SULLA NOZIONE DI COERENZA PER LE PROBABILITA' SUBORDINATE (*)

di SILVANO HOLZER (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *S'introduce una nozione di coerenza per le probabilità subordinate che estende il concetto di coerenza introdotto da B. de Finetti per le probabilità assolute e che risulta inoltre equivalente agli usuali assiomi della teoria delle probabilità subordinate finitamente additive.*

SUMMARY. - *A notion of coherence for conditional probabilities equivalent to the usual axiom system of finitely additive conditional probabilities is given, which is a suitable extension of de Finetti's coherence concept of absolute probabilities.*

1. Introduzione

E' ben noto che basandosi su una interpretazione della nozione di probabilità in termini del grado di fiducia che un dato individuo ha, in base alle sue convinzioni e conoscenze, sull'avverarsi di un dato evento, B. de Finetti pone a fondamento del Calcolo delle probabilità il *Principio di coerenza (o di ammissibilità).* In questo modo la teoria quantitativa della probabilità soggettiva viene dal de Finetti identificata con la teoria matematica delle valutazioni

(*) Pervenuto in Redazione il 20 maggio 1983.
Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca M.P.I. sui Fondamenti della probabilità dal punto di vista soggettivo.
Mi è gradito rivolgere un sentito ringraziamento ai proff. L. Crisma ed E. Regazzini, con i quali ho avuto stimolanti scambi di idee dopo la lettura di una versione provvisoria di un lavoro del prof. E. Regazzini che tratta il medesimo argomento partendo da un'altra definizione di coerenza.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica Finanziaria dell'Università - Piazzale Europa, 1 - 34100 Trieste.

coerenti di probabilità, cioè di quelle valutazioni di probabilità che soddisfano al Principio di coerenza.

Questo principio viene dal de Finetti presentato tramite due formulazioni alternative, tra loro equivalenti, che si basano su schemi concettuali diversi: lo *schema delle scommesse* e lo *schema delle penalizzazioni*. Poiché nel presente lavoro siamo interessati alla prima formulazione, riportiamo testualmente una presentazione del Principio di coerenza nell'ambito dello schema delle scommesse ([1], p. 370):

Consideriamo, in relazione a una qualunque funzione $P(E)$ degli eventi E di una classe $\mathcal{E}$, i numeri aleatori del tipo

$$G = (\lambda_1 - p_1)\, S_1 + (\lambda_2 - p_2)\, S_2 + \ldots + (\lambda_n - p_n)\, S_n$$

dove $S_1, \ldots, S_n$ sono numeri reali qualunque, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono i numeri aleatori che assumono il valore 1 o 0 a seconda che certi n eventi $E_1, \ldots, E_n$ di $\mathcal{E}$ si verificano o non si verificano, e $p_1, \ldots, p_n$ sono i corrispondenti valori $P(E_1), \ldots, P(E_n)$. Detto, per definizione, *scommessa unitaria sull'evento E, equa relativamente alla funzione P*, il numero aleatorio $\lambda - p$ ($\lambda = 1$ o 0 a seconda che E si verifica o non si verifica, e $P(E) = p$), le G relative alla funzione P sono le combinazioni lineari di scommesse unitarie, eque rispetto alla P, su un numero finito di eventi di $\mathcal{E}$.

Ciò posto, diremo che la funzione P costituisce una legge di probabilità (una legge di probabilità formalmente ammissibile) SE E SOLTANTO SE PER NESSUN NUMERO ALEATORIO G AD ESSA RELATIVO SONO POSITIVI TUTTI I VALORI POSSIBILI.

Il Principio di ammissibilità ora esposto ha la seguente giustificazione intuitiva che sarà utile nel seguito ([1], ibidem):

Osserviamo, per dare una sommaria giustificazione di questa proprietà, che $(\lambda_1 - p_1)\, S_1$ è il guadagno (positivo o negativo) di chi puntasse una somma $p_1 S_1$ sul verificarsi dell'evento E_1 in base alla valutazione di probabilità $P(E_1) = p_1$: è precisamente il numero aleatorio che assume i due valori $(1-p_1)\, S_1$ e $-p_1 S_1$ a seconda che E_1 si verifica o no. Il numero aleatorio G precedentemente considerato rappresenta il guadagno di un certo insieme di scommesse fatte in base alla valutazione di probabilità $P(E_1) = p_1, \ldots, P(E_n) = p_n$; se la valutazione di probabilità è tale che conduce a considerare equa una scommessa in cui l'esito risulti in ogni caso favorevole a uno dei due competitori (sia certamente $G > 0$), la valutazione è ovviamente incoerente, inammissibile. E' coerente, ammissibile, se in nessun modo dà luogo a una simile incongruenza.

Per le valutazioni coerenti di probabilità relative ad un dato insieme $\mathcal{E}$ di eventi, valgono le seguenti due notevoli proprietà:

— le valutazioni coerenti di probabilità costituiscono un sottoinsieme *convesso e chiuso per successioni* dello spazio vettoriale delle applicazioni di $\mathcal{E}$ nei numeri reali R munito della topologia della convergenza puntuale ([1], p. 372) (1);

— se $\mathscr{E}$ è un'algebra di Boole di eventi, allora la nozione di valutazione coerente di probabilità *coincide* con quella di applicazione di $\mathscr{E}$ in R, non negativa, normalizzata e finitamente additiva ([2], pp. 309-313).

E' quindi possibile derivare nell'ambito della teoria delle valutazioni coerenti di probabilità tutti i teoremi dell'usuale teoria matematica quantitativa della probabilità (assiomatica di Kolmogorov [5]) che *non* dipendono essenzialmente dall'assioma di continuità (σ-additività) della probabilità. Inoltre, in questo ordine di idee, il Principio di coerenza fornisce una assiomatica *alternativa* a quella usuale (assiomi I-V di Kolmogorov) per una teoria delle probabilità finitamente additive definite su algebre di Boole di eventi.

Passando a considerare le questioni connesse con la nozione di probabilità subordinata, de Finetti nel lavoro [3], pp. 108-109, dopo aver introdotto la nozione di evento subordinato nel seguente modo:

> One can consider, then, the «conditional events» (or «tri-events»), which are the events of a three-valued logic: this «tri-event», «E' conditioned on E''», $E' \mid E''$, is the logical entity capable of having three values: *true* if E'' and E' are true; *false* if E'' is true and E' false; *void* if E'' is false.

propone la seguente estensione del Principio di coerenza al caso subordinato:

> Let us define the probability p of E' conditioned on E'' by the same condition relative to bets, but in this case we make the convention that the bet is to be called off if E'' does not happen. The bet can then give three different results: if S is the stake, outlay paid will be pS, and the gain $(1-p)S$, $-pS$, or 0 according to whether $E' \mid E''$ will be true, false, or void, for in the first case one gains the stake and loses the outlay, in the second one loses the outlay, and in the last the outlay is returned (if $S < 0$ these considerations remain unchanged; we need only to change the terminology of debit and credit).

Si osservi ora che il guadagno aleatorio G relativo alla scommessa su $E' \mid E''$ può scriversi tramite il numero aleatorio *indicatore dell'evento*, che denoteremo qui e nel seguito come usuale con $| \cdot |$, nel seguente modo:

$$G = S(|E'| - p(E' \mid E''))\,|E''|\,.$$

L'estensione ora citata del Principio di coerenza può allora ovviamente formalizzarsi tramite la:

(1.1) *Sia D un insieme di eventi subordinati, finito o no, e p una applicazione di D in R. Diremo che p è* coerente *su D se e solo se per ogni $E_1 \mid H_1, \ldots, E_n \mid H_n \in D$ ed $S_1, \ldots, S_n \in R$ il numero alea-*

(1) In altri termini, combinazioni lineari convesse di probabilità coerenti sono probabilità coerenti e successioni convergenti di probabilità coerenti hanno come limite probabilità coerenti.

torio (guadagno aleatorio)

$$G = \sum_{1}^{n} {}_i S_i(|E_i| - p(E_i|H_i))|H_i|$$

è tale che $\min G \cdot \max G \leq 0$ *ove, come al solito, gli estremi vengono determinati sull'insieme dei possibili valori del numero aleatorio G.*

Tramite questa nozione di coerenza, de Finetti, sempre in [3], p. 109, prova il ben noto teorema delle probabilità composte:

$$p(E \wedge H) = p(E|H)\, p(H)$$

che consente, nel caso in cui l'evento ipotesi H abbia probabilità non nulla, di esprimere la probabilità subordinata mediante le probabilità assolute nel seguente modo:

$$p(E|H) = \frac{p(E \wedge H)}{p(H)}$$

e quindi, qualora la subordinazione avvenga *sempre* su eventi di probabilità assoluta *non nulla,* di ottenere gli usuali assiomi della teoria matematica quantitativa delle probabilità subordinate (assiomatica di Renyi [6]) ad eccezione, naturalmente, dell'assioma di continuità (σ-additività).

E' di fondamentale importanza, per il seguito, osservare a questo punto che la situazione ora descritta *non sussiste* qualora l'evento ipotesi abbia probabilità assoluta nulla. In questo caso non è neppure derivabile dal Principio di coerenza (1.1) la naturale proprietà $0 \leq p(E|H) \leq 1$. Infatti sia H tale che $p(H) = 0$. Considerati allora gli eventi $E|H$, $H|\Omega = H$, $E \wedge H|\Omega = E \wedge H$, il guadagno aleatorio G considerato in (1.1) è dato dalla:

$$\begin{aligned} G &= S_1(|E| - p(E|H))|H| + S_2(|H| - p(H))|\Omega| + \\ &\quad + S_3(|E \wedge H| - p(E \wedge H))|\Omega| \\ &= S_1(|E| - p(E|H))|H| + S_2|H| + S_3|E \wedge H| \\ &= [S_1(|E| - p(E|H)) + S_2 + S_3|E|)|H| \end{aligned}$$

e quindi il guadagno corrispondente al verificarsi di $\sim H$ è nullo qualunque sia il numero reale $p = p(E|H)$. Ne segue che lo zero è un valore possibile per G indipendentemente dal valore assunto da p; quindi è $\min G \leq 0$ e $\max G \geq 0$ qualunque sia p. Pertanto il Principio di coerenza (1.1) non assicura che la probabilità dell'evento $E|H$ sia un numero compreso tra 0 ed 1.

Quanto appena visto permette di affermare che in generale *l'usuale assiomatica della probabilità subordinata finitamente additiva non è derivabile dal Principio di coerenza* (1.1). Sorge allora spontaneo il problema di vedere se sia possibile formulare una nozione di coerenza per il caso subordinato che assicuri la validità dell'assiomatica in parola.

Il fine del presente lavoro è proprio quello di fornire una risposta positiva a tale questione introducendo allo scopo un Principio di coerenza per le probabilità subordinate che:

— estende l'usuale coerenza di de Finetti relativa al caso assoluto (teor. (2.2));

— assicura che l'insieme delle valutazioni coerenti di probabilità subordinata è, analogamente al caso assoluto, un insieme chiuso per successioni (teor. (2.4));

— è equivalente agli assiomi delle probabilità subordinate finitamente additive qualora l'insieme degli eventi subordinati goda delle usuali proprietà di chiusura algebrica (teor. (3.2)).

2. Principio di coerenza esteso

Il problema delineato nell'Introduzione viene considerato anche dal de Finetti che nell'appendice critica di [4], p. 722, prende in considerazione l'evento subordinato $E \mid H$ ed afferma che:

> per l'estensione delle nozioni e regole del calcolo delle probabilità al nuovo caso occorre *rinforzare* la condizione di coerenza dicendo che *le valutazioni subordinate ad H devono risultare coerenti subordinatamente ad H* (ossia nell'ipotesi che H risulti vero).

Ora, se da una parte questa soluzione permette, come vedremo in seguito, di provare che l'applicazione $p(\,\cdot \mid H)$ è una probabilità assoluta finitamente additiva tale che $p(H \mid H) = 1$, dall'altra non assicura la validità incondizionata del teorema di moltiplicazione delle probabilità subordinate. Bisogno pertanto introdurre un ulteriore rafforzamento della nozione di coerenza.

Questo rafforzamento può essere suggerito dalle seguenti condizioni euristiche. Supponiamo che un individuo faccia una combinazione di scommesse sugli eventi subordinati $E_1 \mid H_1, \ldots, E_n \mid H_n$ con puntate rispettive $p_1 S_1, \ldots, p_n S_n$ ove $p_1, \ldots, p_n$ sono le sue valutazioni di probabilità sugli eventi $E_1 \mid H_1, \ldots, E_n \mid H_n$. Ora, poiché nel caso che *tutti* gli eventi ipotesi $H_1, \ldots, H_n$ non si verifichino le n scommesse sono annullate, lo scommettitore, per decidere se la sua valutazione probabilistica non lo metta nella condizione spiacevole di avere una perdita certa qualora almeno una scommessa risulti valida, deve necessariamente analizzare il suo guadagno aleatorio ponendosi nella condizione che *almeno* uno degli eventi ipotesi si verifichi. Ciò equivale ovviamente ad analizzare quelle possibili determinazioni del guadagno aleatorio

$$G = \sum_1^n {}_i S_i(|E_i| - p_i)|H_i|$$

che sono *compatibili* con l'ipotesi che l'evento somma logica $H_0 = H_1 \vee \ldots \vee H_n$ si verifichi; ovvero interessa analizzare i possibili valori del guadagno aleatorio subordinato $G' = G \mid H_0$.

Ora se le determinazioni possibili di G' sono tutte negative lo scommettitore subirà una perdita certa sulla combinazione di scommesse in parola. Egli *deve* quindi, onde evitare questa spiacevole situazione, fare in modo che *non tutti* i valori possibili di G' siano negativi.

Poiché quanto ora delineato deve avvenire per *ogni* combinazione di scommesse relative agli eventi $E_1 \mid H_1, \ldots, E_n \mid H_n$, la valutazione di probabilità $p_1, \ldots, p_n$ sarà per lo scommettitore ammissibile, coerente, se *qualunque* siano le puntate $S_1, \ldots, S_n$ non è possibile che il corrispondente guadagno aleatorio subordinato G' risulti *in ogni caso negativo.* Ed è proprio questa nozione di coerenza che qui adotteremo.

Ciò posto diamo la seguente fondamentale definizione:

(2.1) *Principio di coerenza esteso.*

Sia D un insieme di eventi subordinati, finito o no, e sia p una applicazione di D in R. Diremo che p è una valutazione coerente *di probabilità su D (o che p è* coerente *su D) se e solo se per ogni* $E_1 \mid H_1, \ldots, E_n \mid H_n \in D$ *ed* $S_1, \ldots, S_n \in R$ *il guadagno aleatorio*

$$G = \sum_1^n {}_i S_i(|E_i| - p(E_i \mid H_i))|H_i|$$

è tale che per il guadagno aleatorio subordinato all'ipotesi $H_0 = H_1 \vee \ldots \vee H_n$ *risulta* $\min G \mid H_0 \cdot \max G \mid H_0 \leq 0$ *ove, come al solito, gli estremi vengono determinati sull'insieme dei possibili valori del numero aleatorio* $G \mid H_0$ [(2)].

La nozione di coerenza ora introdotta è una *generalizzazione* della usuale nozione di coerenza relativa alle probabilità assolute. Inoltre se una valutazione di probabilità subordinata è coerente,

(2) Cioè sull'insieme, non vuoto poiché H_0 è un evento possibile, dei valori possibili del guadagno aleatorio G che sono *compatibili* con l'ipotesi H_0 o se si vuole, ricorrendo ai costituenti possibili della famiglia $E_1, \ldots, E_n$, $H_1, \ldots, H_n$, sull'insieme dei valori che G assume in corrispondenza dei costituenti aventi *qualche* $H_i (i \leqslant n)$ affermato. Ricercare il minimo ed il massimo di $G \mid H_0$ equivale quindi a determinare gli *estremi condizionati* del guadagno aleatorio G sotto la condizione di vincolo $\sum_1^n {}_i |H_i| \geqslant 1$.

allora sono coerenti nel senso di de Finetti, e quindi sono valutazioni ammissibili di probabilità assoluta, tutte le sue restrizioni ad un prefissato evento ipotesi. Infatti proviamo che sussiste la seguente proposizione:

(2.2) *Sia $\mathcal{E}$ un insieme di eventi ed H un evento possibile. Inoltre, posto $D = \{E \mid H \mid E \in \mathcal{E}\}$, siano p una applicazione di D in R e p_H l'applicazione di $\mathcal{E}$ in R:*

$$p_H(\,\cdot\,) = p(\,\cdot \mid H).$$

Si ha allora che:

a) *se p è coerente su D, allora p_n è coerente su $\mathcal{E}$;*

b) *se H è certo, allora la coerenza di p su D equivale alla coerenza di p_H su $\mathcal{E}$.*

Dim. Siano $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E}, S_1, \ldots, S_n \in R$ e $G_H = \sum_1^n {}_i S_i(|E_i| - p_H(E_i))$ il guadagno aleatorio relativo all'applicazione p_H.
Il guadagno aleatorio G relativo all'applicazione p ed alle famiglie di eventi subordinati $E_1 \mid H, \ldots, E_n \mid H \in D$ e di numeri reali $S_1, \ldots, S_n$ è dato dalla:

$$G = \sum_1^n {}_i S_i(|E_i| - p(E_i \mid H))|H| = [\sum_1^n {}_i S_i(|E_i| - p_H(E_i))]\,|H|$$

e quindi $G = |H| \cdot G_H$. Ne segue che i valori del guadagno subordinato $G \mid H$ sono anche determinazioni possibili del guadagno G_H.

Sia ora p coerente su D. Ne segue $\min G \mid H \cdot \max G \mid H \leq 0$ da cui $\min G_H \cdot \max G_H \leq 0$ e quindi p_H risulta coerente su $\mathcal{E}$. Ciò prova la a).

Per la b) basta osservare che se H è, in particolare, l'evento certo, allora risulta $G \mid H = G = G_H$. ■

Il prossimo teorema assicura, tra l'altro, che le valutazioni coerenti di probabilità subordinata hanno immagine inclusa nell'intervallo dei numeri reali non negativi e non strettamente maggiori di uno.

(2.3) *Sia p una valutazione coerente di probabilità sull'insieme di eventi subordinati D. Allora per ogni $E \mid H \in D$ risulta:*

a) $0 \leq p(E \mid H) \leq 1$;

b) *se E ed H sono incompatibili: $p(E \mid H) = 0$;*

c) *se H implica E: $p(E \mid H) = 1$.*

Dim. Posto $p = p(E \mid H)$, il guadagno G relativo all'evento $E \mid H$ ed all'importo $S = 1$ è dato dalla $G = (|E| - p)|H|$. Quindi, poiché non può essere $\sim E \wedge H = E \wedge H = \phi$ in quanto $H \neq \phi$, i valori possibili del guadagno subordinato $G \mid H$ sono rispettivamente $1-p$ o $-p$ oppure $1-p$ e $-p$ a seconda che risulti rispettivamente $\sim E \wedge H = \phi$ o $E \wedge H = \phi$ oppure $\sim E \wedge H$ e $E \wedge H$ entrambi possibili.

Ora, essendo l'applicazione p coerente su D, riesce $\min G \mid H \leq 0$, $\max G \mid H \geq 0$ e quindi:

— nel primo caso deve essere $1-p=0$, da cui $p=1$;

— nel secondo caso deve essere $-p=0$, da cui $p=0$;

— nel terzo caso deve essere $-p(1-p) \leq 0$, da cui $0 \leq p \leq 1$.

Da qui la tesi. ■

Il seguente teorema, di notevole interesse sia teorico che applicativo, mette in evidenza che, come le valutazioni coerenti di probabilità assoluta, anche le valutazioni coerenti di probabilità subordinata, su un dato insieme di eventi subordinati D, costituiscono un sottoinsieme chiuso per successioni dello spazio vettoriale delle applicazioni di D in R, munito della topologia della convergenza puntuale. Questo sottoinsieme, contrariamente a quello del caso assoluto, *non è invece convesso*. Ciò è messo in evidenza dall'esempio che segue la dimostrazione del prossimo teorema.

(2.4) *Siano D un insieme di eventi subordinati e (p_n) una successione di valutazioni di probabilità coerenti su D. Se per ogni $E \mid H \in D$ esiste il* $\lim p_n(E \mid H)$, *allora l'applicazione* $p = \lim p_n$ *è una applicazione di D in R, valutazione coerente di probabilità su D.*

Dim. Che l'applicazione p abbia codominio R è assicurato dalla a) del teorema (2.3). Proviamo che essa è coerente. Considerati gli eventi subordinati $E_1 \mid H_1, \dots, E_n \mid H_n \in D$ ed i numeri reali $S_1, \dots, S_n$, per il guadagno aleatorio

$$G = \sum_1^n {}_i S_i(|E_i| - p(E_i \mid H_i))|H_i|$$

risulta:

$$G = \sum_1^n {}_i S_i(|E_i| - \lim p_h(E_i \mid H_i))|H_i|$$

$$= \lim \sum_1^n {}_i S_i(|E_i| - p_h(E_i \mid H_i))|H_i|$$

da cui, detto G_h il guadagno aleatorio relativo all'applicazione p_h, otteniamo $G = \lim G_h$ e quindi, posto come al solito $H_0 = H_1 \vee \dots \vee H_n$,

$$G \mid H_0 = \lim (G_h \mid H_0).$$

Ne segue che $G \mid H_0$ non può avere tutte le determinazioni possibili positive (negative). Infatti in caso contrario esisterebbe, per il teorema della permanenza del segno, un numero naturale m_0 tale che per ogni numero naturale $m > m_0$ risulterebbero positivi (negativi) tutti i possibili valori del guadagno aleatorio $G_m \mid H_0$ contraddicendo in questo modo la supposta coerenza della valutazione p_m.

Si ha pertanto $\min G \mid H_0 \cdot \max G \mid H_0 \leq 0$. Da qui la tesi. ■

Come abbiamo dichiarato in precedenza proviamo ora con un esempio che, a differenza del caso assoluto, le valutazioni coerenti di probabilità subordinata, definite su un dato insieme D di eventi subordinati, non formano un insieme convesso. Sia $D = \{E \wedge H \mid \Omega, E \mid H, H \mid \Omega\}$ con $E \wedge H$ evento possibile. Poiché si ha $G \mid H_0 = G \mid \Omega \vee H = G \mid \Omega = G$, il guadagno aleatorio subordinato $G \mid H_0$ coincide con il guadagno aleatorio G. Possiamo allora concludere che la coerenza estesa (2.1) *coincide* in questo caso con la coerenza (1.1) proposta, come ricordato nell'Introduzione, da de Finetti in [3]. Quindi, poiché questa coerenza, come osservato in [3], pp. 109-110, è a sua volta equivalente alle proprietà a) ∸ c) del teorema (2.3) congiuntamente al teorema delle probabilità composte (che coinvolge un solo evento ipotesi) si ha che le seguenti due applicazioni p_1 e p_2 di D in R sono delle valutazioni coerenti di probabilità subordinata:

$$p_1(E \wedge H \mid \Omega) = 1/2 \qquad p_2(E \wedge H \mid \Omega) = 1/6$$

$$p_1(E \mid H) = 1/2 \qquad p_2(E \mid H) = 1/3$$

$$p_1(H \mid \Omega) = 1 \qquad p_2(H \mid \Omega) = 1/2 .$$

Ciò osservato sia p l'applicazione di D in R tale che $p = (1/3)\, p_1 + (2/3)\, p_2$. Allora si ha:

$$p(E \wedge H \mid \Omega) = 5/18, \; p(E \mid H) = 7/18, \; p(H \mid \Omega) = 2/3$$

da cui $p(E \wedge H \mid \Omega) \neq p(E \mid H)\, p(H \mid \Omega)$ che contraddice la $p(E \wedge H \mid \Omega) = p(H \mid \Omega)\, p(E \mid \Omega \wedge H) = p(H \mid \Omega)\, p(E \mid H)$ che sussiste per ogni probabilità subordinata coerente come vedremo tra breve nel prossimo teorema (3.1).

Pertanto, come volevasi, combinazioni lineari convesse di probabilità subordinata coerenti non sono, in generale, valutazioni coerenti.

3. Coerenza estesa ed assiomi delle probabilità subordinate

In questo numero proveremo il risultato principale del presente lavoro che mette in luce la possibilità per il Principio di coerenza esteso (2.1) di essere una assiomatica alternativa a quella usualmente adottata nella letteratura per sviluppare una teoria quantitativa delle probabilità subordinate finitamente additive. A tal fine premettiamo il seguente teorema che fornisce alcune notevoli proprietà delle valutazioni coerenti di probabilità subordinata.

(3.1) *Sia D un insieme di eventi subordinati e p una applicazione coerente su D. Sussistono allora le seguenti otto proposizioni* [3]*:*

a) $p(\sim E \mid H) = 1 - p(E \mid H)$;

b) $p(E_1 \vee E_2 \mid H) + p(E_1 \wedge E_2 \mid H) = p(E_1 \mid H) + p(E_2 \mid H)$;

c) $p(E_1 \wedge E_2 \mid H) = p(E_2 \mid H)\, p(E_1 \mid E_2 \wedge H)$;

d) *se* $H \subseteq E_2 : p(E_1 \wedge E_2 \mid H) = p(E_1 \mid H)$;

e) *se* $E_1 \wedge E_2$ *ed* H *sono incompatibili:*

$p(E_1 \vee E_2 \mid H) = p(E_1 \mid H) + p(E_2 \mid H)$;

f) *se* $E_1 \wedge H \subseteq E_2 : p(E_1 \mid H) \leq p(E_2 \mid H)$;

g) *se* $E \subseteq H_2 \subseteq H_1 : p(E \mid H_1) \leq p(E \mid H_2)$;

h) *se* $E_1 \subseteq E_2 \subseteq H_2 \subseteq H_1 : p(E_1 \mid H_1) \leq p(E_2 \mid H_2)$.

Nota. Le dimostrazioni che riguardano proprietà relative ad eventi subordinati ad un unico evento ipotesi sono simili a quelle che si eseguono per provare tali proprietà nel caso di eventi non subordinati.

Avvertiamo inoltre che alcune dimostrazioni potrebbero essere semplificate ove si ampliasse opportunamente l'insieme D di eventi che interessa la proposizione in esame. Abbiamo però preferito lavorare senza operare alcun ampliamento, sottolineando così l'indipendenza di tutte otto le proposizioni da qualsiasi proprietà di chiusura o altro dell'insieme D. Per maggiori dettagli in proposito si vedano le osservazioni fatte al termine delle dimostrazioni delle proposizioni d), e), f) e g).

Dim. a). Posto $p_1 = p(\sim E \mid H)$ e $p_2 = p(E \mid H)$, il guadagno aleatorio relativo agli eventi subordinati $\sim E \mid H, E \mid H$ ed agli importi S_1, S_2 è dato dalla:

$$G = S_1(|\sim E| - p_1)|H| + S_2(|E| - p_2)|H|$$

che, tenuto conto della $|\sim E| = 1 - |E|$, diviene

$$G = [S_1(1 - |E| - p_1) + S_2(|E| - p_2)]\,|H| .$$

Posto, in particolare, $S_1 = S_2 = 1$, otteniamo $G = (1 - p_1 - p_2)|H|$ e quindi il relativo guadagno aleatorio subordinato $G \mid H$ ammette $1 - p_1 - p_2$ come unico valore possibile. Ne segue, tenuto conto che

(3) Per non appesantire inutilmente l'esposizione viene sempre sottinteso che l'insieme D contenga, di volta in volta, gli eventi subordinati che compaiono nella proposizione presa in considerazione.

la coerenza di p su D assicura la $\min G|H \max G|H \leq 0$, che $1 - p_1 - p_2 = 0$, da cui $p_1 = 1 - p_2$, cioè la tesi.

b). Posto $p_1 = p(E_1 \vee E_2 | H), p_2 = p(E_1 \wedge E_2 | H), p_3 = p(E_1 | H)$, $p_4 = p(E_2 | H)$, il guadagno aleatorio relativo agli eventi subordinati $E_1 \vee E_2 | H, E_1 \wedge E_2 | H, E_1 | H, E_2 | H$ ed agli importi S_i $(i \leq 4)$ è dato dalla:

$$G = S_1(|E_1 \vee E_2| - p_1)|H| + S_2(|E_1 \wedge E_2| - p_2)|H| + \\ + S_3(|E_1| - p_1)|H| + S_4(|E_2| - p_4)|H|$$

che, tenuto conto della $|E_1 \vee E_2| = |E_1| + |E_2| - |E_1 \wedge E_2|$, diviene

$$G = [S_1(|E_1| + |E_2| - |E_1 \wedge E_2| - p_1) + S_2(|E_1 \wedge E_2| - p_2) + \\ + S_3(|E_1| - p_3) + S_4(|E_2| - p_4)]\,|H|.$$

Posto, in particolare, $S_1 = S_2 = -1$ ed $S_3 = S_4 = 1$, otteniamo $G = (p_1 + p_2 - p_3 - p_4)|H|$ e quindi il relativo guadagno aleatorio subordinato $G|H$ ammette $p_1 + p_2 - p_3 - p_4$ come unico valore possibile. Come prima, per la coerenza di p su D, risulta $p_1 + p_2 - p_3 - p_4 = 0$ da cui $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$.

c). Posto $p_1 = p(E_1 \wedge E_2 | H), p_2 = p(E_2 | H), p_3 = p(E_1 | E_2 \wedge H)$, il guadagno aleatorio relativo agli eventi subordinati $E_1 \wedge E_2 | H, E_2 | H$, $E_1 | E_2 \wedge H$ ed agli importi S_1, S_2, S_3 è dato dalla

$$G = S_1(|E_1 \wedge E_2| - p_1)|H| + S_2(|E_2| - p_2)|H| + S_3(|E_1| - p_3)|E_2 \wedge H|$$

che, tenuto conto della $|A \wedge B| = |A| \cdot |B|$, diviene

$$G = [S_1(|E_1| \cdot |E_2| - p_1) + S_2(|E_2| - p_2) + S_3(|E_1| - p_3)|E_2|]\,|H|.$$

Posto, in particolare, $S_1 = -1$ e $S_3 = 1$, otteniamo

$$G = [p_1 + S_2(|E_2| - p_2) - p_3|E_2|]\,|H|$$

e quindi, scegliendo $S_2 = p_3$, risulta $G = (p_1 - p_2 p_3)|H|$. Pertanto il relativo guadagno aleatorio subordinato $G|H$ ammette $p_1 - p_2 p_3$ come unico valore possibile. Ne segue, per la coerenza di p su D, che $p_1 - p_2 p_3 = 0$ da cui $p_1 = p_2 p_3$, cioè la tesi.

d). Posto $p_1 = p(E_1 \wedge E_2 | H), p_2 = p(E_1 | H)$, il guadagno aleatorio relativo agli eventi subordinati $E_1 \wedge E_2 | H, E_1 | H$ ed agli importi S_1, S_2 è dato dalla

$$G = S_1(|E_1 \wedge E_2| - p_1)|H| + S_2(|E_1| - p_2)|H|$$

che, tenuto conto della $|E_1 \wedge E_2| = |E_1| \cdot |E_2|$ e della $|E_2| \cdot |H| = |H|$ immediata conseguenza della $H \subseteq E_2$ ammessa per ipotesi, diviene

$$G = S_1(|E_1| \cdot |E_2| \cdot |H| - p_1|H|) + S_2(|E_1| - p_2)|H| =$$

$$= [S_1(|E_1| - p_1) + S_2(|E_1| - p_2)]\,|H|\,.$$

Posto, in particolare, $S_1 = -1$ ed $S_2 = 1$, otteniamo $G = (p_1 - p_2)|H|$ e quindi il relativo guadagno aleatorio subordinato $G|H$ ammette $p_1 - p_2$ come unico valore possibile. Al solito, essendo p coerente su D, $p_1 - p_2 = 0$ da cui $p_1 = p_2$.

Osserviamo che se includiamo in D l'evento subordinato $E_2|H$ la presente proprietà è una immediata conseguenza della c) precedente e della c) del teorema (2.3).

e). Posto $p_1 = p(E_1 \vee E_2|H), p_2 = p(E_1|H), p_3 = p(E_2|H)$, il guadagno aleatorio relativo agli eventi subordinati $E_1 \vee E_2|H, E_1|H, E_2|H$ ed agli importi S_1, S_2, S_3 è dato dalla:

$$G = S_1(|E_1 \vee E_2| - p_1)|H| + S_2(|E_1| - p_2)|H| + S_3(|E_2| - p_3)|H|$$

che, tenuto conto della $|E_1 \vee E_2| = |E_1| + |E_2| - |E_1| \cdot |E_2|$, diviene

$$G = [S_1(|E_1| + |E_2| - |E_1| \cdot |E_2| - p_1) + S_2(|E_1| - p_2) +$$
$$+ S_3(|E_2| - p_3)]\,|H|\,.$$

Posto, in particolare, $S_1 = -1, S_2 = S_3 = 1$, otteniamo

$$G = [|E_1| \cdot |E_2| + (p_1 - p_2 - p_3)]\,|H| =$$
$$= |E_1| \cdot |E_2| \cdot |H| + (p_1 - p_2 - p_3)|H|$$

e quindi, poiché $|E_1| \cdot |E_2| \cdot |H| = |E_1 \wedge E_2 \wedge H| = 0$ in quanto per ipotesi si ha $E_1 \wedge E_2 \wedge H = \phi$, risulta $G = (p_1 - p_2 - p_3)|H|$. Pertanto il relativo guadagno aleatorio subordinato $G|H$ ammette $p_1 - p_2 - p_3$ come unico valore possibile. Per la coerenza di p su D, segue $p_1 = = p_2 + p_3$.

Includendo in D l'evento subordinato $E_1 \wedge E_2|H$ anche questa proprietà si ottiene in modo molto più semplice, questa volta come immediata conseguenza della b) attuale e della b) di (2.3).

f). Posto $p_1 = p(E_1|H), p_2 = p(E_2|H)$, il guadagno aleatorio relativo agli eventi subordinati $E_1|H, E_2|H$ con $S_1 = -1, S_2 = 1$ è dato dalla

$$G = -(|E_1| - p_1)|H| + (|E_2| - p_2)|H| =$$
$$= [-|E_1| + |E_2| + p_1 - p_2]\,|H|\,.$$

Ora, se E_1 ed H sono incompatibili, per la b) di (2.3), risulta $p_1 = p(E_1|H) = 0$ e la tesi segue dalla a) di (2.3).

Sia pertanto $E_1 \wedge H$ un evento possibile. E' allora anche possibile, tenendo presente l'ipotesi $E_1 \wedge H \subseteq E_2$, l'evento $E_1 \wedge E_2 \wedge H$. E' invece impossibile, sempre per detta ipotesi, l'evento $E_1 \wedge (\sim E_2) \wedge H$. Il guadagno subordinato $G|H$ va quindi esaminato nei tre casi

$E_1 \wedge E_2 \wedge H$, $(\sim E_1) \wedge (\sim E_2) \wedge H$ e $(\sim E_1) \wedge E_2 \wedge H$. Se questo ultimo è impossibile, $G \mid H$ assume solo il valore $p_1 - p_2$ e quindi, essendo p coerente su D, $p_1 = p_2$ e si ha la tesi. Se invece tale costituente è possibile, $G \mid H$ assume i valori $p_1 - p_2$ e $1 + p_1 - p_2$. Sempre per la coerenza di p deve allora essere $(p_1 - p_2)(1 + p_1 - p_2) \leq 0$, da cui $p_1 - p_2 \leq 0$ e quindi ancora la tesi.

Osserviamo anche qui che la proprietà ora provata è una immediata conseguenza dell'uguaglianza $E_2 = (E_1 \wedge H) \vee (E_2 \wedge \sim (E_1 \wedge H))$, delle e), d) e della a) di (2.3) qualora gli eventi subordinati $E_1 \wedge H \mid H$ ed $E_2 \wedge \sim (E_1 \wedge H) \mid H$ appartengano all'insieme D.

g). Se $H_1 = H_2$ la tesi è ovvia. Inoltre se $E = H_2$ oppure $E = \phi$ la tesi è una immediata conseguenza delle c), b) di (2.3). Supponiamo pertanto $\phi \neq E \subset H_2 \subset H_1$. Ne segue che, posto $p_1 = p(E \mid H_1)$, $p_2 = p(E \mid H_2)$ e considerato il guadagno aleatorio relativo agli eventi subordinati $E \mid H_1$, $E \mid H_2$ ed agli importi $S_1 = -1, S_2 = 1$:

$$G = -(|E| - p_1)|H_1| + (|E| - p_2)|H_2|,$$

i possibili valori del guadagno aleatorio subordinato $G \mid H_1 \vee H_2$ sono quelli assunti dalla G in corrispondenza degli eventi $E \wedge H_1 \wedge H_2$, $(\sim E) \wedge H_1 \wedge H_2$, $(\sim E) \wedge H_1 \wedge (\sim H_2)$; sono cioè i numeri reali $-(1 - p_1) + (1 - p_2) = p_1 - p_2, p_1 - p_2, p_1$. Per la coerenza dell'applicazione p su D risulta allora $(p_1 - p_2)\, p_1 \leq 0$ da cui, tenuto conto che $p_1 \geq 0$ in forza della a) di (2.3), otteniamo $p_1 - p_2 \leq 0$ e quindi $p_1 \leq p_2$, cioè la tesi.

Se l'evento subordinato $H_2 \mid H_1$ appartiene all'insieme D, allora la proprietà ora provata è una conseguenza immediata della c) e del teorema (2.3). Riesce infatti:

$$p(E \mid H_1) = p(E \wedge H_2 \mid H_1) = p(H_2 \mid H_1)\, p(E \mid H_2 \wedge H_1) =$$
$$= p(H_2 \mid H_1)\, p(E \mid H_2) \leq p(E \mid H_2),$$

la disuguaglianza valendo in forza della a) di (2.3).

h). Dalla f) otteniamo la $p(E_1 \mid H_1) \leq p(E_2 \mid H_1)$ e dalla g) la $p(E_2 \mid H_1) \leq p(E_2 \mid H_2)$. Da qui la tesi.

Il teorema è così totalmente provato. ■

Siamo ora finalmente in grado di provare il seguente notevole teorema che fornisce il preannunciato collegamento fra la nozione di valutazione coerente di probabilità subordinata qui considerata e quella di probabilità subordinata finitamente additiva che viene usualmente introdotta nella letteratura adottando gli assiomi di A. Renyi ([6], pp. 288-289), che non riguardano naturalmente la σ-additività della probabilità.

(3.2) *Sia $\mathcal{E}$ un'algebra di Boole di eventi ed $\mathcal{H}$ un suo sottoin-*

sieme non vuoto costituito da eventi possibili. Considerato l'insieme $\mathcal{E}\,|\,\mathcal{H}$ *costituito dagli eventi subordinati* $E\,|\,H$ *con* $E \in \mathcal{E}$ *ed* $H \in \mathcal{H}$, *si ha che:*

a) *ogni valutazione coerente su* $\mathcal{E}\,|\,\mathcal{H}$ *è anche una probabilità subordinata finitamente additiva su* $\mathcal{E}\,|\,\mathcal{H}$;

b) *se* $\mathcal{H}$ *è una classe additiva di eventi (cioè se per ogni* $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ *risulta* $H_1 \vee H_2 \in \mathcal{H}$*), allora ogni probabilità subordinata finitamente additiva su* $\mathcal{E}\,|\,\mathcal{H}$ *è coerente su* $\mathcal{E}\,|\,\mathcal{H}$.

Dim. Prima di procedere nella dimostrazione conviene riportare gli assiomi di Renyi che caratterizzano la nozione di probabilità subordinata finitamente additiva sull'insieme $\mathcal{E}\,|\,\mathcal{H}$. A tale scopo sia p una applicazione di $\mathcal{E}\,|\,\mathcal{H}$ in R. Allora p è una probabilità subordinata finitamente additiva se e solo se sussistono le seguenti quattro proprietà:

(i) $p(E\,|\,H) \geq 0$ per ogni $E \in \mathcal{E}, H \in \mathcal{H}$;

(ii) $p(H\,|\,H) = 1$ per ogni $H \in \mathcal{H}$;

(iii) $p(E_1 \vee E_2\,|\,H) = p(E_1\,|\,H) + p(E_2\,|\,H)$ per ogni $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ tali che $E_1 \wedge E_2 = \phi$ e per ogni $H \in \mathcal{H}$;

(iv) $p(E_1 \wedge E_2\,|\,H) = p(E_2\,|\,H)\, p(E_1\,|\,E_2 \wedge H)$ per ogni $E_1 \in \mathcal{E}$ e per ogni $E_2 \in \mathcal{E}, H \in \mathcal{H}$ tali che $E_2 \wedge \mathrm{H} \in \mathcal{H}$.

Osservato che la proposizione a) è una immediata conseguenza delle a), c) di (2.3) e delle e), c) di (3.1), proviamo la proposizione b). Sia quindi $\mathcal{H}$ una classe additiva di eventi e p una probabilità subordinata finitamente additiva su $\mathcal{E}\,|\,\mathcal{H}$. Verifichiamo che p è una valutazione coerente su $\mathcal{E}\,|\,\mathcal{H}$. Considerati gli eventi subordinati $E_1\,|\,H_1, \ldots, E_n\,|\,H_n \in \mathcal{E}\,|\,\mathcal{H}$ ed i numeri reali $S_1, \ldots, S_n$ bisogna provare che il guadagno aleatorio

$$G = \sum_{1}^{n}{}_i\, S_i(|\,E_i\,| - p(E_i\,|\,H_i))\,|\,H_i\,|$$

è tale che $\min G\,|\,H_0 \cdot \max G\,|\,H_0 \leqslant 0$, ove si è posto come al solito $H_0 = H_1 \vee \ldots \vee H_n$.

Siano ora $\omega_1, \ldots, \omega_s$ i costituenti possibili della famiglia $E_1, \ldots, E_n, H_1, \ldots, H_n$ con qualche $H_i (i \leqslant n)$ affermato[(4)]. Allora le determinazioni possibili del guadagno aleatorio subordinato $G\,|\,H_0$ sono date dalle:

$$g_k = \sum_{\{i\,|\,\omega_k \subseteq E_i \wedge H_i\}} S_i - \sum_{\{i\,|\,\omega_k \subseteq H_i\}} S_i\, p(E_i\,|\,H_i) \qquad (k \leqslant s)$$

(4) Ricordiamo che il generico costituente della famiglia $E_1, \ldots, E_n, H_1, \ldots, H_n$ è un evento del tipo $E'_1 \wedge \ldots \wedge E'_n \wedge H'_1 \wedge \ldots \wedge H'_n$ ove gli apici sugli eventi indicano che questi sono gli eventi stessi o le loro negazioni.

in quanto, con riferimento al verificarsi del costituente ω_k, gli unici eventi della famiglia $E_1, \ldots, E_n, H_1, \ldots, H_n$ che hanno indicatore non nullo sono quelli che risultano affermati in ω_k [5].

Per verificare la coerenza dell'applicazione p basta allora evidentemente provare che i numeri reali $g_1, \ldots, g_s$ non sono tutti positivi o tutti negativi.

A tale scopo, osservato preliminarmente che gli eventi subordinati $\omega_1 | H_0, \ldots, \omega_s | H_0$ sono elementi di $\mathcal{E} | \mathcal{H}$ in quanto $\omega_1, \ldots, \omega_s \in \mathcal{E}$ (algebra di Boole!) ed $H_0 \in \mathcal{H}$ (classe additiva!), consideriamo la seguente somma di numeri reali:

$$S = \sum_1^s {}_k\, g_k\, p(\omega_k | H_0).$$

Allora si ha:

$$S = \sum_1^s {}_k \left[\sum_{\{i \,|\, \omega_k \subseteq E_i \wedge H_i\}} S_i - \sum_{\{i \,|\, \omega_k \subseteq H_i\}} S_i\, p(E_i | H_i) \right] p(\omega_k | H_0)$$

$$= \sum_1^s {}_k \sum_{\{i \,|\, \omega_k \subseteq E_i \wedge H_i\}} S_i\, p(\omega_k | H_0) -$$

$$- \sum_1^s {}_k \sum_{\{i \,|\, \omega_k \subseteq H_i\}} S_i\, p(E_i | H_i)\, p(\omega_k | H_0)$$

da cui risulta

$$S = \sum_1^n {}_i\, S_i \sum_{\{k \,|\, \omega_k \subseteq E_i \wedge H_i\}} p(\omega_k | H_0) -$$

$$- \sum_1^n {}_i\, S_i\, p(E_i | H_i) \sum_{\{k \,|\, \omega_k \subseteq H_i\}} p(\omega_k | H_0)$$

e quindi tramite la (iii):

$$S = \sum_1^n {}_i\, S_i \Big[p\Big(\bigvee_{\{k \,|\, \omega_k \subseteq E_i \wedge H_i\}} \omega_k \,\Big|\, H_0 \Big) -$$

$$- p(E_i | H_i)\, p\Big(\bigvee_{\{k \,|\, \omega_k \subseteq H_i\}} \omega_k \,\Big|\, H_0 \Big) \Big].$$

Risulta pertanto:

$$S = \sum_1^n {}_i\, S_i [p(E_i \wedge H_i | H_0) - p(E_i | H_i)\, p(H_i | H_0)]$$

(5) L'espressione trovata per le g_k è dal punto di vista interpretativo del tutto ovvia. Infatti, al verificarsi del costituente ω_k vengono annullate le scommesse relative agli eventi ipotesi H_i che, essendo negati in ω_k, non si verificano ed inoltre vengono pagati gli importi (vincite) S_i solamente in corrispondenza delle scommesse relative agli eventi subordinati $E_i | H_i$ che, aven do E_i ed H_i entrambi affermati in ω_k, si verificano.

da cui per la (iv):

$$S = \sum_1^n {}_i S_i [p(E_i \wedge H_i \mid H_0) - p(E_i \wedge H_i \mid H_0)] = 0 .$$

Osserviamo ora che per le (iii), (ii) riesce

$$\sum_1^s {}_k p(\omega_k \mid H_0) = p(\bigvee_1^s {}_k \omega_k \mid H_0) = p(H_0 \mid H_0) = 1$$

e che per la (i) risulta $p(\omega_k \mid H_0) \geqslant 0$ per ogni $k \leqslant s$. Ne segue che per almeno un h risulta $p(\omega_h \mid H_0) > 0$. Ciò premesso siano per assurdo tutte positive (negative) le determinazioni possibili $g_1, \dots, g_s$. Risulta allora $S \geqslant p(\omega_h \mid H_0)\, g_h > 0$ $(S \leqslant p(\omega_h \mid H_0)\, g_h < 0)$ da cui $S > 0$ $(S < 0)$ contraddicendo la $S = 0$.

Il teorema è così totalmente provato. ■

4. Conclusioni

Il *Principio di coerenza esteso* (2.1) si presenta, in forza del teorema (3.1), come un «rafforzamento» dell'assioma 3, introdotto da de Finetti in [4] a p. 723 (6) che permette di derivare le usuali proprietà formali delle probabilità subordinate che vengono ottenute in tutte le ben note differenti esplicazioni della nozione di probabilità (classica, frequentista, logicista).

Da un punto di vista formale ed astratto, questo principio può quindi essere inteso come un naturale *assioma tramite il quale fondare una teoria quantitativa delle probabilità subordinate definite su insiemi arbitrari, finiti o infiniti, strutturati o no, di eventi subordinati.* In questo modo, oltre ad ottenere una presentazione estremamente intuitiva della teoria, si introduce uno strumento che, analogamente al caso assoluto, permette di semplificare, e quindi di risolvere più agevolmente, numerose questioni inerenti le probabilità subordinate.

Inoltre, la teoria delle probabilità coerenti qui proposta risulta, qualora l'insieme degli eventi subordinati sia del tipo $\mathcal{E} \mid \mathcal{H}$ con $\mathcal{E}$ algebra di Boole, *contenuta,* in forza della a) del teorema (3.2), nella usuale teoria matematica quantitativa delle probabilità subordinate finitamente additive (assiomatica di Renyi). Si ha poi *coincidenza* delle due teorie, come messo in evidenza dalla b) di (3.2), ogniqualvolta l'insieme $\mathcal{H}$ degli eventi ipotesi risulti una classe additiva di eventi.

---

(6) Che richiede la non negatività e la finita additività, analogamente al caso assoluto, anche per le valutazioni di probabilità subordinata relative ad eventi subordinati ad un medesimo evento ipotesi.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. DE FINETTI, *Problemi determinati e indeterminati nel calcolo delle probabilità.* Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, vol. XII, fasc. 9, pp. 367-373 (1930).

[2] B. DE FINETTI, *Sul significato soggettivo della probabilità.* Fundamenta mathematicae, vol. 17, pp. 298-329 (1931).

[3] B. DE FINETTI, *Foresight: Its logical Laws, Its subjective Sources.* Nella raccolta: Kyburg-Smokler, *Studies in Subjective Probability,* Wiley, New York (1964) (traduzione inglese da: *La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives,* Annales de l'Institut Henri Poincaré, tome VII, fasc. I, pp. 1-68 (1937)).

[4] B. DE FINETTI, *Teoria delle probabilità. Sintesi introduttiva con appendice critica.* Einaudi editore (1970).

[5] A. KOLMOGOROV, *Grundbegriffe der Wehrscheinlichkeitsrechnung.* Berlin (1933).

[6] A. RENYI, *On a New Axiomatic Theory of Probability.* Acta Math. Hung., vol. 6, pp. 285-335 (1955).