SU UNA VALUTAZIONE ASINTOTICA DELL'ERRORE NEL CALCOLO APPROSSIMATO CON IL «τ-METHOD» (*)

G. VINCENTI (a Livorno) (**)

SOMMARIO. - *Si stabilisce una valutazione di tipo asintotico per l'errore inerente al calcolo delle soluzioni di equazioni differenziali lineari a coefficienti polinomiali con la tecnica del «τ-method». Il buon accordo dei responsi numerici con le previsioni fornite dalla detta valutazione è evidenziato da alcuni esempi significativi.*

SUMMARY. - *The author gives an asymptotic error evaluation for the solutions of linear differential equations with polinomial coefficients obtained using the «τ-method» technique. Examples are given to point out the concordance between numerical results and this kind of evaluation.*

In [1] trovasi esposto il «τ-method» (1) per il calcolo approssimato delle soluzioni di equazioni differenziali lineari ordinarie a coefficienti polinomiali. Nel medesimo lavoro è anche indicata una maggiorazione d'errore che l'applicazione del metodo comporta, maggiorazione in qualche modo legata all'integrale generale dell'equazione proposta.

In questa Nota si stabilisce, per l'errore, una valutazione di tipo asintotico indipendente da maggiorazioni a priori delle soluzioni e, ripreso nei dettagli il «τ-method» per le equazioni del 2^0 ordine, si mostra, attraverso alcuni esempi significativi, il buon accordo, già

(*) Pervenuto in Redazione il 5 maggio 1983.
(**) Indirizzo dell'Autore: Accademia Navale - 57100 Livorno.
(1) Suggerito da Lanczos (cfr. [2], pp. 173-193 e [3], pp. 464-500).

per valori non troppo alti di n, dei responsi numerici con le previsioni fornite dalla valutazione detta.

1. Sia

$$D_m(y) = \sum_{k=0}^{m} p_k(x)\, y^{(m-k)} = 0 \tag{1}$$

una equazione differenziale lineare omogenea di ordine m a coefficienti polinomiali $(p_\circ(x) \neq 0, \forall x \in [0,1])$ soddisfacenti la condizione

(i) per il grado l_k di $p_k(x)$ risulta

$$l_k \leq m - k \tag{2}$$

e tali che

(ii) per essi esiste una soluzione polinomiale dell'equazione

$$D_m(y) = x^r, \quad r \in N_\circ. \tag{3}$$

Detto

$$Q_{r+m-l}(x) \tag{4}$$

il polinomio, di grado $r + m - l$ con

$$l = \max_k (l_k + k), \tag{5}$$

che verifica la (3), dicesi $(n + 1)$-esimo τ-approssimante, sull'intervallo $[0,1]$ dell'integrale $y(x)$ della (1), individuato dalle condizioni iniziali

$$y^{(s)}(0) = y_s \quad (s = 0, 1, \dots, m - 1), \tag{6}$$

il polinomio

$$P_{\nu(n)}(x) = \sum_{h=0}^{m-1} \tau_n^{(h)} \left(\sum_{r=0}^{n} C_{n,r} Q_{r+m-l+h}(x) \right), \tag{7}$$

di grado

$$\nu(n) \leq n + 2m - l - 1, \tag{8}$$

ove $C_{n,r}$ rappresenta il coefficiente di x^r in $T_n(2x - 1)$, essendo $T_n(x)$ il polinomio di Tchebyschev di 1ª specie di ordine n e $\tau_n^{(h)}$ $(h = 0, 1, \dots, m - 1)$ m costanti per le quali risulti

$$P^{(s)}_{\nu(n)}(0) = y_s \quad (s = 0, 1, \dots, m - 1)\ [2]. \tag{9}$$

L'errore

$$\eta_n(x) = P_{\nu(n)}(x) - y(x), \quad x \in [0,1], \tag{10}$$

verifica l'equazione

(2) Per quanto fin qui esposto cfr. [1], n. 1, pp. 214-215.

$$(11) \qquad D_m(\eta_m) = T_n(2x-1) \sum_{h=0}^{m-1} \tau_n^{(h)} \cdot x^h \text{ [3]}$$

e, in virtù delle (6), (9), le condizioni iniziali

$$(12) \qquad \eta_n^{(s)} = 0 \quad (s = 0, 1, \dots, m-1).$$

Per la linearità dell'operatore D_m, la funzione (10) può in uno ed in sol modo rappresentarsi nella forma

$$(13) \qquad \eta_n(x) = \sum_{h=0}^{m-1} \eta_{n,h}(x),$$

con $\eta_{n,h}(x)$ tale che:

$$(14) \qquad D_m(\eta_{n,h}) = T_n(2x-1)\, \tau_n^{(h)} \cdot x^h.$$

Posto

$$(15) \qquad x = \cos^2 \theta/2$$

e

$$(16) \qquad \Omega_{n,h}(\theta) = \eta_{n,h}(\cos^2 \theta/2),$$

la (14), quando si convenga di riferirsi, per $\Omega_{n,h}(\theta)$, solo alla sua parte reale, può, allora, scriversi nella forma

$$(17) \qquad \sum_{k=0}^{m} A_k(\theta)\, \Omega_{n,h}^{(m-k)}(\theta) = \tau_n^{(h)} \cdot e^{in\theta} \cdot \cos^{2h} \theta/2 \text{ [4]},$$

ovvero nella

$$(18) \qquad \sum_{k=0}^{m} A_k(\theta) \left(\sum_{j=0}^{m-k} \binom{m-k}{j} \cdot (in)^j \cdot G_{n,h}^{(m-k-j)}(\theta) \right) = \cos^{2h} \theta/2,$$

quando si ponga

$$(19) \qquad \Omega_{n,h}(\theta) = \tau_n^{(h)} \cdot G_{n,h}(\theta) \cdot e^{in\theta}.$$

Trascurando nella (18), per n sufficientemente grande, tutti i termini che non contengono a fattore la potenza di n ad esponente (massimo) m, passando ai moduli, per ogni θ tale che $A_\circ(\theta) \neq 0$, assumeremo

$$(20) \qquad |G_{n,h}(\theta)| \simeq \frac{\cos^{2h} \theta/2}{|A_\circ(\theta)| \cdot n^m}.$$

Poiché, come facilmente può verificarsi, è

$$(21) \qquad A_\circ(\theta) = \frac{2^m p_\circ(\cos^2 \theta/2)}{(-\operatorname{sen} \theta)^m},$$

dalle (19), (20), (21), segue

---

(3) Cfr. [1], n. 2, pg. 216.

(4) Si ricordi che: $T_n(2x-1) = T_n(2\cos^2 \theta/2 - 1) = T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.

(22) $$\Omega_{n,h}(\theta) \simeq \frac{|\tau_n^{(h)}| \cdot \cos^{2h}\theta/2 \cdot |\operatorname{sen}\theta|^m}{(2n)^m\,|p_\circ(\cos^2\theta/2)|}, \quad \theta \in\,]0,\pi[$$

e quindi, in virtù della (15),

(23) $$|\eta_{n,h}(x)| \simeq |\tau_n^{(h)}| \cdot x^h \frac{[x(1-x)]^{\frac{m}{2}}}{n^m\,|p_\circ(x)|}, \quad x \in\,]0,1[.$$

Essendo

(24) $$\sup_{x\in]0,1[} [x(1-x)]^{\frac{m}{2}} = \frac{1}{2^m},$$

per la (13), quando n sia sufficientemente grande, risulterà, infine,

(25) $$|\eta_n(x)| < \frac{\sum_{h=0}^{m-1} |\tau_n(h)| \cdot x^h}{(2n)^m\,|p_\circ(x)|}, \quad x \in\,]0,1[.$$

2. Per il caso $m = 2$ andiamo qui ad indicare un procedimento (a nostro avviso facilmente programmabile al calcolatore) atto alla costruzione di tutti gli elementi che concorrono sia alla determinazione dei polinomi τ-approssimanti, sia alla determinazione del 2º membro della (25) (5). La (i) implica, per l'equazione (1), la forma

(26) $$D_2(y) = (a_\circ x^2 + a_1 x + a_2)\, y'' + (b_\circ x + b_1)\, y' + c_\circ y = 0$$

e la (ii) è verificata se e solo se risulta

(27) $$r(r-1)\,a_\circ + r b_\circ + c_\circ \neq 0, \quad r \in N_\circ.$$

Posto

(28) $$q_{k,r} = \begin{cases} -(k+1)\dfrac{(ka_1+b_1)\,q_{k+1,r} + (k+2)\,a_2\,q_{k+2,r}}{k(k-1)\,a_\circ + kb_\circ + c_\circ}, & k = 0,1,\dots,r-2 \\[2ex] -(k+1)\dfrac{(ka_1+b_1)\,q_{k+1,r}}{k(k-1)\,a_\circ + kb_\circ + c_\circ}, & k = r-1 \\[2ex] \dfrac{1}{k(k-1)\,a_\circ + kb_\circ + c_\circ}, & k = r, \end{cases}$$

il polinomio (4) è dato da

(29) $$Q_r(x) = \sum_{k=0}^{r} q_{k,r}\, x^k.$$

Posto, poi,

(30) $$U_n^{(r)} = \sum_{k=r}^{n} q_{r,k}\, C_{n,k} \quad (r = 0,1,\dots,n),$$

(5) Tralasciamo le facili verifiche di quanto, di volta in volta, avremo modo di affermare.

$$(31)\qquad V_n^{(o)} = \sum_{k=0}^{n} q_{o,k+1} C_{n,k}\,,\; V_n^{(r)} = \sum_{k=r}^{n+1} q_{r,k}\, c_{n,k-1}\; (r = 1,2,\dots,n+1),$$

risulta

$$(32)\qquad \tau_n^{(o)} = \frac{y_o V_n^{(1)} - y_1 V_n^{(o)}}{U_n^{(o)} V_n^{(1)} - V_n^{(o)} U_n^{(1)}}\,,\; \tau_n^{(1)} = -\frac{y_o U_n^{(1)} - y_1 U_n^{(o)}}{U_n^{(o)} V_n^{(1)} - V_n^{(o)} U_n^{(1)}}$$

e posto

$$(33)\qquad \begin{cases} p_{n,r} = \tau_n^{(o)} U_n^{(r)} + \tau_n^{(1)} V_n^{(r)} & (r = 0,1,\dots,n),\\ p_{n,n+1} = \tau_n^{(1)} V_n^{(n+1)}, & \end{cases}$$

per il polinomio (7) vale la forma

$$(34)\qquad P_{n+1}(x) = \sum_{r=0}^{n+1} p_{n,r} \cdot x^r .$$

Per quanto riguarda infine, la (25), essa si riduce ora alla

$$(35)\qquad |\eta_n(x)| < \frac{|\tau_n^{(o)}| + |\tau_n^{(1)}| \cdot x}{4n^2 |p_o(x)|}\,,\; x \in \,]0,1[\,.$$

Come primo esempio abbiamo considerato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0\\ y(o) = 0\\ y'(o) = 2 \end{cases}$$

che ha per soluzione la funzione $y(x) = sen\; 2x$.

Per $n = 9, 10, 11$, il metodo fornisce, per $y(1/2)$, valori in pieno accordo con la valutazione (35), che in tal caso è data da

$$|\eta_n(1/2)| < \frac{2|\tau_n^{(o)}| + |\tau_n^{(1)}|}{8n^2}\,,$$

come risulta dalla seguente tabella

n	9	10	11
$P_{n+1}(1/2)$	0.841470984881249	0.8414709848068342	0.8414709848077953
$\eta_n(1/2)$	$9{,}1 \cdot 10^{-11}$	$4{,}4 \cdot 10^{-12}$	$1{,}3 \cdot 10^{-13}$
ε_n	$7{,}3 \cdot 10^{-11}$	$1{,}1 \cdot 10^{-12}$	$1{,}0 \cdot 10^{-13}$

con $\varepsilon_n = | P_{n+1}(1/2 - sen\, 1 |$ [6].

(6) Ricordiamo che *sen* 1 = 0.8414709848078965066522...

Come secondo esempio abbiamo considerato poi il problema

$$\begin{cases} (2x+1)^2 y'' + 6(2x+1)y' + 4y = 0 \\ y(o) = 0 \\ y'(o) = 4 \end{cases}$$

la cui soluzione è $y(x) = \dfrac{2}{2x+1} \log(2x+1)$.

Sempre per $n = 9, 10, 11$, il metodo fornisce per $y(1/2)$, valori in pieno accordo con la valutazione (35), che in questo caso è data da

$$|\eta_n(1/2)| < \frac{2|\tau_n^{(o)}| + |\tau_n^{(1)}|}{32_n{}^2},$$

come risulta dalla tabella seguente:

n	9	10	11
$P_{n+1}(1/2)$	0.6931365641	0.6931489279	0.6931462705
$\eta_n(1/2)$	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$	$4{,}7 \cdot 10^{-6}$	$1{,}3 \cdot 10^{-6}$
ε_n	$1{,}1 \cdot 10^{-5}$	$1{,}7 \cdot 10^{-6}$	$0{,}9 \cdot 10^{-6}$

con $\varepsilon_n = |P_{n+1}(1/2) - \log 2|$ (7).

BIBLIOGRAFIA

[1] S. GUERRA, *Sul calcolo approssimato di particolari funzioni ipergeometriche confluenti con la tecnica del «τ-method»*, Calcolo vol. 6, fasc. 2 (aprile-giugno 1969), 213-223.

[2] C. LANCZOS, *Trigonometric interpolation of empiricol and analytical functions*, Journal of Mathematics and Physics, vol. XVII (1938), 123-199.

[3] C. LANCZOS, *Applied Analysis*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. (1956).

(7) Ricordiamo che $\log 2 = 0.6931471806\ldots$