcal{S}$ denoteremo con $a \vee b$ l'elemento di $\mathcal{S}$ $\mathcal{C}(\mathcal{C}a \wedge \mathcal{C}b)$. Essendo $a \vee a = \mathcal{C}\mathcal{C}a$, in generale l'operazione $\vee$ non è idempotente e l'elemento $a \vee b$ non è l'estremo superiore di $\{a, b\}$.

1.2 - *Un $\mathcal{S}$-filtro $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{S}$-ultrafiltro se e solo se per ogni $a \in \mathcal{S}$ o $a \in \mathcal{F}$ oppure $\mathcal{C}a \in \mathcal{F}$.*

1.3 - *Se $a_1 \vee \ldots \vee a_n$ appartiene all'ultrafiltro $\mathcal{U}$ almeno uno degli a_i appartiene a $\mathcal{U}$.*

Sia $\overline{\mathcal{S}}$ il sottoinsieme di $\mathcal{S}$ costituito dai complementi degli elementi di $\mathcal{S}$.

1.4 - *L'insieme $\overline{\mathcal{S}}$ è un'algebra di Boole rispetto a $\wedge$ e $\vee$. Per ogni $a, b \in \overline{\mathcal{S}}$ risulta $a \vee b = \min\{x \in \overline{\mathcal{S}}, x \geqq a$ e $x \geqq b\}$.*

1.5 - *L'insieme $\mathcal{S}$ è un'algebra di Boole se e solo se $\mathcal{C}\mathcal{C}a$ coincide con a per ogni $a \in \mathcal{S}$.*

1.6 - *L'insieme $\mathcal{S}$ è un'algebra di Boole se e solo se ogni $\mathcal{S}$-filtro è intersezione di $\mathcal{S}$-ultrafiltri.*

Siano Φ l'insieme dei $\mathcal{S}$-filtri e Ω l'insieme dei $\mathcal{S}$-ultrafiltri. Per ogni $\mathfrak{F} \in \Phi$ denotiamo con $\Omega_{\mathfrak{F}}$ l'insieme costituito dai $\mathcal{S}$-ultrafiltri contenenti $\mathfrak{F}$. Si ottiene una topologia per Ω assumento come chiusi l'insieme vuoto e gli insiemi $\Omega_{\mathfrak{F}}$. Una base per gli aperti è allora l'insieme $\{\Omega_{\langle a \rangle}\}_{a \in \mathcal{S}}$, dove $\langle a \rangle$ è il filtro principale $\{x \in \mathcal{S}, x \geqq a\}$. La topologia così definita in Ω è totalmente sconnessa, e quindi 0-dimensionale, T_2 e compatta.

Le notazioni e le nozioni di topologia generale non esplicitamente richiamate sono quelle di [4].

2. - Siano $\mathcal{S}$ un insieme diretto complementato e $\bar{\mathcal{S}}$ l'algebra di Boole costituita dai complementi degli elementi di $\mathcal{S}$ (1.4). Essa coincide con l'insieme $\{a \in \mathcal{S}, a = \mathcal{C}\mathcal{C}a\}$. Denoteremo con $\bar{\Phi}$ e $\bar{\Omega}$ rispettivamente l'insieme dei $\bar{\mathcal{S}}$-filtri e dei $\bar{\mathcal{S}}$-ultrafiltri. Per 1.6 ogni elemento di $\bar{\Phi}$ è intersezione di elementi di $\bar{\Omega}$. Denoteremo inoltre con $\tilde{\Phi}$ il sottoinsieme di Φ costituito dai $\mathcal{S}$-filtri che sono intersezione di $\mathcal{S}$-ultrafiltri.

2.1 - 1) *Gli insiemi $(\tilde{\Phi}, \subseteq)$ e $(\bar{\Phi}, \subseteq)$ sono isomorfi.* 2) *Gli spazi Ω e $\bar{\Omega}$ sono omeomorfi.*

Dim. Consideriamo l'applicazione $f : \Phi \to \bar{\Phi}$ definita da $f(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F} \cap \bar{\mathcal{S}}$. Se $\bar{\mathfrak{F}}$ appartiene a $\bar{\Omega}$ e $\langle \bar{\mathfrak{F}} \rangle$ è il $\mathcal{S}$-filtro generato da $\bar{\mathfrak{F}}$, è chiaro che $f(\langle \bar{\mathfrak{F}} \rangle) = \bar{\mathfrak{F}}$. La f è perciò suriettiva. Essa, inoltre, gode della seguente proprietà:

$$(*) \qquad \mathfrak{F} \in \Phi, \tilde{\mathfrak{F}} \in \tilde{\Phi} \text{ e } f(\mathfrak{F}) \subseteq f(\tilde{\mathfrak{F}}) \Rightarrow \mathfrak{F} \subseteq \tilde{\mathfrak{F}}.$$

Sia infatti $\tilde{\mathfrak{F}} = \cap \mathcal{U}_i$. Se $a \in \mathfrak{F}$ si ha, essendo $a \leqq \mathcal{C}\mathcal{C}a \in \bar{\mathcal{S}}$, che $\mathcal{C}\mathcal{C}a$ appartiene a $\mathfrak{F} \cap \bar{\mathcal{S}} = f(\mathfrak{F})$ e quindi a $f(\tilde{\mathfrak{F}})$; ma allora $\mathcal{C}\mathcal{C}a \in \tilde{\mathfrak{F}}$ e quindi a ciascun $\mathcal{U}_i$, da cui (essendo $\mathcal{C}a \wedge \mathcal{C}\mathcal{C}a = \omega$) a appartiene a ciascun $\mathcal{U}_i$, cioè $a \in \tilde{\mathfrak{F}}$.

E' poi chiaro che f conserva l'inclusione.

Dalla (*) segue subito che la restrizione $\tilde{f}$ di f a $\tilde{\Phi}$ è iniettiva, potendosi in (*) scambiare i ruoli di $\mathfrak{F}$ e $\tilde{\mathfrak{F}}$ se anche $\mathfrak{F}$ appartiene a $\tilde{\Phi}$.

Per provare la suriettività di $\bar{f}$ osserviamo innanzitutto che la f manda ultrafiltri in ultrafiltri. Inoltre, se $\overline{\mathfrak{U}} \in \bar{\Omega}$ e $\mathfrak{U}$ è un $\mathfrak{S}$-ultrafiltro contenente $\langle\overline{\mathfrak{U}}\rangle$, l'ultrafiltro $f(\langle\overline{\mathfrak{U}}\rangle) = \overline{\mathfrak{U}}$ è incluso, e quindi coincide, con $f(\mathfrak{U})$. Per l'iniettività di $\bar{f}$ non esistono altri $\mathfrak{S}$-ultrafiltri che abbiano $\overline{\mathfrak{U}}$ come corrispondente. Sia ora $\bar{\mathfrak{F}} \in \bar{\mathfrak{S}}$. Esso è intersezione di $\bar{\mathfrak{S}}$-ultrafiltri: $\bar{\mathfrak{F}} = \cap \overline{\mathfrak{U}}_i$. Il $\mathfrak{S}$-filtro $\mathfrak{F} = \cap \bar{f}^{-1}(\overline{\mathfrak{U}}_i)$ appartiene a $\tilde{\Phi}$ e ha per immagine in f $\bar{\mathfrak{F}}$. Dunque $\bar{f}$ è anche suriettiva.

Da (*) e dal fatto che f conserva l'inclusione segue che $\bar{f}$ è un isomorfismo.

Le considerazioni precedenti provano anche che la restrizione $\bar{f}$ di f a Ω è una biezione di Ω su $\bar{\Omega}$.

Resta da provare la continuità di $\bar{f}$ e di $\bar{f}^{-1}$. Sia $\Omega_{\mathfrak{F}}$ un chiuso di Ω. Detto $\tilde{\mathfrak{F}}$ il filtro (appartenente a $\tilde{\Phi}$) intersezione dei $\mathfrak{S}$-ultrafiltri contenenti $\mathfrak{F}$, si ha che $\Omega_{\mathfrak{F}}$ coincide con $\Omega_{\tilde{\mathfrak{F}}}$. Allora $\bar{f}(\Omega_{\mathfrak{F}}) =$

$$= \{\bar{f}(\mathfrak{U}), \mathfrak{U} \supseteq \mathfrak{F}\} = \{\overline{\mathfrak{U}}, \overline{\mathfrak{U}} \supseteq \bar{f}(\tilde{\mathfrak{F}})\} = \Omega_{\bar{f}(\tilde{\mathfrak{F}})}.$$

Valendo considerazioni analoghe per $\bar{f}^{-1}$, $\bar{f}$ è un omeomorfismo.

Osservazione 2.1 - L'esistenza di un omeomorfismo tra Ω e $\bar{\Omega}$ si può anche dimostrare sfruttando il fatto che Ω è totalmente sconnesso, compatto e T_2 e applicando quindi il risultato del Teorema 2 di [3] che assicura l'esistenza di un omeomorfismo tra Ω e lo spazio Ω' degli ultrafiltri sull'algebra di Boole $\mathfrak{S}'$ costituita dai sottoinsiemi aperti e compatti (cioè aperti e chiusi) di Ω. Infatti i sottoinsiemi aperti e chiusi di Ω sono evidentemente tutti e soli gli insiemi del tipo $\bigcup_{i \in F} \Omega_{\langle a_i \rangle}$ con $a_i \in \mathfrak{S}$, F finito; poiché per 1.3 $\bigcup_{i \in F} \Omega_{<a_i>} = \Omega_{<\bigvee_{i \in F} a_i>}$, gli unici sottoinsiemi aperti e chiusi di Ω sono gli insiemi $\Omega_{<a>}$, $a \in \mathfrak{S}$. Cioè $\mathfrak{S}' = \{\Omega_{<a>}\}_{a \in \mathfrak{S}}$.

Sia ora Φ l'applicazione di $\mathfrak{S}'$ in $\bar{\mathfrak{S}}$ definita da $\Omega_{<a>} \mapsto \mathcal{C}\mathcal{C}a$. Poiché $\Omega_{\langle a \rangle} = \Omega_{\langle \mathcal{C}\mathcal{C}a \rangle}$ la Φ è iniettiva. Inoltre un elemento di $\bar{\mathfrak{S}}$ è del tipo $\mathcal{C}a$ per qualche $a \in \mathfrak{S}$ e si ha che $\Phi(\Omega_{\langle \mathcal{C}a \rangle}) = \mathcal{C}\mathcal{C}\mathcal{C}a = \mathcal{C}a$. Cioè

Φ è suriettiva. E' inoltre $\Phi(\Omega_{\langle a\rangle} \cup \Omega_{\langle b\rangle}) = \Phi(\Omega_{\langle a\vee b\rangle}) =$
$= \Phi(\Omega_{\langle \mathcal{C}(\mathcal{C}a\wedge \mathcal{C}b)\rangle}) = \mathcal{C}(\mathcal{C}a\wedge\mathcal{C}b) = \Phi(\Omega_{\langle a\rangle})\vee\Phi(\Omega_{\langle b\rangle})$.
Valendo considerazioni analoghe per $\cap$ e $\wedge$, Φ è un isomorfismo. Dunque Ω' è omeomorfo a $\bar{\Omega}$ e, per quanto precedentemente detto, Ω è omeomorfo a $\bar{\Omega}$.

Osservazione 2.2 - Lo spazio Ω, come ogni spazio 0-dimensionale, T_2 e localmente compatto, è immergibile in uno spazio di Cantor (cioè in un prodotto di copie dello spazio discreto $\{0,1\}$) [4]. Nel caso di Ω si ottiene un'immersione ψ in $\{0,1\}^{\mathcal{S}}$ ponendo $\psi(\mathcal{U}) = (c_a(\mathcal{U}))_{a\in\mathcal{S}}$, con $c_a(\mathcal{U}) = 1$ o 0 a seconda che a appartenga o meno a $\mathcal{U}$. Per la prop. 2.1 2), Ω è allora immergibile anche in $\{0,1\}^{\bar{\mathcal{S}}}$.

La prossima proposizione generalizza il lemma 3 di [1].

2.2 - *Gli automeomorfismi di Ω sono tutte e sole le permutazioni di Ω indotte dagli automorfismi di* $(\tilde{\Phi}, \subseteq)$.

Dim. Basta ragionare come in [1] dopo aver osservato che per ogni chiuso C di Ω esiste uno e un sol filtro $\mathcal{F} \in \Phi$ tale che $\Omega_{\tilde{\mathcal{F}}} = C$.

Sia $\mathcal{A}$ l'insieme degli atomi di $\mathcal{S}$. Vale la seguente proposizione:

2.3 - *Se per ogni $x \notin \mathcal{A}\cup\{\omega\}$ esiste un $x_1 \in \mathcal{S} - \{\omega\}$ tale che $\mathcal{C}\mathcal{C}x_1 \overset{<}{\neq} x$, un $\mathcal{S}$-ultrafiltro $\mathcal{U}_\circ$ è isolato in Ω se e solo se esiste un atomo $x_\circ$ tale che $\mathcal{U}_\circ = \langle x_\circ\rangle$.*

Dim. Sia $\mathcal{U}_\circ$ isolato. Allora esiste un filtro $\mathcal{F}$ tale che $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ per $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}_\circ$ e $\mathcal{F} \not\subseteq \mathcal{U}_\circ$. Sia $a \in \mathcal{F} - \mathcal{U}_\circ$; $\mathcal{U}_\circ$ è l'unico ultrafiltro passante per $\mathcal{C}a$. Supponiamo per assurdo che $\mathcal{C}a$ non sia un atomo di $\mathcal{S}$. Allora esiste $a_1 \in \mathcal{S} - \{\omega\}$ tale che $\mathcal{C}\mathcal{C}a_1 \overset{<}{\neq} \mathcal{C}a$. Poiché $a_1 \leqq \mathcal{C}\mathcal{C}a_1 \overset{<}{\neq} \mathcal{C}a$, $a_1 \in \mathcal{U}_\circ$. Consideriamo ora l'elemento di $\mathcal{S}$ $\mathcal{C}a\wedge\mathcal{C}a_1$: esso è diverso da ω (perché altrimenti sarebbe $\mathcal{C}a \leqq \mathcal{C}\mathcal{C}a_1$) e da $\mathcal{C}a$ (perché altrimenti sarebbe $a_1 < \mathcal{C}a < \mathcal{C}a_1$ e quindi $a_1 = \omega$). D'altra parte, essendo $\mathcal{C}a\wedge\mathcal{C}a_1 \overset{<}{\neq} \mathcal{C}a$, dev'essere $\mathcal{C}a\wedge\mathcal{C}a_1$ appartenente a $\mathcal{U}_\circ$, il che è assurdo. Dunque $\mathcal{C}a$ è un atomo e $\mathcal{U}_\circ = \langle\mathcal{C}a\rangle$.

Sia, inversamente, $x_\circ$ un atomo di $\mathcal{S}$ e sia $\mathcal{U}_\circ = \langle x_\circ\rangle$. Ogni ultrafiltro diverso da $\mathcal{U}_\circ$ deve passare per $\mathcal{C}x_\circ$, cioè $\Omega - \{\mathcal{U}_\circ\}$ coincide con $\Omega_{<\mathcal{C}x_\circ>}$ e quindi $\mathcal{U}_\circ$ è aperto.

Osservazione 2.3 - Se $\mathcal{S}$ è una topologia semiregolare (1), in $\mathcal{S}$ è

(1) Una topologia è *semiregolare* se è T_2 e possiede una base di aperti regolari (un aperto è *regolare* se coincide con l'interno della sua chiusura). Ogni topologia T_3 è semiregolare.

soddisfatta l'ipotesi della prop. 2.3 e, in tal caso, la stessa afferma che un ultrafiltro è isolato in Ω se e solo se coincide con l'insieme degli aperti passanti per un punto isolato. Più in particolare, se $\mathcal{S}$ è la topologia discreta (lo spazio Ω coincide allora con lo spazio degli ultrafiltri su $\mathcal{S}(E)$ studiato da BANASCHEWSKI in [1]), la prop. 2.3 si riduce al lemma 2 di [1] che afferma che i punti isolati di Ω sono tutti gli ultrafiltri principali.

Si osservi ancora che ogni algebra di Boole soddisfa l'ipotesi della prop. 2.3, mentre è facile costruire esempi di insiemi diretti complementati che non la soddisfano utilizzando topologie non semiregolari.

3. - Sia $\mathcal{S}^*$ un insieme diretto complementato nel quale l'operazione di complemento $\mathcal{C}^*$ sia involutoria. L'insieme $\mathcal{S}^*$ è cioè un'algebra di Boole (1.5). Nella prossima proposizione supporremo che l'insieme diretto $\mathcal{S}$ sia un sottoreticolo di $\mathcal{S}^*$ con lo stesso minimo ω. Per ogni $a \in \mathcal{S}$ il complemento $\mathcal{C}a$ di a in $\mathcal{S}$ è $\leqq$ di $\mathcal{C}^*a$.

Una situazione del tipo anzidetto si ha nel caso, a cui è dedicato il n. 4, in cui $\mathcal{S}^*$ è l'insieme delle parti di un insieme E e $\mathcal{S}$ è una topologia su E. In tal caso il complemento di un aperto A è $E - \bar{A}$.

Denoteremo con $\mathcal{Q}$ l'intersezione di tutti i $\mathcal{S}$-ultrafiltri; tale insieme, per la III) e le 1.1, 1.2 del n. 1, coincide con l'insieme $\{a \in \mathcal{S}, \mathcal{C}a = \omega\}$. Con $\Phi^{\mathcal{Q}}$ denoteremo l'insieme dei $\mathcal{S}$-filtri più fini di $\mathcal{Q}$. Evidentemente $\Omega \leq \Phi^{\mathcal{Q}}$.

3.1 - *Ogni elemento di $\Phi^{\mathcal{Q}}$ è intersezione di $\mathcal{S}$-ultrafiltri e $\Phi^{\mathcal{Q}}$ è il massimo sottoinsieme di Φ con questa proprietà.*

Dim. Sia $\mathcal{F} \in \Phi^{\mathcal{Q}}$ e sia $\{\mathcal{U}_i\}$ l'insieme dei $\mathcal{S}$-ultrafiltri più fini di $\mathcal{F}$. E' $\mathcal{F} \subseteq \bigcap \mathcal{U}_i$. Siano $\mathcal{F}^*$ il $\mathcal{S}^*$-filtro generato da $\mathcal{F}$ e a un elemento di $\mathcal{S} - \mathcal{F}$. Poiché $\mathcal{F}^* \cap \mathcal{S} = \mathcal{F}$, a non appartiene a $\mathcal{F}^*$. Siccome $\mathcal{F}^*$ è intersezione di $\mathcal{S}^*$-ultrafiltri (1.6), esiste un $\mathcal{S}^*$-ultrafiltro $\mathcal{U}^*$ contenente $\mathcal{F}^*$ e non passante per a. Siccome $a \vee \mathcal{C}a$ appartiene a $\mathcal{Q}$ (1.2 e 1.4), appareiene anche a $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$ e quindi a $\mathcal{U}^*$. Ma allora $\mathcal{C}a$ appartiene a $\mathcal{U}^*$ (1.3). Dunque $\mathcal{C}a \wedge x \neq \omega$ per ogni x appartenente a $\mathcal{F}$. Si può perciò considerare il $\mathcal{S}$-filtro generato da $\mathcal{F}$ e da $\mathcal{C}a$ e un $\mathcal{S}$-ultrafiltro $\mathcal{U}_\circ$ che lo contenga. Allora $\mathcal{U}_\circ \supseteq \mathcal{F}$ e quindi $\bigcap \mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}_\circ$. Ma allora, poiché $a \notin \mathcal{U}_\circ$, $a \notin \bigcap \mathcal{U}_i$. Cioè $\mathcal{F} = \bigcap \mathcal{U}_i$.

La seconda parte dell'enunciato risulta evidente quando si osservi che, per ogni insieme diretto $\mathcal{S}$, l'insieme $\tilde{\Phi}$ dei $\mathcal{S}$-filtri intersezioni di ultrafiltri è incluso in $\Phi^{\mathcal{Q}}$.

Osservazione 3.1 - Dalla prop. 3.1 segue che se $\mathcal{Q} = \{\varepsilon\}$ $(\varepsilon = \max \mathcal{S})$ l'operazione di complemento in $\mathcal{S}$ dev'essere involutoria (1.5 e 1.6). La cosa si può anche provare direttamente osservando che in tal caso

$a \vee \mathcal{C}a = \varepsilon$ per ogni $a \in \mathcal{S}$ (1.2 e 1.4) e quindi $\mathcal{C}\mathcal{C}a = \mathcal{C}\mathcal{C}a \wedge (a \vee \mathcal{C}a) = (\mathcal{C}\mathcal{C}a \wedge a) \vee (\mathcal{C}\mathcal{C}a \wedge \mathcal{C}a) = a$ per ogni $a \in \mathcal{S}$.

Osservazione 3.2 - Se si ripercorre la dimostrazione della prop. 3.1 si vede che l'ipotesi che $\mathcal{S}$ sia stabile rispetto a $\vee$ può essere indebolita richiedendo che, per ogni $a \in \mathcal{S}$, l'elemento $a \vee \mathcal{C}a$ appartenga a $\mathcal{S}$. Tale condizione è ad esempio soddisfatta dall'insieme degli aperti con complementare infinito di R^2. Tale insieme, pur non essendo stabile rispetto alle unioni finite, è stabile rispetto alle unioni del tipo $A \cup (R^2 - \bar{A})$, in quanto $R^2 - A \cup (R^2 - \bar{A})$ coincide con la frontiera di A.

Quest'esempio si può naturalmente generalizzare sostituendo a R^2 un qualsiasi spazio connesso e denso in sé che non sia sconnesso dai suoi sottoinsiemi finiti.

Osservazione 3.3 - La prop. 3.1 non è vera in generale per insiemi diretti complementati che non soddisfino la condizione di cui all'osservazione 3.2, come prova il seguente esempio.

Sia $\mathcal{A}$ una topologia T_1 su un insieme E priva di punti isolati e dotata di un aperto A_0 non cofinito e denso; sia K_0 la famiglia dei sottoinsiemi cofiniti di E contenenti A_0. Consideriamo l'insieme $\mathcal{S}$ unione di K_0 e dell'insieme $\{A \in \mathcal{A},\ A \subseteq A_0 \text{ e } A \text{ non denso o } A = A_0\}$. Si vede facilmente che $\mathcal{S}$ è stabile rispetto alle intersezioni finite e complementato, l'operazione di complemento $\mathcal{C}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ essendo data da $\mathcal{C}A = \emptyset$ se A appartiene a $K_0 \cup \{A_0\}$, $\mathcal{C}A = (E - \bar{A}) \cap A_0$ se $A \subseteq A_0$ e A è non vuoto. Nell'ultimo caso $\mathcal{C}A$ non è denso (perché $E - \bar{A}$ non è denso) e non è vuoto in quanto ciò implicherebbe A denso. Dunque $\mathcal{Q} = K_0 \cup \{A_0\}$ e $\Phi \underset{\neq}{\supset} \Phi^{\mathcal{Q}}: a\Phi - \Phi^{\mathcal{Q}}$ appartiene il filtro K_0 e, per ogni parte finita $F \subseteq E - A_0$, il filtro principale generato da $E - F$. L'insieme $\Phi - \Phi^{\mathcal{Q}}$ è perciò infinito.

Siano ora B un aperto non denso incluso in A_0 e $\mathcal{F}$ il $\mathcal{S}$-filtro generato da B. Allora $\mathcal{F} \in \Phi^{\mathcal{Q}}$ ma non è intersezione di ultrafiltri in quanto, per $x \in B$, $B - \{x\} \notin \mathcal{F}$ mentre appartiene a tutti gli ultrafiltri contenenti $\mathcal{F}$ (infatti $\mathcal{C}(B - \{x\}) = (E - \overline{B - \{x\}}) \cap A_0 = (E - \bar{B}) \cap A_0$).

Si osservi che in questo esempio non è verificata la condizione di cui all'osservazione 3.2 (infatti per ogni A non denso incluso in A_0 si ha, essendo A_0 denso, $\overline{A \cup ((E - \bar{A}) \cap A_0)} = \bar{A} \cup \overline{E - \bar{A}} = E$) mentre sono verificate tutte le altre ipotesi richieste nella prop. 3.1.

4. - Sia $\mathcal{A}$ una topologia su un insieme E. L'insieme $\mathcal{A}$ è parzialmente ordinato dall'inclusione, complementato (il complemento $\mathcal{C}A$ di A è $E - \bar{A}$) e $\mathcal{C}\mathcal{C}A = E - \overline{E - \bar{A}}$ contiene A (e coincide con esso se e solo se A è un aperto regolare). Quest'ultima circostanza comporta che non è in questo caso vero che ogni filtro è intersezione di ultrafiltri (basti pensare a una topologia T_1, riducibile, senza punti isolati: il filtro cofinito è meno fine di tutti gli $\mathfrak{A}$-ultrafiltri ma non coincide con la loro intersezione).

E' però possibile applicare la prop. 3.1 quando si osservi che $\mathfrak{A}$ è un sottoreticolo di $\mathfrak{F}(E)$. Osserviamo esplicitamente che in questo caso il filtro $\mathfrak{Q}$ di cui al n. 3 è costituito dagli aperti densi.

In questo numero esporrò qualche proprietà di cui gode lo spazio Ω degli $\mathfrak{A}$-ultrafiltri che sono peculiari del caso che sto esaminando. L'insieme Ω si riduce a un punto se e solo $\mathfrak{A}$ è irriducibile; nel seguito supporremo perciò che $\mathfrak{A}$ sia riducibile, cioè che in $\mathfrak{A}$ ci siano aperti non densi. Per ogni $x \in E$, $\mathfrak{A}(x)$ denoterà l'insieme degli aperti passanti per x.

4.1 - *Sia $\mathfrak{A}$ una topologia T_2. Il gruppo degli automeomorfismi di E è immergibile nel gruppo degli automeomorfismi di Ω.*

Dim. Sia $f: E \rightarrow E$ un omeomorfismo di E in sé; esso induce l'automorfismo F di $\Phi^{\mathfrak{A}}$ in sé definito da $F(\mathfrak{F}) = \{f(A)\}_{A \in \mathfrak{F}}$ e quindi, per le propp. 2.2 e 3.1, un automeomorfismo di Ω.

Siano ora f e g due distinti omeomorfismi di E e in $\bar{x}$ sia $f(\bar{x}) \neq g(\bar{x})$. Siano A_1 e A_2 due aperti disgiunti, necessariamente non densi, passanti per $f(\bar{x})$ e $g(\bar{x})$ rispettivamente. Consideriamo il filtro $\mathfrak{F}$ su $\mathfrak{A}$ generato da $\mathfrak{Q}$ e dal filtro $\langle f^{-1}(A_1) \cap g^{-1}(A_2) \rangle$. Alle immagini di $\mathfrak{F}$ tramite gli automorfismi F e G indotti rispettivamente da f e g appartengono rispettivamente $A_1 \cap f(g^{-1}(A_2))$ e $g(f^{-1}(A_1)) \cap A_2$. Dunque è $F(\mathfrak{F}) \neq G(\mathfrak{F})$, cioè $F \neq G$.

Osservazione 4.1 - La prop. 4.1 non vale per topologie arbitrarie. Sia infatti $x \in E$ e sia $\mathfrak{A}$ la topologia di E che ha come suoi aperti propri $\{x\}$ e $E - \{x\}$. In questo caso l'insieme Ω ha due elementi ($\{E, E - \{x\}\}$ e $\{E, \{x\}\}$) e la sua topologia è discreta. Il gruppo degli automeomorfismi di Ω ha perciò cardinalità 2, mentre il gruppo degli automeomorfismi di E, essendo in corrispondenza biettiva col gruppo delle permutazioni di $E - \{x\}$, ha cardinalità maggiore di 2 non appena $E - \{x\}$ ha cardinalità maggiore di 2.

4.2 - *Siano $\mathfrak{A}$ una topologia T_3, $\mathfrak{F}$ un $\mathfrak{A}$-filtro e x un punto di E. $\Omega_{\mathfrak{F}} = \Omega_{\mathfrak{A}(x)}$ se e solo se $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{A}(x)$ e, per ogni $A \in \mathfrak{F} - \mathfrak{A}(x)$, il punto x appartiene a* $\mathrm{Fr}(A) - \mathrm{Fr}(\bar{A})$.

Dim. Sia $\Omega_{\mathfrak{F}} = \Omega_{\mathfrak{A}(x)}$ Se, per assurdo, esistesse A_0 appartenente a $\mathfrak{A}(x) - \mathfrak{F}$, detto A' un aperto passante per x contenuto con la sua chiusura in A_0, si avrebbe che: $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \not\subseteq \bar{A}' \Rightarrow A \cap (E - \bar{A}') \neq \emptyset$ e quindi $\Omega_{\mathfrak{F} \vee \langle E - \bar{A}' \rangle} \subseteq \Omega_{\mathfrak{F}} = \Omega_{\mathfrak{A}(x)}$, il che è assurdo. Dunque è $\mathfrak{A}(x) \subseteq \mathfrak{F}$. Sia ora $A \in \mathfrak{F} - \mathfrak{A}(x)$. Allora $x \in \mathrm{Fr}(A)$. Se $x \in \mathrm{Fr}(\bar{A})$, potremmo considerare il filtro $\mathcal{A}(x) \vee \langle E - \bar{A} \rangle$ e ogni ultrafiltro $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{A}(x) \vee \langle E - \bar{A} \rangle$ dovrebbe contenere $\mathfrak{F}$ e quindi passerebbe sia per A che per $E - \bar{A}$. Perciò $x \in \mathrm{Fr}(A) - \mathrm{Fr}(\bar{A})$.

Inversamente, sia $\mathfrak{F} \supseteq \mathcal{A}(x)$. Allora è $\Omega_{\mathcal{A}(x)} \subseteq \Omega_{\mathfrak{F}}$. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro convergente a x e sia $A \in \mathfrak{F} - \mathcal{A}(x)$. Per ipotesi $x \in \bar{A}$ e x non appartiene a $\overline{E - \bar{A}}$. Dunque $E - \bar{A} \notin \mathcal{U}$, ma allora $A \in \mathcal{U}$, cioè $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{U}$ e quindi $\Omega_{\mathfrak{F}} = \Omega_{\mathcal{A}(x)}$.

4.3 - *Siano X un sottoinsieme denso di E e $\Omega_{\mathfrak{F}}$ un chiuso di Ω. Se per ogni $x \in X$ si ha che $\Omega_{\mathfrak{F}} \cap \Omega_{\mathcal{A}(x)} \neq \emptyset$, allora $\Omega_{\mathfrak{F}} = \Omega$.*

Dim. Per ogni $x \in X$ esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}_x$ contenente $\mathfrak{F}$ e $\mathcal{A}(x)$. Sia $A \in \mathfrak{F}$ e sia $x \in X$. Allora $A \in \mathcal{U}_x$ e quindi $A \cap A_x \neq \emptyset$ per ogni A_x appartenente a $\mathcal{A}(x)$. Dunque $X \subseteq \bar{A}$, da cui $\bar{X} = E = \bar{A}$. Ma allora ogni aperto di $\mathfrak{F}$ è denso e quindi $\Omega_{\mathfrak{F}} = \Omega$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BANASCHEWSKI M., *Über den Ultrafilterraum*, Math. Nachr., *13*, 273-281 (1955).

[2] SAMUEL P., *Ultrafilters and compactifications of uniform spaces*, Trans. Am. Math. Soc., *64*, 100-132 (1948).

[3] STONE M., *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Am. Math. Soc., *41*, 375-481 (1937).

[4] WILLARD S., *General Topology*, Addison Wesley (1970).