SU ALCUNE PROPRIETA' DEGLI INSIEMI-LIMITE NELLE STRUTTURE DI CONVERGENZA (*)

di MAURIZIO TROMBETTA (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Vengono qui studiate alcune proprietà riguardanti taluni insiemi-limite nelle strutture di convergenza. In particolare, si dá una condizione sufficiente affinché una struttura di convergenza, in cui ogni successione ha un numero finito di limiti, sia topologica.*

SUMMARY. - *Some properties concerning different limit-sets are here studied. In particular, we give a sufficient condition so that a convergence structure, in which every sequence has a finite number of limits, is topological.*

§1. - Introduzione

Nello studio delle strutture di convergenza l'interesse è stato dapprima concentrato sul caso topologico, anche senza l'ipotesi dell'unicità del limite *(multivalued-convergences)*; più recentemente, tali strutture sono state attentamente considerate da diversi AA. in forma più generale. In particolare, A. Kamiński ([1]) ha svolto una ricerca approfondita sulle relazioni che sussistono fra le proprietà degli insiemi-limite delle successioni.

In questo lavoro, aggiungo alcuni ulteriori risultati a quelli già noti, consistenti in implicazioni non ancora enunciate e in controesempi. E' noto ([2] e [4]) il carattere topologico delle strutture di convergenza soddisfacenti alle condizioni $S\,F\,U$ nelle quali si ha

(*) Manoscritto pervenuto in Redazione il 30 novembre 1983.
(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica Applicata dell'Università degli Studi - Piazzale Europa 1 - 34100 Trieste.

l'unicità del limite. Tale risultato non sussiste per le strutture di convergenza per le quali l'insieme $G(x)$ (cfr. § 2) dei punti-limite di una qualunque successione x è finito. Qui dimostro che, aggiungendo alle SFU una ulteriore condizione H_0, per altro non molto restrittiva, le strutture di convergenza con $G(x)$ finito, per ogni x, sono topologiche. Ho, in fine, dato un teorema sulle proprietà diagonali delle strutture di convergenza che generalizza un risultato di Kamiński.

§2. - Preliminari

Le notazioni qui usate si rifanno a quelle adottate in [1] da Kamiński. Indicheremo con lettere greche minuscole gli elementi dell'insieme ambiente X e con lettere latine minuscole le successioni formate con tali elementi. Scriveremo $x = (\xi_n)$ se x è la successione $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$, mentre indicheremo con $|x|$ l'insieme $\{\xi_n : n \in N\}$. La successione di termine costante ξ sarà indicata con $\bar{\xi}$. Per esprimere il fatto che y è una sottosuccessione di x, scriveremo $y < x$. Quelle particolari sottosuccessioni di x, che si ottengono sopprimendo i suoi primi termini, saranno chiamate *code*. Dati un insieme $A \subset X$ e una successione $x \in X^N$, diremo che x *finisce* in A se c'è una coda di x tutta contenuta in A. Date due successioni $x = (\xi_n)$ e $y = (\theta_n)$, diremo loro *incastro* ogni successione $z = (\zeta_n)$ tale che esistano due sottosuccessioni (i_n) e (j_n) di (n) con $|(i_n)| \cap |(j_n)| = \phi$; $|(i_n)| \cup |(j_n)| = N$, per cui si ha $(\xi_n) = (\zeta_{i_n})$ e $(\theta_n) = (\zeta_{j_n})$.

Diremo che in X è definita una *struttura di convergenza* G se è assegnata una legge che a ogni $x \in X^N$ associa un insieme $G(x) \subset X$, detto *insieme dei punti-limite* di x. Se $\xi \in G(x)$, diremo che x *tende* o *converge* a ξ; in luogo di $\xi \in G(x)$, scriveremo spesso $x \longrightarrow \xi$. Se nessuna sottosuccessione di x converge a ξ, diremo che x è *totalmente divergente* da ξ e scriveremo $x \mathrel{-\!\!\|\!\!\rightarrow} \xi$. Un punto ξ si dirà *isolato* se a ξ convergono tutte e sole le successioni che hanno come coda $\bar{\xi}$. Un insieme $A \subset X$ è detto *G-chiuso* se, per ogni successione x con $|x| \subset A$, si ha $G(x) \subset A$.

Per ogni successione x, si definiscono gli insiemi:

$$L(x) = \cup_y G(y), \quad \text{per} \quad y < x.$$

$$\lambda(x) = \cup_y G(y), \quad \text{per} \quad |y| \subset |x|.$$

Si ha, ovviamente, $G(x) \subset L(x) \subset \lambda(x)$, per ogni x.

Fra le diverse proprietá di cui può godere una struttura di convergenza, ci interessano particolarmente le seguenti:

(S) - Per ogni $\xi \in X$, si ha $\bar{\xi} \to \xi$.

(F) - Da $x \to \xi$ e $y < x$ segue $y \to \xi$.

(U) - Se $x \not\to \xi$, esiste $y < x$ tale che $y -\|\!\!\to \xi$ (1).

(H) - Nessuna successione converge a due elementi distinti.

(C_0) - Per ogni successione x, $G(x)$ è G-chiuso.

(C) - Per ogni successione x, esiste $y<x$ per cui $L(y)$ è G-chiuso.

(C_1) - Per ogni successione x, esiste $y < x$ per cui $\lambda(y)$ è G-chiuso.

(V) - Se è $(\eta_n) \to \eta$ e, per ogni n, è $\bar{\xi}_n \to \eta_n$, allora è anche $(\xi_n) \to \eta$.

Data una struttura di convergenza G su X, indicheremo con $T(G)$ la topologia in cui un insieme $A \subset X$ è dichiarato aperto se ogni successione x che converge a un elemento $\xi \in A$ finisce in A. Viceversa, data una topologia Φ su X, questa definisce in modo naturale una struttura di convergenza $L(\Phi)$, convenendo che $x \to \xi$ se e solo se x finisce in ogni Φ-intorno di ξ. Si vede subito che, se $x \to \xi$ in G, allora $x \to \xi$ anche in $L(T(G)) = LT(G)$. In generale, non sussiste l'implicazione inversa.

Aggiungiamo alle proprietà precedenti la

(T) - Per la G si ha $LT(G) = G$.

Una struttura di convergenza che soddisfa alla proprietà T verrà detta *topologica* o *deducibile da topologie*.

Come è noto, la T implica le condizioni S, F, U, V, C_0.

§3. - Sulle relazioni intercorrenti fra le condizioni C, C_1 e C_0

In [1], Kamiński ha, fra l'altro, stabilito diverse relazioni intercorrenti fra le condizioni di cui al § precedente e altre ancora. Fra queste, ha dato un esempio ([1], Es. n. 2, pag. 65) di struttura di convergenza topologica in cui non è verificata la condizione C, pur essendolo la C_1. Tale struttura di convergenza soddisfa quindi agli assiomi S, F, U, V, C_0. Lo stesso A. ha mostrato che da FVC segue

(1) Le proprietà *SFU* prendono spesso il nome di assiomi di *Fréchet-Kuratowski*. Taluni AA., fra cui Dolcher (Cfr. [2]) chiamano strutture di convergenza solo le leggi del tipo G che soddisfano a tali assiomi.

C_1 e che da $SFUVC$ segue T. Vogliamo qui mostrare che esistono strutture di convergenza che soddisfano agli assiomi $SFUC_0C$ ma non alla condizione C_1. Tale struttura di convergenza non potrà, per quanto sopra detto, soddisfare alla condizione V e non potrà quindi essere topologica.

ESEMPIO 1. Sia $X = \{\xi_{rs}\} \cup \{\eta_r\} \cup \{\alpha\}$, tutti distinti, con $r, s \in N$. Per ogni $r \in N$, poniamo poi $X_r = \{\xi_{rs}\,;\ s \in N\} \cup \{\eta_r\}$. Definiamo in X la seguente struttura di convergenza G. Si suppongono verificate le condizioni S e F; inoltre, s'impone che l'incastro di due successioni convergenti a un punto ξ tende ancora a ξ. I punti ξ_{rs} sono isolati. Verso η_r convergono tutte e sole le successioni che finiscono in X_r. Verso α convergono (oltre a $\bar{\alpha}$) le successioni del tipo (η_{i_n}) con $(i_n) \to \infty$. Non è difficile constatare che, se a una successione x convergente a un elemento ξ si aggiunge, toglie o cambia un numero finito di termini, la successione così ottenuta converge ancora a ξ. Mostriamo che la G soddisfa alle condizioni U, C_0 e C.

La U è immediata per quanto riguarda i punti diversi da α. Sia ora $x = (\theta_n) \not\to \alpha$. Se esiste $y < x$, con $|y| \subset \{\xi_{rs}\,;\ rs \in N\}$, la tesi è raggiunta. In caso contrario, si può supporre $|x| \subset \{\eta_r\,;\ r \in N\} \cup \{\alpha\}$. Esiste allora $y<x$ con $y = (\eta_{i_n})$. Dovendo essere $y \not\to \alpha$, la successione (i_n) non può divergere. Esiste quindi un η_{i_0} che compare infinite volte in y. Si ha quindi $\bar{\eta}_{i_0} < y < x$ e $\bar{\eta}_{i_0} \,-\!\!\|\!\!\to \alpha$. Passiamo ora alla validità della C_0. Si supponga assegnata una successione x. Se è $G(x) = \phi$, la tesi è evidente. Se esiste $\xi_{ij} \in G(x)$, si ha $G(x) = \{\xi_{ij}, \eta_i\}$. Se un tale elemento non esiste, pur essendo $G(x) \neq \phi$, si ha che x converge a un solo elemento. In ogni caso, l'insieme $G(x)$ è G-chiuso.

Per provare la validitá della C, fissiamo una successione $x = (\theta_n)$ e distinguiamo tre casi.

a) Se esistono $y < x$ e $r \in N$ tali che $|y| \subset X_r$, è anche $L(y) \subset X_r$ e quindi $L(y)$ è G-chiuso, dovendo essere $\eta_r \in L(y)$.

b) Esiste $y < x$ con $|y| \subset \{\eta_n\,;\ n \in N\} \cup \{\alpha\}$. Se esiste un elemento ζ che compare infinite volte in y, si ha $\bar{\zeta} < y < x$, con $L(\bar{\zeta}) = \{\zeta\}$, che è G-chiuso. Altrimenti, esiste $z<y<x$, con $z = (\theta_{i_n})$ e $(i_n) \to \infty$.

Si ha ancora la tesi, essendo $L(z) = \{\alpha\}$.

c) Al di fuori delle ipotesi *a)* e *b)*, si ha che, per ogni r, l'insieme degli indici n per cui è $\theta_n \in X_r$ è finito; è pure finito l'insieme degli indici n per cui è $\theta_n \in \{\alpha\} \cup \{\eta_r\,;\ r \in N\}$. Si conclude che, in questo caso, è $L(x) = \phi$.

Constatiamo, in fine, che non è soddisfatta la condizione C_1. Sia

$x = (\xi_{rr})$. Per ogni $y < x$, si ha $y = (\xi_{i_n i_n})$, con $(i_n) \to \infty$. Risulta $\lambda(y) = \{\xi_{i_n i_n}; n \in N\} \cup \{\eta_{i_n}; n \in N\}$ che non è G-chiuso, dato che $(\eta_{i_n}) \to \alpha \notin \lambda(y)$.

Da tale esempio e dall'Esempio 2 dato da Kamiński in [1], si ricava il

TEOREMA 1. *Anche quando sono verificate le condizioni $S\,F\,U\,C_0$, gli assiomi C_1 e C sono indipendenti.*

E' aperto il problema di caratterizzare fra le strutture di convergenza topologiche che godono della proprietà C_1 quelle che godono anche della C. Alcuni risultati parziali verranno stabiliti al § 4.

Dimostriamo ora che, sempre supposte soddisfatte le condizioni $S\,F\,U$, la condizione C_0 è più debole della condizione C ma non della C_1.

TEOREMA 2. *Dalla validità delle condizioni F, U e C, segue quella della C_0.*

Dim. Sia data su un insieme X una struttura di convergenza G soddisfacente alle condizioni FUC. Supponiamo, per assurdo, che esista una successione x con $G(x)$ non G-chiuso. Esistono allora $z \in X^N$ e $\xi \in X$ tali che: $|z| \subset G(x)$; $z \to \xi$; $\xi \notin G(x)$. Dunque $x \not\to \xi$. Per la U, esiste $y < x$ tale che $y \,{-}\!\|\!\!\to \xi$. Per la C, esiste $u < y$ con $L(u)$ G-chiuso ed è ancora $u \,{-}\!\|\!\!\to \xi$. Per la F, si ha: $|z| \subset G(x) \subset G(u) \subset L(u)$; si ha quindi $\xi \in L(u)$, contro il fatto che è $u \,{-}\!\|\!\!\to \xi$.

c. v. d.

Diamo ora un esempio di struttura di convergenza in cui sono soddisfatte le condizioni $SFUC_1$ ma non la C_0.

ESEMPIO 2. Sia $X = \{\alpha_n : n \in N\} \cup \{\beta, \gamma\}$ tutti distinti. Definiamo in X la seguente struttura di convergenza G. Si suppongono soddisfatte le condizioni S e F. L'incastro di due successioni convergenti a un elemento ξ tende ancora a ξ. Gli elementi α_n sono tutti isolati. A β converge, oltre a $\overline{\beta}$, ogni successione (α_{i_n}) con $(i_n) \to \infty$. A γ converge ogni successione in cui figura un numero finito di elementi distinti. Si vede subito che, aggiungendo, togliendo o cambiando un numero finito di termini in una successione che converge a un elemento ξ, si ottiene una nuova successione ancora tendente a ξ. Per provare la validità della U, supponiamo $x \not\to \xi$. Se ξ coincide con uno degli α_n, la tesi è immediata. Si può sempre supporre $\xi \notin |x|$. Sia ora $\xi = \beta$. Se è $\overline{\gamma} < x$, la tesi è raggiunta, in caso contrario, esiste $z < x$ con $|z| \subset \{\alpha_n; n \in N\}$. Posto $z = (\alpha_{i_n})$, si ha che la successione (i_n) non può divergere; ne viene che esiste un α_{n_0} che compare infinite volte in z. Si conclude che è $\bar{\alpha}_{n_0} < z < x$; $\bar{\alpha}_{n_0} \text{—}||\!\!\to \beta$. Sia, in fine, $\xi = \gamma$. In x devono comparire infiniti elementi distinti; esiste quindi $y<x$ formata da elementi tutti distinti; si ha $y \text{—}||\!\!\to \gamma$. Per provare la validità della C_1, fissiamo un'arbitraria successione x. Se $|x|$ è finito, si ha $\lambda(x) = |x| \cup \{\gamma\}$. In caso contrario, si ha $\lambda(x) = |x| \cup \{\beta, \gamma\}$. In ogni caso, $\lambda(x)$ è G-chiuso. Sia, in fine, $x = (\alpha_n)$. Si ha $G(x) = L(x) = \{\beta\}$, che non è G-chiuso, essendo $\bar{\beta}$ convergente a $\gamma \notin G(x)$. Ciò prova che in G non sono soddisfatte né la C_0 né la C.

Notiamo che la condizione F è essenziale per la validità del Teorema 2. Mostriamo anzi, con un esempio, che esistono strutture di convergenza che soddisfano alle condizioni $SUCC_1$, ma non alla C_0.

Esempio 3. Sia $X = N \cup \{\alpha\}$, con $\alpha \notin N$. Definiamo in X la seguente struttura di convergenza G. A un elemento $\xi \in N$ convergono tutte e sole le successioni x per cui è $\xi \in |x|$. Una successione $x = (\xi_n)$ tende ad α se e solo se gli indici n per cui è $\xi_n \neq \alpha$ sono, al più, in numero finito o, in caso contrario, danno luogo ad una successione (ξ_{n_k}) divergente. Non è difficile constatare che la S e la U sono soddisfatte e che non lo è la F (2). Proviamo la validità della C e della C_1. Sia data $x \in X^N$. Se esiste $\xi \in X$ tale che $\bar{\xi} < x$, si ha $G(\bar{\xi}) = L(\bar{\xi}) = \lambda(\bar{\xi}) = \{\xi\}$, che è G-chiuso. In caso contrario, esiste $y < x$, con $|y| \subset N$, crescente: si ha allora $G(y) = L(y) = \lambda(y) = |y| \cup \{\alpha\}$, che è ancora G-chiuso. Per verificare che non è soddisfatta la C_0, basta considerare la successione

$$x = 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, \ldots, 0, n, 0, (n+1), 0, \ldots;$$

per essa si ha $G(x) = N$, che non è G-chiuso.

Data una successione $x = (\xi_n)$ su un insieme X, ogni permutazione (i_n) dei suoi indici dá luogo ad una nuova successione $x' = (\xi_{i_n})$ che verrà detta una *permutazione* di x. Aggiungiamo ora alle condizioni date al § 2 la seguente

(P) - Se una successione x tende a un elemento α, ogni permutazione x' di x converge ancora ad α.

Evidentemente, ogni struttura di convergenza topologica gode della proprietà P. Proviamo il più generale

Teorema 3. *Se una struttura di convergenza soddisfa alle proprietà F e U, soddisfa anche alla P.*

---

(2) E' immediato constatare che ogni successione costante ha un solo limite; Cfr. condizione H_0 del § 4.

Dim. Sia data su un insieme X una struttura di convergenza G soddisfacente alle condizioni F e U. Siano $x = (\xi_n)$ una successione convergente a un elemento α e $x' = (\xi_{i_n})$ una sua permutazione. Dato che la successione (i_n) diverge, essa ammette una sottosuccessione (i_{n_k}) crescente. La successione $y = (\xi_{i_{n_k}})$ è quindi una sottosuccessione sia di x che di x'. Dovendo essere $y \to \alpha$, x' non può essere totalmente divergente da α. Dato poi che ogni sottosuccessione y' di x' può essere pensata come permutazione di una sottosuccessione y di x che tende ancora ad α, si ottiene, per quanto sopra visto, che y' non può essere totalmente divergente da α. Ne viene, per la U, che anche x' deve convergere ad α.

c. v. d.

§4. - Sulla deducibilità di una struttura di convergenza da topologie

E' noto che una struttura di convergenza G soddisfacente alle condizioni $SFUH$ è topologica. Si pone ora il problema di vedere se sussiste un analogo risultato quando si sostituisca la condizione H col più debole assioma

(W) - Per ogni $x \in X^N$, l'insieme $G(x)$ è finito.

L'Esempio 1 mostra che esistono strutture di convergenza soddisfacenti alle condizioni $SFUWC_0$ ma non alla V e quindi non topologiche.

E' aperto il problema di decidere se le strutture di convergenza soddisfacenti alle condizioni $SFUVW$ sono necessariamente topologiche. Vogliamo qui intanto mostrare che la risposta a tale problema è affermativa nel caso particolare in cui la V è sostituita dalla più forte condizione

(H_0) - Nessuna successione costante converge a due elementi distinti.

LEMMA 4. *Sotto le condizioni* $S\,F\,H_0$, *per ogni successione* x *si ha* $\lambda(x) = L(x) \cup |x|$.

Dim. Per la S, si ha $|x| \subset \lambda(x)$, da cui $|x| \cup L(x) \subset \lambda(x)$. Per provare l'inclusione opposta, fissiamo un elemento $\xi \in \lambda(x) - |x|$. Esiste allora $y \to \xi$ con $|y| \subset |x|$. Se $|y|$ fosse finito, esisterebbe $\theta \in |y|$ tale che $\overline{\theta} < y$ e $\overline{\theta} \to \xi$, per la F, contro la H_0. Ne viene che $|y|$ è infinito e, quindi, che x e y hanno una sottosuccessione z in comune. Si ha $\xi \in G(z) \subset L(x)$.

c. v. d.

LEMMA 5. *Sia* G *una struttura di convergenza soddisfacen-*

te alle condizioni $F\,U\,W$. Data una successione decrescente $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots$ di successioni, esiste $\bar{n}$ tale che, per $n > \bar{n}$, si ha $G(x_n) = G(x_{\bar{n}})$.

Dim. Procediamo per assurdo. Supponiamo esistere una successione $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots$ di successioni per cui risulti $G(x_n) \underset{\neq}{\subset} G(x_{n+1})$, per infiniti n. E' lecito supporre che ciò accada per ogni n. Ne viene che $\cup_n G(x_n)$ è un insieme infinito. Posto ora $x_n = (\xi_{ns})_s$ per ogni n, si ha $\xi_{ns} \in |x_{n-1}|$, $\forall n$. Consideriamo ora la successione $y = (\xi_{nn})$ e diciamo y_n la coda di y che si ottiene sopprimendo i suoi primi $n-1$ termini. Si ha $y_n < x_n$, $\forall\, n$. Essendo $G(y_n) \supset G(x_n)$, $\forall\, n$, si ha che l'insieme $\cup_n G(y_n)$ è infinito. D'altra parte, per ogni n, si ha $G(y) = G(y_n)$, per le F e U; si ottiene $G(y) = \cup_n G(y_n)$, contro la W.

c. v. d.

TEOREMA 6. - *Una struttura di convergenza G, su un insieme X, che soddisfi alle condizioni $S\,F\,U\,H_0\,W$ è topologica.*

Dim. Dobbiamo dimostrare che, se una successione x finisce in ogni TG-intorno di un elemento ξ, allora $x \to \xi$ in G. Basta mostrare che se $x \not\to \xi$, esiste un TG-intorno di ξ in cui x non finisce. Sia dunque $x \not\to \xi$; per la U, esiste $y < x$ tale che $y \text{—}\|\!\!\to \xi$. L'elemento ξ non può comparire infinite volte in y; è lecito anzi supporre $\xi \notin |y|$. Se $Y_0 = |y|$ è G-chiuso, $X - Y_0$ è un TG-intorno aperto di ξ in cui y non finisce, e quindi neanche x. In caso contrario, esistono $y_1 \in X^N$, $\theta_1 \in X - Y_0$ tali che $|y_1| \subset Y_0$, $\theta_1 \in G(y_1)$. Per la F e la H_0, $|y_1|$ deve essere infinito; è lecito supporre $y_1 < y$. Poniamo $Y_1 = |y_1| \cup G(y_1)$. Essendo $\xi \notin G(y_1)$ e $\xi \notin Y_0$, è $\xi \notin Y_1$. Se Y_1 è G-chiuso, $X - Y_1$ è l'intorno cercato di ξ. Altrimenti, esistono $y_2 \in X^N$, $\theta_2 \in X - Y_1$ tali che $|y_2| \subset Y_1$ e $\theta_2 \in G(y_2)$. Essendo $G(y_1)$ finito e, per le FH_0, $|y_2|$ infinito, è lecito supporre $y_2 < y_1$. Poniamo $Y_2 = |y_2| \cup G(y_2)$. Se Y_2 è G-chiuso, l'aperto cercato è $X - Y_2$, altrimenti, procedendo come sopra, si costruiscono una y_3 e un Y_3, e così via. Tale procedimento deve aver termine dopo un numero finito di passaggi ché, altrimenti, si verrebbe a costruire la successione $y_1 > y_2 > \ldots > y_n > \ldots$, con $G(y_1) \underset{\neq}{\subset} G(y_2) \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} G(y_n) \underset{\neq}{\subset} \ldots$; infatti, per ogni n, si avrebbe $\theta_n \in G(y_n) - G(y_{n-1})$. Ma ciò contraddirebbe il Lemma 5.

c. v. d.

LEMMA 7. *Se la struttura di convergenza G su X soddisfa agli assiomi F e H_0, ogni sottoinsieme finito Y di X è G-chiuso.*

Dim. Siano $Y \subset X$, $\xi \in X$, $x \in X^N$ tali che: Y risulti finito, $|x| \subset Y$, $x \to \xi$. Esiste allora $\theta \in Y$ tale che $\bar{\theta} < x$. Essendo $\bar{\theta} \to \xi$, si ha $\xi = \theta \in Y$, per la H_0.

c. v. d.

TEOREMA 8. *Se la struttura di convergenza G su X soddisfa alle condizioni F W H_0, soddisfa anche alla C, e quindi alla C_1.* ([1], Prop. 5).

Dim. Supponiamo, per assurdo, che esista una successione x tale che, per ogni $y < x$, l'insieme $L(y)$ risulti non G-chiuso. Per il Lemma 7, $L(y)$ deve essere infinito, $\forall\, y < x$, mentre, sempre per ogni y, $G(y)$ è finito, per la W. Si ha dunque, tenuto conto della F, che

$$\forall\, y < x,\ \exists\, y' < y: G(y) \subsetneq G(y').$$

Si conclude che esiste una successione $y_1 > y_2 > \ldots > y_n > \ldots$ per cui è $G(y_1) \subsetneq G(y_2) \subsetneq \ldots \subsetneq G(y_n) \subsetneq \ldots$ Ma ciò contraddice il Lemma 5.

c. v. d.

COROLLARIO 9. *Le strutture di convergenza topologiche che soddisfano agli assiomi W e H_0, soddisfano anche alla condizione C e, quindi, alla C_1.*

Abbiamo così una risposta parziale al problema del § precedente. Un'altra risposta parziale si ottiene col seguente Teorema 11 che generalizza un risultato di Kamiński (Cfr. [1] Prop. 6), sotto l'ipotesi F.

Ricordiamo la seguente proprietà *diagonale:*

(D) - Sono dati, per ogni $m \in N$, una successione $x_m = (\xi_{mn})_n$ e un elemento θ_m tali che $x_m \to \theta_m$; è dato poi α tale che $(\theta_m) \to \alpha$.

Esiste allora una successione $(i_m) \to \infty$ di numeri naturali tale che $(\xi_{mi_m}) \to \alpha$.

Una successione del tipo (ξ_{mi_m}), sempre con $(i_n) \to \infty$, prende il nome di *successione diagonale*; una sottosuccessione di una successione diagonale verrà detta *sottosuccessione diagonale.*

Consideriamo, accanto alla D, la seguente proprietà

(D_0) - Dati (ξ_{mn}), (θ_m) e α come sopra, esiste una sottosuccessione diagonale che tende ad α.

Evidentemente, da D seguono V e D_0.

LEMMA 10. *Dalle condizioni F U D_0 segue la V.*

Dim. Si abbia: $\xi_n \to \theta_n$, $\forall\, n$ e $(\theta_n) \to \alpha$. Per la D_0, esiste $(i_n) < (n)$ tale che $(\xi_{i_n}) \to \alpha$. Dunque non può essere $(\xi_n) \,\text{—}\!\!|\!|\!\!\to \alpha$. Dall'arbitrarietá della successione (ξ_n) si ha la tesi.

c. v. d.

Kamiński ha provato che D implica C_1; mostriamo ora che, supposta verificata la F, la D implica anche la C. Si ha anzi il

TEOREMA 11. *Se la struttura di convergenza G, definita su un insieme X, soddisfa alle condizioni F e D_0, allora, per ogni successione x, l'insieme $L(x)$ è G-chiuso. In particolare, G soddisfa alla C.*

Dim. Siano dati due successioni, $x = (\xi_n)$, $z = (\zeta_n)$ e un elemento α, tali che $|z| \subset L(x)$ e $z \to \alpha$. Per ogni $n \in N$, *esiste* $y'_n < x$ tale che $y'_n \to \zeta_n$. Poniamo ora: $y_1 = y'_1 = (\xi_{i^1_n}) = (\theta_{1n})$. Da y'_2 si può estrarre una sottosuccessione $y_2 = (\xi_{i^2_n}) = (\theta_{2n})$ in modo che si abbia $i^2_n \geq i^1_n$, $\forall\, n$. Procedendo per ricorrenza, da y'_m estraiamo una sottosuccessione $y_m = (\xi_{i^m_n}) = (\theta_{mn})$ in modo che sia $i^m_n \geq i^{m-1}_n$, $\forall\, n$. Per la D_0, esistono le successioni di numeri naturali $(n_k) < (n)$ e (j_k) tali che: $(j_k) \to \infty$ e $u = (\theta_{n_k j_k}) = (\xi_{i^{n_k}_{j_k}}) \to \alpha$. Essendo $i^{n_k}_{j_k} \geq i^1_{j_k}$, $\forall\, k$, si ha $(i^{n_k}_{j_k}) \to \infty$. Da quest'ultima successione si può estrarre una sottosuccessione (l_k) crescente. La successione $v = (\xi_{l_k})$ tende ancora ad α, essendo $v < u$; si ha però anche $v < x$, da cui $\alpha \in L(x)$, che risulta così G-chiuso, data l'arbitrarietà di x e α.

c. v. d.

COROLLARIO 12. *Se G soddisfa alle condizioni $SFUD_0$, essa è topologica.*

Dim. $SFUD_0 \Rightarrow SFUVC \Rightarrow T$. *c. v. d.*

COROLLARIO 13. *Le strutture di convergenza topologiche che soddisfano alla condizione D_0 soddisfano anche alla C.*

BIBLIOGRAFIA

[1] A. KAMIŃSKI, *On characterization of topological convergence.* Proc. Conference on convergence - SZCZYRK, 1979, (1980); pp. 50-70.

[2] M. DOLCHER, *Topologie e strutture di convergenza.* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie III, 14, Fasc. 1 (1960), pp. 63-92.

[3] P. ANTOSIK, *On a topology of convergence.* Colloquium Math., 21 (1970), pp. 205-209.

[4] J. KISYŃSKI, *Convergence du type L.* Colloquium Math., 7 (1960), pp. 205-211.

[5] J. NOVÁK, *On some problems concerning multivalued convergences.* Czech. Math. Journ., 14 (89) (1964), pp. 548-561.