SULL'ESTENSIONE DELLE PROBABILITA' SUBORDINATE (*)

di SILVANO HOLZER (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si dimostra un teorema di estensione per le valutazioni coerenti di probabilità subordinata che comprende, come immediato corollario, il noto teorema di estensione di L. Dubins relativo alle probabilità subordinate finitamente additive. Viene così messo in evidenza che la struttura di algebra di Boole richiesta in detto teorema per gli insiemi degli eventi e degli eventi-ipotesi è inessenziale.*

SUMMARY. - *An extension theorem for coherent conditional probabilities is given, that is a generalization of Dubins' extension theorem for finitely additive conditional probabilities. In this way, we show that the algebraic hypothesis in Dubins' theorem are not essential.*

1. In molte questioni, di natura sia teorica che applicativa, la descrizione dell'incertezza relativa ad un dato problema avviene per gradi mediante raffinamenti successivi. Inizialmente si parte con un insieme D, finito o infinito, strutturato o no, di eventi assoluti o subordinati che descrivono, più o meno compiutamente, il «quadro della certezza» collegato al problema in esame e con una valutazione di probabilità p su D che esprime il «grado di fiducia» che si possiede, in base al proprio «stato d'informazione», sull'avverarsi o meno degli eventi di D. Poi, a seconda delle esigenze che man mano

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca M.P.I. sui Fondamenti della probabilità dal punto di vista soggettivo.
Lavoro pervenuto in Redazione il 30 settembre 1983.
(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica Finanziaria dell'Università di Trieste, Piazzale Europa 1, 34100 Trieste.

sorgono nello svolgersi dell'indagine, si raffinano i due aspetti logico ed aleatorio del problema introducendo via via, accanto a quelli di D, nuovi eventi e le valutazioni di probabilità ad essi relative.

E' del tutto naturale a questo punto chiedersi se è sempre possibile effettuare queste nuove valutazioni senza *sconvolgere* la precedente valutazione di probabilità su D, cioè se è sempre possibile estendere la probabilità p, data su D, ad un nuovo insieme di eventi $D'(D \subset D')$. In termini più precisi se è sempre possibile dare una valutazione di probabilità p' su D' coincidente con la p su D.

Risposte positive a questo quesito vengono fornite dai seguenti due fondamentali teoremi che fanno riferimento, rispettivamente, a probabilità assolute ed a probabilità subordinate.

Teorema di estensione di de Finetti ([1], p. 15).

Sia D un insieme di eventi (assoluti) e p una valutazione coerente di probabilità (assoluta) su D. Allora su ogni soprainsieme di D costituito da eventi assoluti esiste una valutazione coerente di probabilità (assoluta), estensione della p.

Teorema di estensione di Dubins ([2], p. 98, teorema 4).

Siano $\mathcal{E}_1$ un'algebra di Boole di eventi ed $\mathcal{H}_1$ un insieme di eventi possibili tale che $\mathcal{H}_1 \cup \{\phi\}$ è una sottoalgebra booleana di $\mathcal{E}_1$. Sia inoltre p una probabilità subordinata finitamente additiva sull'insieme $D = \{E \mid H \mid E \in \mathcal{E}_1$ e $H \in \mathcal{H}_1\}$. Allora per ogni sopra-algebra booleana di eventi $\mathcal{E}$ di $\mathcal{E}_1$ esiste una probabilità subordinata finitamente additiva sul soprainsieme $D' = \{E \mid H \mid E, H \in \mathcal{E}$ e $H \neq \phi\}$ di D, estensione della p.

Giova ora osservare che il teorema di de Finetti non pone alcuna condizione agli insiemi D e D' e quindi risolve completamente il problema dell'estensione per le probabilità assolute. Il teorema di Dubins invece assicura l'esistenza del prolungamento per probabilità subordinate finitamente additive solo se queste sono definite su insiemi che soddisfano a particolari condizioni di chiusura algebrica. E' del tutto naturale allora chiedersi se sia possibile, come nel caso delle probabilità assolute, rimuovere tali condizioni salva restando l'esistenza dell'estensione.

Nel presente lavoro si fornisce una risposta positiva a tale quesito provando un teorema di prolungamento per le valutazioni coerenti di probabilità subordinata. Infatti, come vedremo, esso assicura che le condizioni di chiusura algebrica richieste per l'insieme D si possono rimuovere senza influire minimamente sulla possibilità di estendere la p sull'insieme D' in modo tale da renderla una probabilità subordinata finitamente additiva.

2. In questo numero proveremo il preannunciato teorema di

estensione per le valutazioni coerenti di probabilità subordinata. A tal fine, per comodità espositiva, iniziamo col richiamare la nozione di valutazione coerente di probabilità subordinata.

Indicato, come usuale, con la notazione $|\cdot|$ il numero aleatorio «indicatore dell'evento», questa nozione viene in [3] introdotta tramite il seguente:

Principio di coerenza esteso.

Sia D un insieme di eventi subordinati, finito o infinito, e sia p una applicazione di D nei numeri reali R. Diremo che p è una valutazione coerente *di probabilità su D se e solo se per ogni $E_1 | H_1, \ldots, E_n | H_n \in D$ ed ogni $S_1, \ldots, S_n \in R$ il guadagno aleatorio*

$$G = \sum_{1}^{n}{}_i S_i(|E_i| - p(E_i | H_i))|H_i|$$

è tale che per il guadagno aleatorio subordinato all'ipotesi $H_0 = H_1 \vee .. \vee H_n$ risulta $\min G | H_0 \cdot \max G | H_0 \leq 0$ *ove, come al solito, gli estremi vengono determinati sull'insieme dei possibili valori del numero aleatorio $G | H_0$.*

Passiamo ora a provare le seguenti due proposizioni che forniscono delle *condizioni sufficienti* affinché una data probabilità subordinata sia coerente [1].

(2.1) *Sia D l'insieme costituito dall'unico evento subordinato $E | H$ e sia p una applicazione di D in R tale che:*

a) $p(E | H) = 0$ *se* $E \wedge H = \phi$;

b) $p(E | H) = 1$ *se* $E \wedge H = H$;

c) $0 \leqq p(E | H) \leqq 1$ *se* $\phi \neq E \wedge H \neq H$.

La p è allora una valutazione coerente di probabilità subordinata su D.

(2.2) *Siano D un insieme non vuoto di eventi subordinati e p una valutazione coerente di probabilità subordinata su D. Sia poi $E | H \notin D$ e p' una estensione della p sull'insieme $D' = D \cup \{E | H\}$, tale che:*

a) $p'(E | H) = 0$ *se* $E \wedge H = \phi$;

b) $p'(E | H) = 1$ *se* $E \wedge H = H$;

c) $0 \leqq p'(E | H) \leqq 1$ *se* $\phi \neq E \wedge H \neq H$;

d) inoltre se $\phi \neq E \wedge H \neq H$ *(caso c)), per ogni*

(1) In realtà esse sono anche necessarie. Lo si può provare ricorrendo al teorema (2.3) di [3].

$E_1 | H_1, \ldots, E_n | H_n \in D$ ed ogni $S_1, \ldots, S_n \in R$ il guadagno aleatorio

$$G = (|E| - p'(E|H))|H| + \sum_1^n {}_i S_i(|E_i| - p(E_i|H_i))|H_i|$$

è tale che per il guadagno aleatorio subordinato all'ipotesi

$H_0 = H \vee H_1 \vee \ldots \vee H_n$ risulta $\min G | H_0 \cdot \max G | H_0 \leqq 0$.

La p' è allora una valutazione coerente di probabilità subordinata su D'.

Nota. E' utile osservare che la condizione *d)* esprime una particolare condizione di coerenza. Infatti, contrariamente a quanto richiesto dal Principio di coerenza esteso, essa non riguarda tutti i possibili guadagni aleatori relativi agli eventi $E | H, E_1 | H_1, \ldots, E_n | H_n$ ma solamente quelli che si ottengono scegliendo in modo arbitrario gli importi $S_1, \ldots, S_n$ e ponendo uguale ad uno l'importo associato all'evento subordinato $E | H$.

Dim. (2.1) Posto $p' = p(E|H)$, si tratta di provare che, qualunque sia il numero reale S, per il guadagno aleatorio $G = S(|E| - p')|H|$ risulta:

(i) $\min G | H \cdot \max G | H \leqq 0$.

Ora, se risulta $E \wedge H = \phi$, tramite la $|E||H| = |E \wedge H| = 0$, otteniamo $G = S(|E||H| - p'|H|) = -Sp'|H|$ da cui, per la *a)*, $G = 0$ e quindi la *(i)*.

Se invece risulta $E \wedge H = H$, tramite la $|E||H| = |E \wedge H| = |H|$, otteniamo $G = S(|E||H| - p'|H|) = S(1 - p')|H|$ da cui, per la *b)*, $G = 0$ e quindi la *(i)*.

Se infine risulta $\phi \neq E \wedge H \neq H$, essendo allora possibili entrambi gli eventi $E \wedge H$ ed $\sim E \wedge H$, otteniamo che i valori possibili del guadagno aleatorio subordinato $G | H$ sono $S(1 - p')$ ed $S(-p')$. Ne segue $\min G | H \cdot \max G | H = -S^2 p'(1 - p')$ da cui, mediante *c)*, si ha la *(i)*.

(2.2) Si tratta di provare che considerati gli eventi subordinati $E_1 | H_1, \ldots, E_n | H_n, E_{n+1} | H_{n+1} \in D'$ ed i numeri reali $S_1, \ldots, S_n, S_{n+1}$, per il guadagno aleatorio

$$G = \sum_1^{n+1} {}_i S_i(|E_i| - p'(E_i|H_i))|H_i|$$

risulta:

(ii) $\min G | H_0 \cdot \max G | H_0 \leqq 0$

ove si è posto $H_0 = H_1 \vee \ldots \vee H_n \vee H_{n+1}$.

Poiché p è coerente sull'insieme D e p' è una sua estensione, possiamo limitarci ad analizzare il guadagno aleatorio nell'ipotesi che nell'insieme degli eventi fissati sia presente l'evento $E \mid H$. In questo caso possiamo supporre, senza perdere in generalità, che risulti $E \mid H = E_{n+1} \mid H_{n+1}$ e porre $S_{n+1} = S$.

Ciò premesso, se $n = 0$ è $G = S(|E| - p'(E \mid H))|H|$ e la *(ii)* è allora verificata in forza delle *a), b), c)* e del teorema (2.1).

Sia ora $n > 0$; esistano cioè altri eventi subordinati oltre $E \mid H$. Se escludiamo ripetizioni, cosa che si può sempre supporre, riesce $E_i \mid H_i \in D$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Tenuto infine conto che p' è una estensione della p, per il guadagno aleatorio G otteniamo la seguente espressione:

$$G = S(|E| - p'(E \mid H))|H| + \sum_1^n{}_i S_i(|E_i| - p(E_i \mid H_i))|H_i|.$$

Ciò osservato proviamo che sussiste la *(ii)*. A tale scopo sia intanto $E \wedge H = \phi$ oppure $E \wedge H = H$ oppure $S = 0$. Allora, tenuto conto delle *a)* e *b)*, il primo addendo del guadagno diventa un numero certo e vale zero. In questi tre casi si ha allora che considerato il guadagno aleatorio

$$G' = \sum_1^n{}_i S_i(|E_i| - p(E_i \mid H_i))|H_i|,$$

relativo alla famiglia di eventi subordinati $E_1 \mid H_1, \dots, E_n \mid H_n \in D$ ed agli importi $S_1, \dots, S_n$, i valori possibili di $G' \mid H_1 \vee \dots \vee H_n$ sono anche possibili determinazioni di $G \mid H_0$. Ne segue allora la *(ii)* una volta osservato che riesce $\min G' \mid H_1 \vee \dots \vee H_n \cdot \max G' \mid H_1 \vee \dots \vee H_n \leqq 0$ per la coerenza di p su D.

Sia ora $\phi \neq E \wedge H \neq H$ ed $S \neq 0$. Considerato allora il numero aleatorio

$$G'' = (|E| - p'(E \mid H))|H| + \sum_1^n{}_i (S_i/S)\,(|E_i| - p(E_i \mid H_i))|H_i|$$

risulta $G = SG''$. Ne segue che

$$\min G \mid H_0 \cdot \max G \mid H_0 = S^2 \min G'' \mid H_0 \cdot \max G'' \mid H_0.$$

Da qui si ottiene la *(ii)* tenuto conto che per la *d)* si ha che $\min G'' \mid H_0 \cdot \max G'' \mid H_0 \leqq 0$.

Tutto è così provato. ■

Siamo ora in grado di provare il seguente lemma che assicura l'esistenza dell'estensione qualora all'insieme D, sul quale è definita la probabilità subordinata coerente, venga aggiunto un solo evento subordinato.

(2.3) *Sia D un insieme non vuoto di eventi subordinati e p una va-*

lutazione coerente di probabilità subordinata su D. Allora per ogni evento subordinato $E \mid H \notin D$ *esiste una valutazione coerente di probabilità subordinata sull'insieme* $D' = D \cup \{E \mid H\}$, *estensione della p.* (2)

Dim. Sia intanto $E \wedge H = \phi$ oppure $E \wedge H = H$. Per ottenere la richiesta estensione coerente di p su D' basta allora, in forza delle *a)* e *b)* del teorema (2.2), associare all'evento subordinato $E \mid H$ lo zero o l'uno, rispettivamente.

Sia ora $\phi \neq E \wedge H \neq H$. In forza delle condizioni *c), d)* del teorema (2.2) è sufficiente provare che esistono numeri p' dell'intervallo chiuso $[0,1]$ (vedi *c)*) che verificano la condizione (vedi *d)*): per ogni $E_1 \mid H_1, \ldots, E_n \mid H_n \in D$ ed ogni $S_1, \ldots, S_n \in R$, il guadagno aleatorio

$$G' = (|E| - p')|H| + \sum_1^n {}_i S_i(|E_i| - p(E_i \mid H_i))|H_i|$$

è tale che risulta $\min G' \mid H_0 \cdot \max G' \mid H_0 \leqq 0$.

A tale scopo è conveniente introdurre la seguente terminologia: dato un numero reale r diremo che r è:

— *troppo piccolo* se $r < 0$ oppure se esistono $E_1 \mid H_1, \ldots, E_n \mid H_n \in D$ ed $S_1, \ldots, S_n \in R$ tali che $\min G \mid H_0 > 0$;

— *troppo grande* se $r > 1$ oppure se esistono $E_1 \mid H_1, \ldots, E_n \mid H_n \in D$ ed $S_1, \ldots, S_n \in R$ tali che $\max G \mid H_0 < 0$,

ove si è posto $G = (|E| - r)|H| + \sum_1^n {}_i S_i(|E_i| - p(E_i \mid H_i))|H_i|$.

Consideriamo ora i seguenti due sottoinsiemi di R:

$$A = \{r \mid r \text{ troppo piccolo}\} \ , \ B = \{r \mid r \text{ troppo grande}\}$$

ed il complementare della loro unione, cioè l'insieme $I = R - (A \cup B)$. Esso è costituito dai numeri reali né troppo piccoli, né troppo grandi e quindi dai numeri reali dell'intervallo $[0,1]$ tali che non esistono scommesse aventi i possibili valori del relativo guadagno aleatorio subordinato all'ipotesi H_0 tutti positivi oppure tutti negativi. Pertanto gli elementi di I sono tutti numeri reali del tipo p', cioè numeri che realizzano una estensione coerente su D' della valutazione p.

Per i nostri scopi basta allora verificare che I non è vuoto. Lo

(2) La dimostrazione che qui faremo è un adattamento al caso subordinato della dimostrazione fatta dal de Finetti in [1], p. 16, per provare il suo teorema di estensione per le valutazioni coerenti di probabilità assoluta. Così facendo, oltre a provare la possibilità di estendere p in modo coerente, si metterà in luce che i valori ammissibili per $E \mid H$, cioè quelli assunti in $E \mid H$ dalle estensioni coerenti, costituiscono un intervallo chiuso di numeri reali.

faremo constatando che I è un intervallo chiuso e non vuoto di numeri reali. Più precisamente faremo vedere che entrambi gli insiemi A e B sono dotati di estremo, superiore ed inferiore rispettivamente, e che, posto $\underline{p} = \sup A$ e $\bar{p} = \inf B$, risulta $\underline{p} \leqq \bar{p}$ ed inoltre $I = [\underline{p}, \bar{p}]$.

Iniziamo col provare intanto che:

(i) gli insiemi A e B sono sezioni di R, iniziale e finale rispettivamente.

A tale scopo e con riferimento all'insieme A, sia $r < r' \in A$. Se r è negativo allora $r \in A$ per definizione di A. Sia invece $r \geqslant 0$. Poiché r è troppo piccolo esistono $E_1 | H_1, \dots, E_n | H_n \in D$ ed $S_1, \dots, S_n \in R$ tali che per il guadagno aleatorio

$$G' = (|E| - r')|H| + \sum_{1}^{n}{}_i S_i(|E_i| - p(E_i | H_i))|H_i|$$

risulta $\min G' | H_0 > 0$.

Ora, considerato il guadagno aleatorio

$$G = (|E| - r)|H| + \sum_{1}^{n}{}_i S_i(|E_i| - p(E_i | H_i))|H_i|$$

otteniamo $G - G' = (r' - r)|H|$ da cui, essendo $r < r'$ e quindi $r' - r > 0$, si ha che $G \geqslant G'$. Riesce pertanto $G | H_0 \geq G' | H_0$ da cui $\min G | H_0 \geqslant \min G' | H_0 > 0$ e quindi r risulta troppo piccolo, cioè $r \in A$ come volevasi.

In modo analogo si constata poi che B è una sezione finale di R.

Si ha poi che:

(ii) A non possiede numeri maggiori di uno e B non possiede numeri minori di zero.

Proviamo la seconda delle due affermazioni. Per assurdo sia $r<0$ e $r \in B$. Essendo r troppo grande esistono $E_1 | H_1, \dots, E_n | H_n \in D$ ed $S_1, \dots, S_n \in R$ tali che per il guadagno aleatorio

$$G = (|E| - r)|H| + \sum_{1}^{n}{}_i S_i(|E_i| - p(E_i | H_i))|H_i|$$

risulta $\max G | H_0 < 0$.

Ora, posto $\bar{H} = H_1 \vee \dots \vee H_n$, poiché $\bar{H}$ implica H_0, si ha che le determinazioni possibili di $G | \bar{H}$ sono anche possibili valori di $G | H_0$. Risulta pertanto:

$$\max G | \bar{H} \leqq \max G | H_0 < 0 \,.$$

Inoltre, posto $G' = \sum_{1}^{n}{}_i S_i(|E_i| - p(E_i | H_i))|H_i|$, si ha:

$$G \mid \bar{H} = ((|E| - r)|H|) \mid \bar{H} + G' \mid \bar{H}$$

e quindi $\max(((|E| - r)|H|) \mid \bar{H} + G' \mid \bar{H}) < 0$. Poiché, in forza dell'ipotesi $r < 0$, riesce $((|E| - r)|H|) \mid \bar{H} \geq 0$, deve allora essere $\max G' \mid \bar{H} < 0$. Ma ciò è assurdo in quanto la valutazione p è supposta coerente su D.

In modo analogo si prova che A non possiede numeri maggiori di uno.

Infine risulta:

(iii) gli insiemi A e B formano una coppia di classi separate.

Per provarlo basta evidentemente, in forza della *(i)*, verificare che riesce $A \cap B = \phi$. Sia per assurdo $r \in A \cap B$. Per la *(ii)* deve allora essere $0 \leqq r \leqq 1$ e quindi, essendo r contemporaneamente troppo piccolo e troppo grande, esistono $E_1 \mid H_1, \ldots, E_n \mid H_n, F_1 \mid K_1, \ldots, F_m \mid K_m \in D$ ed $S_1, \ldots, S_n, T_1, \ldots, T_m \in R$ tali che per i guadagni aleatori

$$G_1 = (|E| - r)|H| + \sum_1^n {}_i S_i(|E_i| - p(E_i \mid H_i))|H_i|$$

$$G_2 = (|E| - r)|H| + \sum_1^n {}_j T_j(|F_j| - p(F_j \mid K_j))|K_j|$$

risulta $\min G_1 \mid H_0 > 0$ e $\max G_2 \mid K_0 < 0$, ove si è posto $H_0 = H \vee H_1 \vee \ldots \vee H_n$ e $K_0 = H \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m$.

Se ora si osserva che gli eventuali valori possibili di G_1 che differiscono da quelli di $G_1 \mid H_0$ si ottengono dai costituenti della famiglia $E, E_1, \ldots, E_n, H, H_1, \ldots, H_n$ aventi *tutti* gli eventi $H, H_1, \ldots, H_n$ negati, possiamo concludere che i valori di G_1 sono quelli di $G_1 \mid H_0$ con l'aggiunta eventuale dello zero. Tenuto allora conto della $\min G_1 \mid H_0 > 0$, risulta $G_1 \geq 0$.

In modo analogo, tramite la $\max G_2 \mid K_0 < 0$, si constata la $G_2 \leqq 0$.

Considerato allora il guadagno aleatorio differenza

$$G = G_1 - G_2 = \sum_1^n {}_i S_i(|E_i| - p(E_i \mid H_i))|H_i| - \sum_1^m {}_j T_j(|F_j| - p(F_j \mid K_j))|K_j|$$

riesce $G \geq 0$. Inoltre si ha che $G \mid H_1 \vee \ldots \vee H_n \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m > 0$. Infatti sia $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 = (E'_1 \wedge \ldots \wedge E'_n \wedge H'_1 \wedge \ldots \wedge H'_n) \wedge (F'_1 \wedge \ldots \wedge F'_m \wedge K'_1 \wedge \ldots \wedge K'_m)$ un costituente possibile avente qualche $H_i (i \leqq n)$ o $K_j (j \leqq m)$ affermato (3). Esiste allora un costituente ω_3 della famiglia E, H tale che l'evento $\omega \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$ è possibile.

(3) Come al solito gli apici sugli eventi indicano che questi sono gli eventi stessi o le loro negazioni.

Sono quindi pure possibili i due costituenti $\omega_1 \wedge \omega_3$ ed $\omega_2 \wedge \omega_3$, il primo relativo al guadagno G_1 ed il secondo al guadagno G_2. Ha pertanto senso considerare le due possibili determinazioni $G_1(\omega_1 \wedge \omega_3)$ e $G_2(\omega_2 \wedge \omega_3)$ che risultano collegate con il valore $G(\omega)$ tramite la $G(\omega) = G_1(\omega) - G_2(\omega) = G_1(\omega_1 \wedge \omega_3) - G_2(\omega_2 \wedge \omega_3)$.

Ciò osservato se ω ha qualche $H_i(i \leqq n)$ affermato, allora $G_1(\omega_1 \wedge \omega_3)$ è una determinazione del guadagno aleatorio subordinato $G_1 \mid H_0$ e quindi, essendo $\min G_1 \mid H_0 > 0$, risulta positivo. Ne segue, per la $G_2 \leqq 0$, che $G(\omega)$ è positivo come volevasi.

Poiché in modo analogo si constata che anche nell'ipotesi che ω abbia qualche $K_j(j \leqq m)$ affermato risulta $G(\omega) > 0$, possiamo concludere che in ogni caso riesce $G(\omega)$ positivo. Dall'arbitrarietà di ω segue che tutti i possibili valori di $G \mid H_1 \vee \ldots \vee H_n \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m$ sono positivi come volevasi. Ma ciò è assurdo in quanto gli eventi subordinati $E_1 \mid H_1, \ldots, E_n \mid H_n, F_1 \mid K_1, \ldots, F_m \mid K_m$ appartengono all'insieme D e la valutazione p è coerente su D per ipotesi. La *(iii)* è così dimostrata.

Esistono allora l'estremo superiore $\underline{p}$ di A e l'estremo inferiore $\bar{p}$ di B e si ha che $\underline{p} \notin A$ e $\bar{p} \notin B$. Proviamolo per assurdo. Sia per questo intanto $\underline{p} \in A$. Poiché A contiene tutti i numeri negativi deve essere $\underline{p} \geqq 0$ e quindi esistono $E_1 \mid H_1, \ldots, E_n \mid H_n \in D$ ed $S_1, \ldots, S_n \in R$ tali che per il guadagno aleatorio

$$G = (|E| - \underline{p})|H| + \sum_1^n {}_i S_i(|E_i| - p(E_i \mid H_i))|H_i|$$

risulta $g = \min G \mid H_0 > 0$. Preso allora ε tale che $0 < \varepsilon < g$, il numero aleatorio

$$G' = G - \varepsilon|H| = (|E| - (\underline{p} + \varepsilon))|H| + \sum_1^n {}_i S_i(|E_i| - p(E_i \mid H_i))|H_i|$$

è tale che il guadagno aleatorio subordinato $G' \mid H_0$ ha tutte le determinazioni possibili positive (risulta infatti $\min G' \mid H_0 \geqslant \min G \mid H_0 - - \varepsilon = g - \varepsilon$). Pertanto $\underline{p} + \varepsilon \in A$ da cui l'assurdo perché $\underline{p} = \sup A$ ed $\varepsilon > 0$.

In modo analogo si prova la $\bar{p} \notin B$.

Pertanto $\underline{p}$ non è un numero troppo piccolo e $\bar{p}$ non è un numero troppo grande. Poiché, evidentemente riesce $\underline{p} \leqq \bar{p}$, tutti i numeri reali dell'intervallo chiuso $[\underline{p}, \bar{p}]$ sono né troppo piccoli, né troppo grandi e quindi tale intervallo è incluso in $I = R - (A \cup B)$. I due insiemi sono anzi uguali, poiché grazie alla *(i)* vale anche l'inclusione opposta.

Il lemma è così completamente provato. ■

Passiamo ora a dimostrare il seguente fondamentale:

(2.4) *Teorema dell'estensione coerente.*

Siano D, D_1 due insiemi non vuoti di eventi subordinati tali che $D \subset D_1$. Sia inoltre p una valutazione coerente di probabilità subordinata su D. Esiste allora una valutazione coerente di probabilità subordinata su D_1, estensione della p.

Dim. Proveremo il teorema facendo ricorso al Lemma di Zorn. A tale scopo sia I l'insieme costituito dalle coppie (D', p') tali che $D \subset D' \subset D_1$ e p' è una valutazione coerente di probabilità subordinata su D' estensione della p.

Tale insieme è ovviamente non vuoto in quanto (D, p) vi appartiene. Inoltre tramite la relazione d'ordine $<$ così definita:
$(D', p') < (D'', p'')$ se e solo se $D' \subset D''$ e p'' è una estensione della p' l'insieme I è induttivo, cioè ogni sua catena (sottoinsieme totalmente ordinato) ammette maggiorante. Sia infatti $C = ((D_j, p_j))_{j \in J}$ una catena di I. Posto $D' = \cup_{j \in J} D_j$ possiamo considerare la relazione binaria tra D' ed R che mette in relazione $E \mid H \in D'$ con $r \in R$ se e solo se $r = p_j(E \mid H)$ per qualche $j \in J$. Poiché C è una catena, per il significato di $<$, tale relazione è una applicazione di D' in R che denoteremo con il simbolo p'.

Proviamo ora che p' è una valutazione coerente di probabilità subordinata su D'. A tale scopo siano $E_1 \mid H_1, \ldots, E_n \mid H_n \in D'$, $S_1, \ldots, S_n \in R$ e consideriamo il guadagno aleatorio

$$G = \sum_1^n {}_k S_k(|E_k| - p'(E_k \mid H_k))|H_k|.$$

Poiché C è una catena esiste $j \in J$ tale che $E_k \mid H_k \in D_j$ per ogni $k \leqq n$. Ne segue dalla definizione di p' che

$$G = \sum_1^n {}_k S_k(|E_k| - p_j(E_k \mid H_k))|H_k|$$

e quindi, essendo p_j coerente su D_j, posto $H_0 = H_1 \vee \ldots \vee H_n$ riesce $\min G \mid H_0 \cdot \max G \mid H_0 \leqq 0$. Da qui la coerenza di p'.

Allora $(D', p') \in I$ e quindi la catena C ammette elemento maggiorante. Dall'arbitrarietà di C segue che I è induttivo come volevasi.

Per il Lemma di Zorn esiste allora un elemento massimale (D'', p'') di I. Risulta naturalmente $D'' \subset D_1$, proviamo di più che $D'' = D_1$. Infatti sia per assurdo $D'' \neq D_1$. Allora esiste $E \mid H \in D_1 - D''$ e quindi, per il teorema (2.3), esiste una p''' tale che, posto $D''' = D'' \cup \{E \mid H\}$, risulta

$(D''', p''') \in I$ e $(D'', p'') \underset{\neq}{<} (D''', p''')$ contraddicendo in questo modo che (D'', p'') è elemento massimale di I.

Dalla $(D_1, p'') \in I$ e dalla definizione di I segue la tesi. ■

3. In questo numero faremo vedere che il teorema di estensione di de Finetti può essere ottenuto, come corollario, dal teorema dell'estensione coerente (2.4). A tale scopo riportiamo il seguente teorema, provato in [3] (vedi teorema (2.2), b)), che collega la nozione di valutazione coerente di probabilità subordinata con quella di valutazione coerente di probabilità (assoluta) nel senso di de Finetti.

(3.1) *Sia $\mathcal{E}$ un insieme di eventi e p una applicazione di $\mathcal{E}$ in R. Inoltre, posto $D = \{E \mid \Omega \mid E \in \mathcal{E}\}$, sia p' la applicazione di D in R tale che $p'(\cdot \mid \Omega) = p(\cdot)$. Allora la coerenza di p' su D equivale alla coerenza (nel senso di de Finetti) di p su $\mathcal{E}$.*

Siamo ora in grado di provare il teorema di de Finetti. Siano D, D_1 due insiemi di eventi tali che $D \subset D_1$ e p una valutazione coerente di probabilità su D. Considerato allora l'insieme $D' = \{E \mid \Omega \mid E \in D\}$ e l'applicazione p' di D' in R definita tramite la $p'(\cdot \mid \Omega) = p(\cdot)$, per il teorema (3.1) la p' è una valutazione coerente di probabilità subordinata su D'. Quindi esiste, per il teorema dell'estensione coerente (2.4), una valutazione coerente di probabilità subordinata p'_1 sul soprainsieme $D'_1 = \{E \mid \Omega \mid E \in D_1\}$ di D', estensione della p'. Allora l'applicazione p_1 di D_1 in R tale che $p_1(\cdot) = p'_1(\cdot \mid \Omega)$ è evidentemente una estensione della p ed inoltre risulta coerente in forza del teorema (3.1). Il teorema di de Finetti è così totalmente provato come volevasi.

4. In questo numero faremo vedere invece che anche il teorema di estensione di Dubins può essere ottenuto, come corollario, dal teorema dell'estensione coerente (2.4). A tale scopo riportiamo il seguente teorema, provato in [3] (vedi teorema (3.2)), che collega la nozione di valutazione coerente di probabilità subordinata con quella di probabilità subordinata finitamente additiva nel senso di de Finetti-Renyi.

(4.1) *Sia $\mathcal{E}$ un'algebra di Boole di eventi ed $\mathcal{H}$ un suo sottoinsieme non vuoto costituito da eventi possibili. Considerato l'insieme $\mathcal{E} \mid \mathcal{H}$ costituito dagli eventi subordinati $E \mid H$ con $E \in \mathcal{E}$ ed $H \in \mathcal{H}$ si ha che:*

a) ogni valutazione coerente di probabilità subordinata su $\mathcal{E} \mid \mathcal{H}$ è anche una probabilità subordinata finitamente additiva su $\mathcal{E} \mid \mathcal{H}$;

b) se $\mathcal{H}$ è una classe additiva di eventi (cioè se per ogni $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ risulta $H_1 \vee H_2 \in \mathcal{H}$), allora ogni probabilità subor-

dinata finitamente additiva su $\mathcal{E} \mid \mathcal{H}$ è una valutazione coerente di probabilità subordinata su $\mathcal{E} \mid \mathcal{H}$.

Pertanto se $\mathcal{H}$ è una classe additiva, le valutazioni coerenti di probabilità subordinata definite su insiemi D del tipo $\mathcal{E} \mid \mathcal{H}$ *coincidono* con le probabilità subordinate finitamente additive definite su D. E' quindi a questo punto naturale chiedersi se sussista ancora qualche relazione tra le probabilità subordinate coerenti e le finitamente additive qualora l'insieme D non sia più un insieme del tipo $\mathcal{E} \mid \mathcal{H}$ ma un sottoinsieme arbitrario di $\mathcal{E} \mid \mathcal{H}$. Una risposta a tale quesito viene fornita dal prossimo teorema che permette, tra l'altro, di *identificare* le valutazioni coerenti su $D \subset \mathcal{E} \mid \mathcal{H}$ con le *restrizioni* su D di probabilità finitamente additive definite su $\mathcal{E} \mid \mathcal{H}$, qualora l'insieme $\mathcal{H}$ risulti una classe additiva.

(4.2) *Sia $\mathcal{E}$ un'algebra di Boole di eventi ed $\mathcal{H}$ un suo sottoinsieme non vuoto di eventi possibili. Considerato l'insieme $\mathcal{E} \mid \mathcal{H}$ costituito dagli eventi subordinati $E \mid H$ con $E \in \mathcal{E}$ ed $H \in \mathcal{H}$, sia inoltre D un sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{E} \mid \mathcal{H}$. Allora:*

a) ogni valutazione coerente di probabilità subordinata su D è la restrizione di una probabilità subordinata finitamente additiva su $\mathcal{E} \mid \mathcal{H}$;

b) se $\mathcal{H}$ è una classe additiva, allora ogni restrizione su D di probabilità subordinate finitamente additive su $\mathcal{E} \mid \mathcal{H}$ è una valutazione coerente di probabilità subordinata su D.

Dim. a) Sia p una valutazione coerente di probabilità subordinata su D. Allora, per il teorema dell'estensione coerente (2.4), esiste una estensione coerente di p su $\mathcal{E} \mid \mathcal{H}$. Per la *a)* del teorema (4.1) tale estensione è una probabilità subordinata finitamente additiva. Da qui la tesi.

b) Sia p una probabilità subordinata finitamente additiva su $\mathcal{E} \mid \mathcal{H}$. Allora, per la *b)* del teorema (4.1), la p è una valutazione coerente su $\mathcal{E} \mid \mathcal{H}$ e quindi lo è pure la sua restrizione su D. Da qui la tesi. ∎

Siamo ora in grado di provare il teorema di Dubins. Siano a tale scopo $\mathcal{E}_1$ un'algebra di Boole di eventi ed $\mathcal{H}_1$ un insieme di eventi possibili tale che $\mathcal{H}_1 \cup \{\phi\}$ è una sottoalgebra booleana di $\mathcal{E}_1$. Siano inoltre p una probabilità subordinata finitamente additiva sull'insieme $\mathcal{E}_1 \mid \mathcal{H}_1 = \{E \mid H \mid E \in \mathcal{E}_1$ e $H \in \mathcal{H}_1\}$ ed $\mathcal{E}$ una sopra-algebra booleana di eventi di $\mathcal{E}_1$. Tenuto allora conto che $\mathcal{H}_1$ è una classe additiva di eventi in quanto $\mathcal{H}_1 \cup \{\phi\}$ è un'algebra di Boole, per la *b)* del teorema (4.1) possiamo affermare che p è una valutazione coerente di probabilità subordinata su $\mathcal{E}_1 \mid \mathcal{H}_1$. Allora, per la *a)* di (4.2), esiste una probabilità subordinata finitamente additiva su $\mathcal{E} \mid \mathcal{H}_1$, estensione della p. Il teorema di Dubins è così totalmente provato come volevasi.

Post scriptum. Terminata la stesura del presente articolo mi sono accorto che R. S. Lehman in [4], tramite una nozione di coerenza per le probabilità subordinate che in una conveniente interpretazione risulta equivalente a quella da me proposta in [3], prova un teorema di estensione per le probabilità coerenti (teorema 4, p. 257) dello stesso tipo del teorema dell'estensione coerente (2.4). Ritengo quindi utile mettere in luce le principali differenze tra il mio lavoro e quello di Lehman.

La prima è che questo autore, proponendosi di collegare le idee di de Finetti con quelle di R. Carnap e di J. Hosiasson-Lindenbaum concernenti la teoria logica delle probabilità, considera solamente valutazioni di probabilità definite su formule ben formate chiuse (enunciati o wfss) di un linguaggio formalizzato del primo ordine. Poiché, come è ben noto, tali formule costituiscono un insieme al più numerabile, questo autore può considerare insiemi di eventi al più numerabili e ciò sia che si interpreti l'evento come una wfs del linguaggio, sia come una classe di equivalenza (elemento dell'insieme quoziente determinato dalla $\mathfrak{B}$-equivalenza introdotta in [4] a p. 252). Pertanto, a differenza della nostra impostazione nella quale gli insiemi di eventi subordinati sono di cardinalità arbitraria, Lehman può considerare al più una infinità numerabile di eventi subordinati.

La seconda riguarda la tecnica dimostrativa. La dimostrazione proposta da questo autore, per provare il suo teorema di estensione, può senz'altro essere adattata per dimostrare il teorema di estensione nelle condizioni più generali nelle quali noi ci siamo posti. Però, a differenza della nostra, essa è di tipo più algebrico che probabilistico e non ha carattere elementare. Infatti essa si basa essenzialmente su un teorema dovuto a W. B. Carver, che fornisce un criterio di incompatibilità per sistemi di disequazioni lineari proprie, e sulla proprietà delle funzioni continue di mutare insiemi compatti e connessi in insiemi del medesimo tipo.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. DE FINETTI, *Sull'impostazione assiomatica del Calcolo delle Probabilità.* Annali Triestini, vol. XIX, pp. 29-81 (1949).

[2] L. E. DUBINS, *Finitely additive conditional probabilities, conglomerability and disintegrations.* The Annals of Probability 3, pp. 89-99 (1975).

[3] S. HOLZER, *Sulla nozione di coerenza per le probabilità subordinate.* Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste, questo vol., pp. 46-62.

[4] R. S. LEHMAN, *On confirmation and rational betting.* The Journal of Symbolic Logic, vol. 20, n. 3, pp. 251-262 (1955).