SULLE FORMULE DI QUADRATURA ESATTE PER POLINOMI ALGEBRICI (*)

di SERGIO GUERRA (a Livorno) (**)

SOMMARIO. - *Si delinea una teoria generale delle formule di quadratura esatte per polinomi algebrici. Al fine di una loro possibile classificazione si introduce la nozione di rango, si stabilisce un criterio per la determinazione del relativo grado di precisione, un criterio atto a decidere del segno del nucleo di Peano e, infine, un criterio generale di convergenza.*

SUMMARY. - *A general theory of quadrature formulae which are exact for algebraic polynomials is outlined. In order to classify them the notion of rank is introduced; criteria for the determination of the related degree of precision and the signum of Peano's kernel and, also, a general convergence theoreem are stated.*

1. Sulla costruzione di formule di quadratura esatte per polinomi algebrici

Sia I un intervallo della retta reale, $w(x)$ un peso su I (1) ed $f(x)$ una funzione definita su I e tale che il prodotto $w(x) \cdot f(x)$ sia su I integrabile secondo Lebesgue.

Assegnati su I p gruppi di punti *(nodi)* tutti tra loro distinti

$$(1.1) \qquad \{x_j^{(i)};\ j = 1,2,\dots,n_i\} \quad (i = 1,2,\dots,p)$$

(*) Pervenuto in Redazione il 5 maggio 1983.

(**) Indirizzo dell'Autore: Accademia Navale - 57100 Livorno.

(1) Cioè una funzione non negativa su I e ivi integrabile secondo Lebesgue con integrale positivo.
Se I non è limitato supporremo, altresì, che, per ogni intero positivo k, sia su I integrabile secondo Lebesgue il prodotto $w(x) \cdot x^k$.

e p interi positivi *(molteplicità dei nodi)*

(1.2) $\quad s_i \; (i = 1, 2, \ldots, p),$

supponendo che, se

(1.3) $\quad s = \max_i s_i$

è maggiore di 1, $f(x)$ sia dotata su I di derivata $(s-1)$-esima, diremo *formula di quadratura relativa ai nodi* (1.1) *ed alle molteplicità* (1.2) ogni uguaglianza del tipo

(1.4) $$\int_I w(x) f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{p} \sum_{h=0}^{s_i-1} \sum_{j=1}^{n_i} A_{hj}^{(i)} f^{(h)} (x_j^{(i)}) + R(f)$$

per la quale siano rispettate le due condizioni seguenti:

1) I *coefficienti* $A_{hj}^{(i)}$ sono indipendenti da $f(x)$,

2) il *resto* $R(f)$ si annulla se $f(x)$ è un polinomio algebrico di grado minore o uguale a

(1.5) $$g^* = \sum_{i=1}^{p} s_i n_i - 1 .$$

L'intero

(1.6) $\quad g \geq g^*,$

tale che $R(f) = 0$ se e solo se $f(x)$ è un polinomio algebrico di grado non superiore a g, dicesi *grado di precisione* della formula (1.4). La definizione assunta è giustificata dal seguente

TEOREMA 1.1. *Scelti comunque gli* $n_1 + n_2 + \ldots + n_p$ *nodi* (1.1) *e le rispettive molteplicità* (1.2), *esiste una ed una sola formula del tipo* (1.4) *per la quale siano rispettate le condizioni* 1) *e* 2).

Posto

(1.7) $$P_{n_i}(x) = \prod_{j=1}^{n_i} (x - x_j^{(i)}) \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

verifichiamo preliminarmente che i $g^* + 1$ polinomi

(1.8) $$l_{\nu j}^{(i)}(x) = \frac{\prod_{k=1}^{p} P_{n_k}^{s_k}(x)}{(x - x_j^{(i)})^{s_i - \nu}} \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, p \\ j = 1, 2, \ldots, n_i \end{matrix} \; ; \; \nu = 0, 1, \ldots, s_i - 1 \right)$$

sono tra loro linearmente indipendenti.

Sia, infatti,

(1.9) $$L(x) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=0}^{s_i-1} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{\nu j}^{(i)} l_{\nu j}^{(i)}(x)$$

una loro combinazione lineare. Poiché, come subito può constatarsi, fissato comunque i, per ogni j, è

$$(1.10)\qquad \left[\frac{d^h}{dx^h} l_{\nu j}^{(i)}(x) \right]_{x_j^{(i)}} \begin{cases} = 0 \ , & 0 \leq h \leq \nu - 1 \\ \neq 0 \ , & h = \nu \end{cases} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, s_i - 1),$$

se la (1.9) è identicamente nulla, sempre comunque sia fissato i, qualunque sia j, risulta

$$(1.11)\qquad \left[\frac{d^\nu}{dx^\nu} L(x) \right]_{x_j^{(i)}} = \lambda_{\nu j}^{(i)} \left[\frac{d^\nu}{dx^\nu} l_{\nu j}^{(i)}(x) \right]_{x_j^{(i)}} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, s_i - 1),$$

dalla quale, ancora a motivo della (1.10), segue

$$(1.12)\qquad \lambda_{\nu j}^{(i)} = 0$$

per tutti i valori degli indici i, j, ν.

Essendo il polinomio $L(x)$ di grado g^* non appena sia $\lambda_{s_i - 1, j}^{(i)} \neq 0$ per almeno un valore di uno dei due indici i, j, da quanto ora dimostrato discende che ogni polinomio algebrico in x, di grado $\leq g^*$, può pensarsi come combinazione lineare dei polinomi (1.8).

Premesso ciò, dimostrare il teorema equivale, allora, a dimostrare che, fissato i, e conseguentemente j, il sistema lineare

$$(1.13)\qquad \sum_{h=0}^{s_i - 1} A_{hj}^{(i)} \left[\frac{d^h}{dx^h} l_{\nu j}^{(i)}(x) \right]_{x_j^{(i)}} = \int_I w(x)\, l_{\nu j}^{(i)}(x) dx \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, s_i - 1),$$

che, per la (1.10), può scriversi nella forma triangolare superiore

$$(1.14)\qquad \sum_{h=\nu}^{s_i - 1} A_{hj}^{(i)} \left[\frac{d^h}{dx^h} l_{\nu j}^{(i)}(x) \right]_{x_j^{(i)}} = \int_I w(x)\, l_{\nu j}^{(i)}(x) dx \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, s_i - 1),$$

di s_i equazioni nelle s_i incognite $A_{hj}^{(i)}$, è univocamente risolubile.

Ma ciò segue subito osservando che, in virtù della (1.10), il determinante

$$(1.15)\qquad \prod_{\nu=0}^{s_i - 1} \left[\frac{d^\nu}{dx^\nu} l_{\nu j}^{(i)}(x) \right]_{x_j^{(i)}}$$

del sistema (1.14) è diverso da zero.

Le formule del tipo (1.4) possono classificarsi a secondo del numero *(rango)* $q (\leq p)$ delle molteplicità dei nodi tra loro distinte. E' ovvio che, se è $q < p$, raggruppando tra loro i nodi (1.1) aventi la stessa molteplicità, la (1.4) può scriversi nella forma equivalente

$$(1.16)\qquad \int_I w(x)\, f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{q} \sum_{h=0}^{s_i-1} \sum_{j=1}^{n_i} A_{hj}^{(i)} f^{(h)} (x_j^{(i)}) + R(f).$$

2. Sui coefficienti

Osservazione 1. E' immediato osservare che, nel calcolo dei coefficienti della formula (1.4), è ininfluente il sostituire ai polinomi (1.7) i polinomi $a_{n_i} P_{n_i}(x)$ $(i = 1, 2, \dots, p)$ con a_{n_i} costante non nulla per il resto arbitraria.

Osservazione 2. Valendo per il grado di precisione della formula (1.4) la disuguaglianza (1.6), i coefficienti della formula medesima verificano anche il sistema lineare di $g^* + 1$ incognite nelle $g^* + 1$ equazioni che si ottengono imponendo successivamente le condizioni

$$(2.1)\qquad R(1) = 0,\ R(x) = 0, \dots, R(x^{g^*}) = 0.$$

Osservazione 3. In virtù delle (1.6) e (1.10), l'applicazione della formula (1.4) al polinomio

$$(2.2)\qquad L^*(x) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=0}^{s_i-1} \sum_{j=1}^{n_i} l_{\nu j}^{(i)} (x) \left\{ \left[\frac{d^\nu}{dx^\nu} l_{\nu j}^{(i)} (x) \right]_{x_j^{(i)}} \right\}^{-1}$$

conduce all'uguaglianza

$$(2.3)\qquad \sum_{i=1}^{p} \sum_{h=0}^{s_i-1} \sum_{j=1}^{n_i} A_{hj}^{(i)} = \int_I w(x)\, L^*(x)\, dx\,.$$

Osservazione 4. Se I è simmetrico rispetto all'origine, $w(x)$ una funzione pari ed è

$$(2.4)\qquad x_j^{(i)} = - x_{n_i-j+1}^{(i)} \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, n_i \end{matrix} \right),$$

risulta

$$(2.5)\qquad (-1)^h A_{h,\, n_i-j+1}^{(i)} = A_{hj}^{(i)} \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, n_i \end{matrix} ;\ h = 0, 1, \dots, s_i - 1 \right).$$

Dalla (2.4), per ogni i, segue, infatti,

$$(2.6)\qquad P_{n_i} (-x) = (-1)^{n_i} P_{n_i} (x)$$

e quindi

$$(2.7)\qquad l_{\nu j}^{(i)} (-x) = (-1)^{g^*+1-s_i+\nu} \frac{\prod_{k=1}^{p} P_{n_k}^{s_k} (x)}{(x + x_j^{(i)})^{s_i-\nu}} =$$

$$= (-1)^{g^*+1-s_i+\nu}\, l_{\nu,\, n_i-j+1}^{(i)} (x)$$

per tutti i valori degli indici i, j, ν.

Essendo, inoltre, per le ipotesi e per la (2.7),

$$\int_I w(x)\, l^{(i)}_{\nu j}(x)\, dx = (-1)^{g^*+1-s_i+\nu} \int_I w(x)\, l^{(i)}_{\nu,\, n_i-j+1}(x) dx, \tag{2.8}$$

il sistema (1.14), corrispondente al valore $n_i - j + 1$ per l'indice j, assume, pertanto, la forma

$$\sum_{h=\nu}^{s_i-1} (-1)^h A^{(i)}_{h,\, n_i-j+1} \left[\frac{d^h}{dx^h} l^{(i)}_{\nu j}(x) \right]_{x^{(i)}_j} = \int_I w(x)\, l^{(i)}_{\nu j}(x)\, dx \tag{2.9}$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, s_i - 1).$$

Dal confronto di (2.9 con (1.14), essendo quest'ultimo univocamente risolubile, segue allora la (2.5).

3. Sul grado di precisione

Alla determinazione del grado di precisione della formula (1.4), per il quale, comunque siano assegnati i nodi (1.1) e le rispettive molteplicità (1.2), vale la disuguaglianza (1.6), può rivelarsi utile il seguente

TEOREMA 3.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché, per il grado di precisione g della formula* (1.4), *sia verificata la disuguaglianza*

$$g \geqq g^* + m + 1, \tag{3.1}$$

con m intero non negativo, è che risulti

$$\int_I w(x) \cdot \prod_{i=1}^{p} P^{s_i}_{n_i}(x) \cdot x^k\, dx = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, m). \tag{3.2}$$

Per la dimostrazione basta osservare che, se $u(x)$ è un qualsivoglia polinomio algebrico di grado $\tilde{g}$ tale che

$$g^* \leqq \tilde{g} \leqq g^* + m + 1, \tag{3.3}$$

risulta

$$u(x) = \prod_{i=1}^{p} P^{s_i}_{n_i}(x) \cdot q_m(x) + r(x), \tag{3.4}$$

con $q_m(x)$ ed $r(x)$ polinomi opportuni, il primo di grado non superiore ad m, il secondo di grado non superiore a g^* e che, essendo inoltre

$$\left[\frac{d^h}{dx^h} \left(\prod_{i=1}^{p} P^{s_i}_{n_i}(x) \cdot q_m(x) \right) \right]_{x^{(i)}_j} = 0 \tag{3.5}$$

$$\left(\begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, p \\ j = 1, 2, \ldots, n_i \end{matrix} ;\ h = 0, 1, \ldots, s_i - 1 \right),$$

l'applicazione al polinomio $u(x)$ della formula (1.4), per la quale, valendo la 2), è $R(r) = 0$, conduce all'uguaglianza

$$(3.6) \qquad R(u) = \int_I w(x) \cdot \prod_{i=1}^{p} P_{n_i}^{s_i}(x) \cdot q_m(x)\, dx .$$

Dal teorema 3.1 seguono subito i corollari seguenti:

COROLLARIO 3.1 I. *Se non esiste alcun intero non negativo m per il quale la* (3.2) *sia verificata* (1), *allora risulta*

$$(3.7) \qquad g = g^* .$$

COROLLARIO 3.1 II. *Se la* (3.2) *è verificata per l'intero non negativo m ma non per $m+1$, allora risulta*

$$(3.8) \qquad g = g^* + m + 1 .$$

Osservazione I. Se I è simmetrico rispetto all'origine, $w(x)$ è una funzione pari e, per ogni i, vale la (2.4), risulta

$$(3.9) \qquad g \geqq g^* + 1 ,$$

tutte le volte che l'intero g^* è pari (2).

Essendo, per la (2.6),

$$(3.10) \qquad w(-x) \cdot \prod_{i=1}^{p} P_{n_i}^{s_i}(-x) = (-1)^{g^*+1} w(x) \cdot \prod_{i=1}^{p} P_{n_i}^{s_i}(x),$$

la (3.2) riesce, infatti, verificata per $m = 0$.

Osservazione II. Le molteplicità dei nodi non siano interi tutti pari. Supponendo, com'è lecito, che le prime λ molteplicità siano pari (in particolare $\lambda = 0$) e le rimanenti dispari, la funzione

$$(3.11) \qquad \tilde{w}(x) = w(x) \cdot \prod_{i=1}^{\lambda} P_{n_i}^{s_i}(x)$$

è un peso su I e la (3.2) assume la forma

$$(3.12) \qquad \int_I \tilde{w}(x) \cdot \prod_{i=\lambda+1}^{p} P_{n_i}^{s_i}(x)\, x^k\, dx = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, m).$$

---

(1) Ciò che, ad esempio, accade quando le molteplicità dei nodi sono interi tutti pari. Infatti, essendo, in tal caso, $w(x) \prod_{i=1}^{p} P_{n_i}^{s_i}(x)$ un peso su I, la (3.2) non è verificata per $k = 0$.

(2) Valendo la (2.4), g^* è pari se e solo se uno degli interi n_i è dispari (se n_{i_1} è dispari, la (2.4) implica $x_{(n_{i_1}+1)/2} = 0$ e, pertanto, essendo i nodi della (1.4) tutti distinti, non può esistere $i_2 \neq i_1$ per il quale anche n_{i_2} risulti dispari) insieme alla rispettiva molteplicità s_i.

Risulta, allora,

$$(3.13)\qquad m \leq \prod_{i=\lambda+1}^{p} n_i - 1\ ^{(1)},$$

valendo l'uguaglianza per particolari scelte dei nodi aventi molteplicità dispari (2).

4. Sul nucleo di Peano

Sia

$$(4.1)\qquad K(t) = \frac{R([(x-t)_+]^g)}{g!}$$

il nucleo di Peano della (1.4), essendo g il relativo grado di precisione e $(x-t)_+$ la funzione così definita

$$(4.2)\qquad (x-t)_+ = \begin{cases} x-t \;, & x \geqslant t \\ 0 \;, & x < t \end{cases}$$

Posto

$$(4.3)\qquad n = \sum_{i=1}^{p} n_i ,$$

detti a e b $(a < b)$ (3) gli estremi dell'intervallo I e detti α e β, rispettivamente il minore e il maggiore dei nodi della formula, dimostriamo che:

Teorema 4.1. *Se per l'intero g risulta verificata la disuguaglianza*

$$(4.4)\qquad g > 2(n-1) - \rho ,$$

con

$$(4.5)\qquad \rho = \begin{cases} 0, \text{ se } a < \alpha \text{ e } \beta < b \\ 1, \text{ se } a = \alpha \text{ o } \beta = b, \\ 2, \text{ se } a = \alpha \text{ e } \beta = b \end{cases}$$

la funzione (4.1) *ha segno costante su I.*

Come facilmente si osserva, la funzione $K(t)$ è continua su I con tutte le sue derivate fino a quella di ordine $g-1$; $K^{(g-1)}(t)$ è

---

(1) Per $m = \sum_{i=\lambda+1}^{p} n_i$ è $\int_I \overline{w}(x) \prod_{i=\lambda+1}^{p} P_{n_i}^{s_i+1}(x)\, dx > 0$.

(2) Formule gaussiane di rango 1, a nodi semplici (cfr., ad esempio, [1], cap. 7) o a nodi multipli (cfr., ad esempio, [2]) e formule gaussiane di rango > 1 (cfr. [3]), per $\lambda = 0$.
Per $\lambda > 0$, cfr. [1], cap.. 9, [4], n. 4.

(3) Eventualmente $a = -\infty$, $b = +\infty$.

poi derivabile così come $K^{(g)}(t)$ su ogni intervallo aperto

$$I_l \ (l = 1, 2, \dots, n-1)$$

avente per estremi due nodi consecutivi della formula e risulta

$$K^{(g+1)}(t) = (-1)^{g+1}. \tag{4.6}$$

Le funzioni

$$K^{(r)}(t) = \frac{(-1)^r}{(g-r)!} R([(x-t)_+]^{g-r}) \quad (r = 0, 1, \dots, g-1) \tag{4.7}$$

si annullano tutte agli estremi dell'intervallo di integrazione. Infatti, se a è finito, essendo, per ogni $x \in I$, $[(x-a)_+]^{g-r} = (x-a)^{g-r}$, risulta $R([(x-a)_+]^{g-r}) = 0$; se $a = -\infty$, essendo, per ogni $x \in I$, $\lim_{t\to-\infty} [(x-t)_+]^{g-r} = \lim_{t\to-\infty} (x-t)^{g-r}$, risulta $\lim_{t\to-\infty} R([(x-t)_+]^{g-r}) = 0$; se b è finito, essendo, per ogni $x \in I$, $[(x-b)_+]^{g-r} = 0$, risulta $R([(x-b)_+]^{g-r}) = 0$; infine, se $b = +\infty$, essendo, per ogni $x \in I$, $\lim_{t\to+\infty} [(x-t)_+]^{g-r} = 0$, risulta $\lim_{t\to+\infty} R([(x-t)_+]^{g-r}) = 0$.

$K^{(g-1)}(t)$ si annulla al più due volte sulla chiusura di ciascun I_l, perché, se $K^{(g-1)}(t)$ si annullasse almeno tre volte sulla chiusura di ciascun I_l, $K^{(g)}(t)$ si annullerebbe almeno due volte su ciascun I_l, ciò che è assurdo in quanto, in virtù della (4.6), $K^{(g)}(t)$ risulta monotona su ciascun I_l Pertanto, $K^{(g-1)}(t)$ si annulla $2(n-1)$ volte al più su $[\alpha, \beta]$.

Sia $a < \alpha$ e $\beta < b$ ($\rho = 0$).

Per $a < t < \alpha$, essendo

$$\begin{aligned} K^{(g-1)}(t) &= (-1)^{g-1} \cdot \Big\{ \int_I w(x)\,(x-t)_+\,dx - \\ &- \sum_{i=1}^{p} \sum_{h=0}^{s_i-1} \sum_{j=1}^{n_i} A_{hj}^{(i)} \Big[\frac{d^h}{dx^h}(x-t) \Big]_{x_j^{(i)}} \Big\} = \\ &= (-1)^{g-1} \Big\{ \int_I w(x)\,(x-t)_+\,dx - \int_I w(x)\,(x-t)\,dx \Big\} = \\ &= (-1)^{g+1} \int_a^t w(x)\,(t-x)\,dx, \end{aligned} \tag{4.8}$$

risulta

$$(-1)^{g-1} K^{(g-1)}(t) > 0. \tag{4.9}$$

Per $\beta < t < b$, essendo

$$\begin{aligned} K^{(g-1)}(t) &= (-1)^{g-1} \int_I w(x)\,(x-t)_+\,dx = \\ &= (-1)^{g-1} \int_t^b w(x)\,(x-t)\,dx, \end{aligned} \tag{4.10}$$

risulta ancora valida la (4.9), per cui $K^{(g-1)}(t)$ si annulla, allora, $2(n-1)$ volte al più internamente ad I.

Sia $a = \alpha$ e $\beta < b$ ($\rho = 1$).

In virtù della (4.9), valida per $\beta < t < b$, $K^{(g-1)}(t)$ si annulla $2(n-1)-1$ volte al più internamente ad I.

Sia $a < \alpha$ e $\beta = b$ $(\rho = 1)$.

In virtù della (4.9), valida per $a < t < \alpha$, $K^{(g-1)}(t)$ si annulla $2(n-1)-1$ volte al più internamente ad I.

Sia, infine, $a = \alpha$ e $\beta = b$ $(\rho = 2)$.

$K^{(g-1)}(t)$ si annulla $2(n-1)-2$ volte al più internamente ad I.

Premesso ciò, se la (4.4) è verificata, $K(t)$ non può annullarsi internamente ad I; infatti, ove ciò accadesse, internamente ad I, $K'(t)$ si annullerebbe almeno due volte, $K''(t)$ si annullerebbe almeno tre volte, $\ldots, K^{(g-1)}(t)$ si annullerebbe almeno g volte; il che è assurdo.

Osservazione. Valendo la (4.4), quando sia $\beta < b$, del nucleo di Peano relativo alla (1.4) può, su I, precisarsi anche il segno: non negativo. Per $\beta < t < b$ è, infatti,

$$(4.11) \qquad K(t) = \frac{1}{g!}\int_I w(x)\,[(x-t)_+]^g\,dx = \frac{1}{g!}\int_t^b w(x)\,(x-t)^g\,dx \text{ (1)}.$$

5. Sul resto

Sia g il grado di precisione della formula (1.4) e $K(t)$ il relativo nucleo di Peano.

Vale il seguente

TEOREMA 5.1. *Se la funzione $f(x)$ è dotata su I di derivata g-esima assolutamente continua* (2), *risulta*

$$(5.1) \qquad R(f) = \int_I f^{(g+1)}(t) \cdot K(t)\,dt\,.$$

Detto c un qualunque numero di I non maggiore del minore tra i nodi della formula, per ogni $x \in I$, vale l'uguaglianza (3).

$$(5.2) \qquad f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1\,!}(x-c) + \ldots + \frac{f^{(g)}(c)}{g!}(x-c)^g +$$

(1) Per le formule gaussiane di rango 1 o di rango > 1 (cfr. nota (2) a pie' di pag. 34 - caso $\lambda = 0$) la condizione (4.4) è verificata e risulta $\beta < b$. I relativi nuclei di Peano sono, pertanto, di segno non negativo su I.

(2) In questa ipotesi $f^{(g+1)}(x)$ esiste quasi ovunque su I ed è ivi integrabile secondo Lebesgue.

(3) Formula di Taylor con il resto sotto forma integrale.

$$+\frac{1}{g!}\int_c^x f^{(g+1)}(t)\,(x-t)^g\,dt\,.$$

Indicato con a il primo estremo di I [1], essendo

$$\lim_{c\to a} R\big((x-c)^k\big) = R\big(\lim_{c\to a}(x-c)^k\big) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, g), \tag{5.3}$$

risulta, allora,

$$R(f) = \frac{1}{g!} R\big(\int_a^x f^{(g+1)}(t)\,(x-t)^g\,dt\big), \tag{5.4}$$

ovvero, per la posizione (4.2),

$$R(f) = \frac{1}{g!} R\big(\int_I f^{(g+1)}(t)\,[(x-t)_+]^g\,dt\big). \tag{5.5}$$

Poiché

$$\begin{aligned} R\big(\int_I f^{(g+1)}(t)\,[(x-t)_+]^g\,dt\big) &= \\ &= \int_I w(x)\,\big(\int_I f^{(g+1)}(t)\,[(x-t)_+]^g\,dt\big)\,dx - \\ &- \sum_{i=1}^{p}\sum_{h=0}^{s_i-1}\sum_{j=1}^{n_i} A_{hj}^{(i)} \int_I f^{(g+1)}(t) \left[\frac{d^h}{dx^h}[(x-t)_+]^g\right]_{x_j^{(i)}} dt = \\ &= \int_I f^{(g+1)}(t)\,\big(\int_I w(x)\,[(x-t)_+]^g\,dx - \\ &- \sum_{i=1}^{p}\sum_{h=0}^{s_i-1}\sum_{j=1}^{n_i} A_{hj}^{(i)} \left[\frac{d^h}{dx^h}[(x-t)_+]^g\right]_{x_j^{(i)}}\big)dt, \end{aligned} \tag{5.6}$$

segue, infine, la tesi.

Osservazione. La funzione $K(t)$ sia di segno costante su I. In questa ipotesi, se $f^{(g+1)}(x)$ è limitata su I, posto

$$M_{g+1} = \sup_{x\in I} |f^{(g+1)}(x)|, \tag{5.7}$$

dalla (5.1) segue

$$|R(f)| \leq M_{g+1} \cdot |\int_I K(t)\,dt|. \tag{5.8}$$

Se, poi, $f^{(g+1)}(x)$ è continua su I, per il teorema della media generalizzato, dalla (5.1) segue

$$R(f) = f^{(g+1)}(\xi) \cdot \int_I K(t)\,dt, \tag{5.9}$$

con ξ opportuno, interno ad I.

---

(1) Eventualmente $a = -\infty$.

6. Sulla convergenza dei procedimenti di quadratura

Supponendo limitato l'intervallo d'integrazione, sia

$$(6.1)\qquad \int_I w(x)\, f(x)\, dx = Q_m(f) + R(f),$$

con

$$(6.2)\qquad Q_m(f) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{h=0}^{s_i-1} \sum_{j=1}^{n_i(m)} A_{hj}^{(i)}(m)\, f^{(h)}(x_j^{(i)}(m)),$$

una successione di formule di quadratura del tipo (1.4) con la condizione che, posto

$$(6.3)\qquad g^*(m) = \sum_{i=1}^{p} s_i n_i(m) - 1,$$

risulti

$$(6.4)\qquad \lim_{m\to+\infty} g^*(m) = +\infty .$$

Indicato con $C^{(s-1)}(I)$ lo spazio di Banach (1) delle funzioni continue su I insieme a tutte le loro derivate fino a quella di ordine $s-1$, essendo s l'intero definito in (1.3), dimostriamo il seguente

TEOREMA 6.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché risulti*

$$(6.5)\qquad \lim_{m\to+\infty} R(f) = 0 \ , \ \forall f \in C^{(s-1)}(I)$$

è che esista una costante M tale che

$$(6.6)\qquad \sum_{i=1}^{p} \sum_{h=0}^{s_i-1} \sum_{j=1}^{n_i(m)} |A_{hj}^{(i)}(m)| < M \ (\forall\, m \in N).$$

$Q_m(f)$ e l'integrale primo membro della (6.1) sono su $C^{(s-1)}(I)$ due funzionali lineari. $Q_m(f)$ converge all'integrale detto nell'insieme di tutti i polinomi che è denso in $C^{(s-1)}(I)$. Infine, in virtù della (6.6), $Q_m(f)$ ha norma

$$(6.7)\qquad \|Q_m(f)\| = \sup_{\|f\|_{C^{(s-1)}(I)}=1} \left|\sum_{i=1}^{p} \sum_{h=0}^{s_i-1} \sum_{j=1}^{n_i(m)} A_{hj}^{(i)}(m)\, f^{(h)}(x_j^{(i)}(m))\right|$$

limitata per ogni m.

Per un noto teorema (2) segue, allora, la tesi.

---

(1) Con la norma $\|f\|_{C^{(s-1)}(I)} = \sum_{h=0}^{s-1} \max_{x\in I} |f^{(h)}(x)|$.

(2) Cfr., ad esempio, [1], pag. 61, théorem 1.

Osservazione. Se, per ogni m, i coefficienti $A_{hj}^{(i)}(m)$ della (6.1) sono tutti positivi, in virtù della (2.3), l'ipotesi (6.6) può sostituirsi con la

$$(6.8) \qquad \int_I w(x) \cdot L^*(m\,;x)\,dx < M \qquad (\forall\ m \in N),$$

con ovvio significato per il simbolo $L^*(m\,;x)$.

COROLLARIO 6.1. *Supponendo $s = 1$, se i coefficienti $A_{oj}^{(i)}(m)$ della (6.1) sono, per ogni m, tutti positivi, allora risulta*

$$(6.9) \qquad \lim_{m\to+\infty} R(f) = 0\ ,\ \forall\ f \in C^{(o)}(I).$$

E', infatti,

$$(6.10) \quad R(1) = \int_I w(x)\,dx - \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i(m)} A_{oj}^{(i)}(m) = 0$$

e l'ipotesi (6.6) è, per $s = 1$, verificata ovviamente.

BIBLIOGRAFIA

[1] KRYLOV V. J., *Approximate calculation of integrals,* Macmillian, New York 1962.

[2] OSSICINI A., *Costruzione di formule di quadratura di tipo Gaussiano,* Ann. di Matem. pura ed appl. (IV), vol. LXXII, 1966.

[3] GHIZZETTI A., OSSICINI A., *Sull'esistenza e unicità delle formule di quadratura gaussiane,* Rend. di Matem. (1), Vol. 8, Serie VI, 1975.

[4] BELLEN A., GUERRA S., *Su alcune possibili estensioni delle formule di quadratura gaussiane,* Calcolo, vol. XIX, fasc. I, 1982.