UN'ASSIOMATICA PER LA RELAZIONE «FRA» (*)

di Maurizio Trombetta (a Trieste) (**)

Sommario. - *Come estensione di un risultato di Wanda Szmielew riguardante relazioni d'ordine totale, si assegna un sistema di assiomi per la relazione ternaria «fra» da cui si deduce un ordinamento (parziale) nel quale la data relazione ternaria ha il significato usuale.*

Summary. - *As an extension of a result of Wanda Szmielew concerning total order relations, we give here a system of axioms for the betweennes relation, whence a (partial) order is deduced, where the given ternary relation has the usual meaning.*

1 - Introduzione

Data, in un insieme E, una relazione d'ordine (parziale), questa induce naturalmente in E una relazione ternaria di *fra*, definita da: $B(bac) \Leftrightarrow (b \leq a \leq c) \vee (c \leq a \leq b)$ e da leggersi *«a è compreso fra b e c»*.

Il problema che ho affrontato è quello di dare una definizione assiomatica della relazione di *fra (betweennes relation)* in modo che:

a) vi soddisfino tutte e sole le relazioni ternarie che provengono, nel senso sopra detto, da relazioni d'ordine;

b) permetta di risalire all'ordinamento, o meglio, ai due ordinamenti, tra loro opposti, che l'hanno generata.

(*) Pervenuto in Redazione il 22 novembre 1982.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica Applicata dell'Università degli Studi - Piazzale Europa, 1 - 34100 Trieste.

Un tale ordine di problemi è stato affrontato da vari AA. (Altwegg, 1950; Sholander, 1952) con risultati soltanto parziali; da ultimo è stato risolto in modo soddisfacente da W. Szmielew [1] nel 1977 ma limitatamente al caso delle relazioni *fra* dedotte da relazioni d'ordine totale.

In questa nota, comincio col dare (n. 2) un sistema di assiomi per la relazione *fra* e ne dimostro l'indipendenza. Chiarisco (n. 3) il concetto di *insieme connesso* rispetto a una tale relazione e definisco (n. 4) per questi insiemi una relazione d'ordine che la genera. Provo altresì che tale ordinamento e il suo opposto sono i soli rispondenti al problema. Infine, constato che, per le relazioni *fra* legate a ordinamenti totali, il mio sistema di assiomi si riduce a uno equivalente a quello introdotto dalla Szmielew.

2 - Definizione assiomatica della relazione «fra»

DEFINIZIONE 1. Diremo che in un insieme non vuoto E è definita una relazione *fra (betweennes relation)* o, brevemente, una *b*-relazione, B, se in E è assegnata una relazione ternaria $B(bac)$ che soddisfi agli assiomi A1, ..., A6 sotto riportati. Se è $B(bac)$, diremo che *a è compreso fra b e c.*

DEFINIZIONE 2. Se è $B(aab)$, diremo che a è *confrontabile* con b. Se, per una terna di elementi *distinti* (b, a, c) risulta $B(bac)$, diremo che tale terna è *allineata* e che a è il suo *centro.*

DEFINIZIONE 3. Dati n elementi *distinti* $a_1, a_2 \dots a_n$, con $n > 2$, diremo che essi formano un *ciclo* di *ordine n*, se, per ogni coppia di elementi *consecutivi* (a_k, a_{k+1}), si ha $B(a_k a_k a_{k+1})$ [2].

Gli assiomi richiesti a una *b*-relazione sono i seguenti [3]:

A1. $B(aaa)$.

A2. $B(bac) \Rightarrow B(cab)$.

A3. $B(bac) \Rightarrow (B(aac) \wedge B(bbc))$.

A4. $(B(bac) \wedge B(abc)) \Rightarrow (a = b)$.

A5. $(B(bac) \wedge B(dda)) \Rightarrow (B(dac) \vee B(dab))$.

A6. *(Assioma di coerenza). In un ciclo di ordine dispari, è dispari anche il numero delle terne allineate di elementi consecutivi.*

DEFINIZIONE 4. Data, su un insieme E, una relazione d'ordine (parziale) σ, diremo *relazione di «fra» naturalmente dedotta* o *gene-*

(1) *Oriented and nonoriented linear orders* - Bull. Acad. Polon., Série des Sciences math., astr., phys., Vol. XXV n. 7 (1977), pp. 659-665.

(2) Gli indici degli elementi di un ciclo saranno sempre pensati in un ordine circolare. $(a_{n+1} = a_1)$.

(3) Omettiamo, per brevità, i quantificatori.

rata da σ la relazione $B = \beta(\sigma)$ definita da

$$B(bac) \Leftrightarrow ((b \leq a \leq c) \vee (c \leq a \leq b)).$$

PROPOSIZIONE 1. *Due elementi* $x, y \in E$ *sono confrontabili in* $\beta(\sigma)$ *se e solo se lo sono in* σ.

TEOREMA 2. *Per ogni relazione d'ordine* σ, *la* $\beta(\sigma)$ *è una relazione di «fra» nel senso della* Def. 1 (4).

Dim. La $\beta(\sigma)$ soddisfa banalmente ai primi cinque assiomi; mostriamo che soddisfa anche all'ultimo. Supponiamo dunque che gli elementi $a_1, \ldots, a_n$ formino un ciclo. Per ogni k, si ha $a_k \leq a_{k+1}$ o $a_{k+1} \leq a_k$. Nel primo caso, diremo che la coppia (a_k, a_{k+1}) è positiva; nel secondo, che è negativa. E' evidente che esistono coppie di ciascuno dei due tipi. Diremo inoltre, che il vertice a_k è positivo, negativo o nullo a seconda che le coppie (a_{k-1}, a_k) e (a_k, a_{k+1}) sono entrambe positive, entrambe negative o di segno opposto. Ora, i vertici nulli di un ciclo, che esprimono un cambiamento di segno, devono essere necessariamente in numero pari (> 0). D'altra parte, i vertici che sono centri di terne allineate di elementi consecutivi sono tutti e soli quelli non nulli. Avendo il numero di tali vertici la stessa parità di n, si ha immediatamente la tesi.

c. v. d.

COROLLARIO 2'. *Il sistema di assiomi assunto nella* Def. 1 *è non contraddittorio.*

Data una relazione d'ordine σ, indicheremo sempre con σ^* l'ordinamento ad essa opposto.

Si ha ovviamente:

PROPOSIZIONE 3. *Per ogni ordinamento* σ, *è* $\beta(\sigma) = \beta(\sigma^*)$.

TEOREMA 4. *Se E consta di almeno quattro elementi, gli assiomi* A1, ..., A6 *sono indipendenti.*

Dim. Diamo, di seguito, 6 esempi di relazioni ternarie, ciascuna

---

(4) In particolare, la relazione $\beta(\sigma)$ è quella vuota (i.e. $B(xyz) \Rightarrow (x=y=z)$) se e solo se è tale anche l'ordinamento σ (i.e. $(x \leq y) \Rightarrow (x=y)$). Un tale fatto risulterebbe certamente falso se considerassimo relazioni di *fra* in *forma forte*, cioè definita solo per terne di elementi *distinti*. Lo si vede dai seguenti

ESEMPI. Definiamo in N le seguenti relazioni d'ordine:

$\sigma : 0 \leq 1;\ 2 \leq 1;\ 2 \leq 3;\ 4 \leq 3; \ldots;\ 2n \leq 2n-1;\ 2n \leq 2n+1; \ldots$
$\tau : 0 \leq n\ \ \forall n \in N.$

Nessuna di tali relazioni d'ordine è quella vuota, ma entrambe generano la relazione vuota di *fra*, se questa è intesa in forma *forte*.

delle quali soddisfa a 5 dei 6 assiomi, con l'esclusione di quello corrispondente al numero dell'esempio.

Es. 1. $E = \{a\} \cup E'$; $a \notin E'$; $E'(\neq \phi)$ insieme *totalmente* ordinato.

Poniamo: $B(x\,y\,z)$ se e solo se è $(x \leq y \leq z) \vee (z \leq y \leq x)$, con $x, y, z \in E'$.

Es. 2. E insieme *totalmente* ordinato con almeno 2 elementi. Poniamo $B(x\,y\,z)$ se e solo se è $(x \leq y \leq z)$.

Es. 3. E insieme *totalmente* ordinato con almeno 3 elementi. Poniamo $B(x\,y\,z)$ se e solo se è $(x < y < z) \vee (z < y < x) \vee (x = y = z)$.

Es. 4. E insieme con almeno 3 elementi. Poniamo $B(xyz)$, $\forall x, y, z \in E$.

Es. 5. $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, con $n \geq 4$. Poniamo, per ogni k, $B(a_{k-1}\, a_k\, a_{k+1})$; inoltre $B(x\,x\,y)$, $\forall\, x, y$; e, in fine, $B(x\,y\,z) \Rightarrow B(z\,y\,x)$.

Es. 6. $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, con $n \geq 3$. Poniamo $B(x\,y\,z)$ se e solo se è $(x = y) \vee (y = z)$.

c. v. d.

Stabiliamo ora alcune conseguenze degli assiomi assunti.

Dalle A2 e A3, si ottiene:

PROPOSIZIONE 5. $B(aab) \Rightarrow B(abb)$.

PROPOSIZIONE 6. $B(bac) \Rightarrow B(bba)$.

Dagli assiomi A2, A3, A4 e A5, si ottiene:

PROPOSIZIONE 7. $B(bab) \Rightarrow (a = b)$.

PROPOSIZIONE 8. $(B(bac) \wedge B(acd) \wedge (a \neq c)) \Rightarrow (B(bad) \wedge B(bcd))$.

PROPOSIZIONE 9. $(B(bad) \wedge B(acd)) \Rightarrow B(bac)$.

Dagli assiomi A4 e A6, si ha:

PROPOSIZIONE 10. *In un ciclo di ordine* 3, *esiste una e una sola terna allineata di elementi consecutivi.*

PROPOSIZIONE 11. $(B(bac) \wedge B(bad) \wedge (a \notin \{b, c, d\}) \Rightarrow (\sim B(cad))$.

Dim. Supponiamo, per assurdo, che sia $B(cad)$. Si ha (A3 e Prop. 5) $B(xxy)$, $\forall\, x, y \in \{a, b, c, d\}$. Quindi gli elementi b, c, d formano un ciclo. Per la A4, si ha $\sim B(axy)$, $\forall\, x, y \in \{b, c, d\}$, se è $x \neq y$. Si conclude, per la A5, che il ciclo b, c, d non ha terne allineate, contro la A6.

c. v. d.

TEOREMA 12. *In un ciclo di ordine pari* (> 3), *è pari anche il numero delle terne allineate di elementi consecutivi.*

Dim. Siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n elementi formanti un ciclo Φ e supponiamo che in esso esista almeno una terna allineata di elementi consecutivi. Sia, per esempio, la terna (a_1, a_2, a_3). Sopprimendo da Φ il vertice a_2, si ottiene (A3) un nuovo ciclo Φ' di ordine $n-1$. Per le A4 e A5, la terna (a_n, a_1, a_2) è allineata se e solo se lo è la terna (a_n, a_1, a_3). Analogo legame sussiste per le terne (a_2, a_3, a_4) e (a_1, a_3, a_4). Quindi, un elemento diverso da a_2 è centro di una terna allineata di elementi consecutivi in Φ, se e solo se lo è in Φ'. Passando dunque da Φ a Φ', il numero v di tali terne diminuisce di una unità. Supponiamo ora che n sia pari. Se è $v = 0$, la tesi sussiste. Se è $v > 0$, operando su Φ come sopra detto, otteniamo un nuovo ciclo Φ' di ordine $n-1$ (dispari), con $v-1$ terne allineate di elementi consecutivi. La tesi segue ora subito dalla A6.

c. v. d.

3 - Le componenti connesse e il teorema di unicità

DEFINIZIONE 5. Sia E un insieme dotato di una relazione di *fra* B. Per ogni $a \in E$ e per ogni ordinale α, poniamo:

$$(a)^0 = \{a\};\ (a)^1 = (a) = \{x \in E : B(xxa)\};$$

$$(a)^\alpha = \{x \in E : \exists\ \beta < \alpha \text{ ed } \exists\ y \in (a)^\beta \text{ tali che } B(xxy)\}.$$

PROPOSIZIONF 13. $(\alpha < \beta) \Rightarrow ((a)^\alpha \subset (a)^\beta)$.

Si prova facilmente il

TEOREMA 14. $(a)^\omega = \bigcup_{n \in N} (a)^n$.

TEOREMA 15. *Per ogni ordinale* $\alpha \geq \omega$, *si ha* $(a)^\alpha = (a)^\omega$.

Dim. E' sufficiente provare che, per $\alpha \geq \omega$, si ha $(a)^\alpha \subset (a)^\omega$. Per induzione. L'inclusione sussiste per $\alpha = \omega$. Supponiamola ora vera per ogni β tale che $\omega \leq \beta < \alpha$. Dato $x \in (a)^\alpha$, esistono un $(\omega \leq)\ \beta < \alpha$ e un $y \in (a)^\beta$ per cui è $B(xxy)$. E' dunque $y \in (a)^\omega$, ossia (Teor. 14) $y \in (a)^{n_0}$, per un opportuno $n_0 \in N$. Si ottiene $x \in (a)^{n_0+1} \subset (a)^\omega$.

c. v. d.

DEFINIZIONE 6. Fissato un $a \in E$, se $x \in (a)^n - (a)^{n-1}$, con $n > 0$, diremo che x è di *livello* n *rispetto ad* a; converremo poi che il livello di a sia 0. Per indicare che un elemento x è di livello n rispetto ad a, scriveremo spesso $|x|_a = n$, o semplicemente $|x| = n$, quando non ci sarà possibilità di equivoco.

PROPOSIZIONE 16. *Sia* $|x|_a = n + 1$. *Deve esistere almeno un elemento* $y : (|y|_a = n) \wedge B(xxy)$, *e per nessuno* z *di livello* $\leq (n-1)$ *può aversi* $B(xxz)$.

PROPOSIZIONE 17. *Se gli elementi* x, y, z *sono di tre livelli diversi, non può essere* $B(xyz)$.

PROPOSIZIONE 18. *Sia* $|x|_a = n\ (> 0)$. *Esistono allora altri* n *ele-*

menti $x_0 = a,\ x_1, \dots, x_{n-1}$, *con* $|x_i| = i$, *tali che* $B(x_i x_i x_{i+1})$, $(x_n = x)$.

PROPOSIZIONE 19. *Quali che siano* $a, b \in E$, *si ha* $|a|_b = |b|_a$.

Dim. Se $|a|_b$ è un numero naturale, la tesi segue direttamente dalla Prop. 18; dopo di che essa appare chiara anche nel caso $|a|_b = \omega$.

c. v. d.

Ha dunque senso la

DEFINIZIONE 7. Sia E un insieme dotato di una b-relazione B. Ogni insieme del tipo $(a)^\omega$ verrà detto una *componente connessa* di E. Se è $(a)^\omega = E$, diremo che E è *connesso rispetto a* B.

Le componenti connesse di E costituiscono, per la Prop. 19, una sua ripartizione.

Fissato un elemento $a \in E$, dalla A5 e dalla Prop. 10, si ha:

PROPOSIZIONE 20. *Siano* x,y,z: $(|x|_a = |z|_a = n) \wedge (|y|_a = n+1) \wedge \wedge B(xyz)$. *Sia poi* t *tale che* $(|t|_a = n-1) \wedge B(ttx)$. *Non può allora aversi* $B(txz)$.

Dim. $B(txz)$ implicherebbe $B(txy)$ o $B(zxy)$ (A5), contro le Prop. 17 o 10.

c. v. d.

PROPOSIZIONE 21. *Dati* x,y,z : $(|x|_a = |z|_a = n) \wedge (|y|_a = n-1) \wedge \wedge (n > 1)$, *non può aversi* $B(xyz)$.

Dim. Sia t : $(|t|_a = n-2) \wedge B(tty)$. Non può essere né $B(tyz)$ né $B(tyx)$, da cui la tesi per la A5.

c. v. d.

TEOREMA DI UNICITA' 22. *Se* E, *dotato di una b-relazione* B, *è connesso rispetto ad essa, e se* B *è generata da un ordinamento* σ, B *è generata solo da* σ *e da* σ^*.

Dim. Proveremo che, per ogni ordinamento τ di E, diverso da σ e da σ^*, si ha $\beta(\tau) \neq \beta(\sigma)$. Se E non è connesso in $\beta(\tau)$ o se esistono due elementi confrontabili in uno solo dei due ordinamenti σ e τ, la tesi è manifesta. Poniamoci dunque fuori di tali ipotesi. Ciò comporta che se b è di livello n rispetto ad a in $\beta(\sigma)$, è tale anche in $\beta(\tau)$.

Siano ora a e b due elementi di E, con $a \leq b$ sia in σ che in τ. Essendo $\sigma \neq \tau \neq \sigma^*$, esistono due elementi c e d che risultano ordinati in σ in modo opposto che in τ. Sia n il minimo dei livelli di c e d rispetto ad a, e sia, per esempio, $|c|_a = n$. Se è $n = 0$, cioè $c = a$, si ha $B(dab)$ in una e una sola delle due relazioni $\beta(\sigma)$ e $\beta(\tau)$. Se è $n > 0$, esiste e tale che $(|e|_a = n-1) \wedge B(eec)$. Inoltre, c ed e stanno in σ e in τ nella stessa relazione. Si ha ora $B(ecd)$ in una e una sola delle relazioni $\beta(\sigma)$ e $\beta(\tau)$.

c. v. d.

Osserviamo che, se E non è connesso rispetto a $\beta(\sigma)$ e se esistono due componenti connesse E' ed E'' di E non ridotte a un solo punto, invertendo la σ soltanto su E', si ottiene un nuovo ordinamento τ di E per cui è $\beta(\tau) = \beta(\sigma)$, pur essendo $\sigma \neq \tau \neq \sigma^*$.

4 - Costruzione della relazione d'ordine

Sia E un insieme non ridotto a un solo punto, dotato di una b-relazione B e connesso rispetto ad essa. Vogliamo definire un ordinamento σ di E che genera la B.

Fissiamo un elemento a di E e definiamo la σ per induzione sul livello dei vari elementi rispetto ad a. Precisamente:

DEFINIZIONE 8. *(La relazione d'ordine in E).*
Sia E, non ridotto a un solo punto, un insieme dotato di una b-relazione B e connesso rispetto ad essa. Fissiamo in E un elemento a, rispetto al quale si penseranno sempre definiti i livelli dei vari elementi. Sia poi a' un altro elemento di E confrontabile con a.

1) Poniamo: $a' \leq a$.

2) Se $x \in (a)$, poniamo:

$a \leq x$, se è $B(a'ax)$; $x \leq a$, in caso contrario.
Supponiamo ora noto che cosa significhi $x \leq y$, se almeno uno dei due elementi è di livello $\leq (n-1)$, $(n > 0)$, e procediamo per induzione su n.

3) Se è $(|x| = n) \wedge (|y| = n+1) \wedge B(xxy)$, detto z un elemento tale che $(|z| = n-1) \wedge B(zzx)$, poniamo
$x \leq y$ se è $x \leq z$, $\qquad y \leq x$ se è $z \leq x$.

4) Se è $(|x| = |y| = n) \wedge (n > 0) \wedge B(xxy)$, detto z un elemento tale che $(|z| = n-1) \wedge B(zzx)$, distinguiamo due casi:

   a) Se è $B(zxy)$, poniamo
   $x \leq y$ se è $z \leq x$, $\qquad y \leq x$ se è $x \leq z$;

   b) se è $\sim B(zxy)$, poniamo
   $x \leq y$ se è $x \leq z$, $\qquad y \leq x$ se è $z \leq x$.

(In particolare, si ha $x \leq x$, qualunque sia $x \in E$). Indicheremo la relazione binaria ora definita col simbolo $s(B)$.

Esaminando i 4 punti della Def. 8, si vede che due elementi, per essere $s(B)$-confrontabili, devono essere B-confrontabili. Viceversa, se x e y sono B-confrontabili, essi devono trovarsi nella situazione prevista da uno (e uno solo) dei quattro punti di tale definizione. Procedendo per induzione sul livello dei vari elementi, si prova facilmente la:

PROPOSIZIONE 23. *Si ha $B(xxy)$ se e solo se è $(x \leq y) \vee (y \leq x)$ in $s(B)$.*

I punti 3 e 4 della Def. 8 richiedono una verifica di *coerenza*. Bisogna cioè provare che tale definizione è indipendente dal particolare punto z di livello $n-1$ ivi considerato.

Premettiamo alcuni risultati.

DEFINIZIONE 9. Diremo che una coppia (x, y) di elementi *distinti* di E è *positiva (negativa)* in $s(B)$ se in tale relazione si ha $x \leq y$ $(y \leq x)$.

PROPOSIZIONE 24. *Se gli elementi x, y sono entrambe di livello 1, si ha $B(xay)$ se e solo se le coppie (x, a) e (a, y) sono di segno concorde.*

Dim. $B(xay)$ equivale al fatto che è allineata una e una sola delle terne (a', a, x) e (a', a, y) (A5 e Prop. 11). Da cui la tesi per la Def. 8-2.

c. v. d.

LEMMA 25. *Siano x, y, z, t tali che $(x \neq y) \wedge (|x| = |y| = n+1) \wedge \wedge (|z| = |t| = n)$; si abbia inoltre $B(zzx) \wedge B(xxy) \wedge B(yyt)$. Allora le due seguenti condizioni sono equivalenti:*

α) *Le terne (z, x, y) e (x, y, t) sono entrambe allineate o entrambe non allineate.*

β) *Le coppie (z, x) e (y, t) hanno lo stesso segno.*

Dim. Se è $z = t$, la condizione α equivale alla $B(xzy)$ (Prop. 10), che implica $n = 0$ (Prop. 21), da cui la tesi per la Prop. 24. Se è $z \neq t$, per la Prop. 17 esistono $z_0 = a$, $z_1, \ldots, z_{n-1}$, $z_n = z$; $t_0 = a$, $t_1, \ldots, t_{n-1}$, $t_n = t$ con $(|z_i| = |t_i| = i) \wedge B(z_i z_i z_{i+1}) \wedge B(t_i t_i t_{i+1})$. Sia k $(0 \leq k < n-1)$ il massimo indice per cui è $z_i = t_i$. Gli elementi $z_k, z_{k+1}, \ldots, x, y, \ldots, t_{k+1}$ formano un ciclo di ordine $2(n-k)+3$ (dispari). In tale ciclo, solo $x, y, z_k = t_k$ possono essere centri di terne allineate di elementi consecutivi. Per la A6, la condizione α equivale alla $B(z_{k+1} z_k t_{k+1})$. Ora (Prop. 21) tale condizione è possibile se e solo se è $k = 0$. La condizione α equivale dunque alla $B(z_1 a t_1)$ e questa (Prop. 24) equivale, a sua volta, al fatto che le coppie (a, z_1) e (t_1, a) hanno lo stesso segno. Risalendo ora di un livello alla volta, si vede che quest'ultima condizione equivale al fatto che sono di segno concorde le coppie (z_1, z_2) e (t_2, t_1); (z_2, z_3) e (t_3, t_2); . . . ; (z_{n-1}, z) e (t, t_{n-1}) e, in fine, (z, x) e (y, t).

c. v. d.

LEMMA 26. *Siano z, x, t tali che $(|t| = |z| = n) \wedge (|x| = n+1) \wedge \wedge (z \neq t)$; si abbia inoltre $B(zzx) \wedge B(xxt)$. Allora le due seguenti condizioni sono equivalenti.*

α) $B(zxt)$.

β) *Le coppie (z, x) e (x, t) hanno lo stesso segno.*

Dim. Siano z_i e t_i come nella dimostrazione del Lemma 25 e sia ancora k il massimo indice per cui è $z_i = t_i$. Il ciclo $z_k, z_{k+1}, \dots, x, \dots, t_{k+1}$ ha, in questo caso, ordine $2(n-k)+2$ (pari). In tale ciclo, solo x e $z_k = t_k$ possono essere centri di terne allineate di elementi consecutivi. Per la Prop. 2, la condizione α equivale alla $B(z_{k+1} z_k t_{k+1})$ che è possibile se e solo se è $k = 0$. Dunque la condizione α equivale alla $B(z_1 a t_1)$. Procedendo ora come nel Lemma 25, si ha subito la tesi.

c. v. d.

Possiamo ora provare il

TEOREMA 27. *La Definizione 8 è coerente.*

Dim. Dobbiamo provare, come detto sopra, che i punti 3 e 4 della Def. 8 non dipendono dal particolare punto z, di livello $n-1$, ivi considerato.

a) Siano x, y tali che $(|x| = n) \wedge (|y| = n+1) \wedge (x \leq y) \wedge (n > 0)$. Esiste allora $z : (|z| = n-1) \wedge (x \leq z)$. Sia poi t un arbitrario elemento di livello $n-1$ e confrontabile con x. Deve essere $(\sim B(zxy)) \wedge (\sim B(txy))$ e quindi $\sim B(zxt)$ (A5). Non potendo essere $t \leq x$ (Lemma 26), deve essere $x \leq t$ (Prop. 23), in accordo con l'ipotesi $x \leq y$. Analogamente nel caso $y \leq x$.

b) Siano x, y tali che $(x \neq y) \wedge (|x| = |y| = n) \wedge (x \leq y) \wedge (n > 0)$. Tale situazione deve necessariamente essere stata ottenuta da una delle seguenti quattro ipotesi:

1) $\exists z : (|z| = n-1) \wedge B(zxy) \wedge (z \leq x)$;
2) $\exists z : (|z| = n-1) \wedge B(zzx) \wedge (\sim B(zxy)) \wedge (x \leq z)$;
3) $\exists z : (|z| = n-1) \wedge B(xyz) \wedge (y \leq z)$;
4) $\exists z : (|z| = n-1) \wedge B(zzy) \wedge (\sim B(xyz)) \wedge (z \leq y)$.

Sia z un elemento che soddisfa all'ipotesi 1. Se è $n = 1$, è $z = a$. Le ipotesi 2 e 3 non sono, in questo caso, soddisfatte da alcun elemento, mentre a, e solo esso, soddisfa anche alla 4, in accordo con la condizione $x \leq y$. Sia ora $n > 1$. Supponiamo che esista $u : (|u| = n-1) \wedge B(uux)$. Se è $x \leq u$, si ha $B(zxu)$ (Lemma 26), da cui $\sim B(uxy)$ (Prop. 11). Se è $u \leq x$, si ha (Lemma 26) $\sim B(uxz)$, da cui $B(uxy)$ (A5). In ogni caso, c'è accordo con l'ipotesi $x \leq y$. Sia ora $t : (|t| = n-1) \wedge B(tty)$. Si ha (Lemma 25) $B(xyt)$ se è $y \leq t$ e $\sim B(xyt)$ se è $t \leq y$, sempre in accordo con l'ipotesi $x \leq y$. Analogamente si procede partendo da un elemento z che soddisfi ad una delle altre tre ipotesi.

c. v. d.

Dalla Def. 8, tenuto conto del Teorema 27, si ha

Corollario 28. *Se x, y, z sono di tre livelli consecutivi, non può aversi né $(x \leq y) \wedge (y \leq z)$ né $(z \leq y) \wedge (y \leq x)$.*

Corollario 29. *Dati $x, y, z: (|x| = |z| = n + 1) \wedge (|y| = n)$, con $n > 0$, non può aversi $(x \leq y) \wedge (y \leq z)$.*

Possiamo ora provare il

Teorema 30. *Dato un insieme E, dotato di una b-relazione B, e connesso rispetto ad essa, la relazione binaria $\sigma = s(B)$, introdotta in E con la Definizione 8, è una relazione d'ordine.*

Dim. La *Proprietà riflessiva* è immediata.

Proprietà antisimmetrica. Dal Teor. 27, si ha che se è $x \neq y$, non può aversi $(x \leq y) \wedge (y \leq x)$.

Proprietà transitiva. Siano x, y, z tali che $(x \leq y) \wedge (y \leq z)$. Dobbiamo provare che è anche $x \leq z$. E' lecito supporre *distinti* i tre elementi, dato che, in caso contrario, la tesi è manifesta. Tenuto conto dei Corollari 28 e 29, gli unici casi possibili sono i seguenti:

1) $(|x| = |y| = n) \wedge (|z| = n - 1)$, da cui $n > 0$. Se è $n = 1$, si ha $z = a$. Dalle ipotesi, si ottiene $B(xya) \wedge (\sim B(yax)) \wedge (\sim B(a'ay))$, e quindi $\sim B(a'ax)$ (A5), che dà appunto $x \leq a$. Se è $n > 1$, si ha ancora $B(xyz)$ (Def. 8-4), da cui $B(xxz)$. Esiste $u: (|u| = n - 2) \wedge B(uuz)$. Per la $y \leq z$, deve essere $u \leq z$, da cui la tesi per la Def. 8-3. Analogamente se è $(|x| = n - 1) \wedge (|y| = |z| = n)$.

2) $(|x| = |y| = n) \wedge (|z| = n + 1)$, da cui $n > 0$. Esiste $u: (|u| = n - 1) \wedge B(uuy) \wedge (\sim B(uyz))$. Dalla $y \leq z$ si ha $y \leq u$, da cui $B(xyu) \wedge (x \leq u)$ (cfr. punto 1). Per la A5, si ha $B(xyz)$ e quindi $B(xxz)$. Dalle Prop. 10 e 11, si ottiene $\sim B(uxz)$, da cui la tesi. Analogamente nel caso $(|x| = n + 1) \wedge (|y| = |z| = n)$.

3) $(|x| = |z| = n) \wedge (|y| = n - 1)$. Per il Coroll. 29, deve essere $n = 1$, da cui $y = a$. Si ha $B(xaz)$ (Prop. 24), da cui $B(xxz) \wedge (\sim B(axz))$ e quindi la tesi.

4) $(|x| = |z| = n) \wedge (|y| = n + 1)$, da cui $n > 0$. Si ha (Lemma 26) $B(xyz)$, da cui $B(xxz) \wedge (x \neq z) \wedge (\sim B(yxz))$. Sia $u: (|u| = n - 1) \wedge (x \leq u) \wedge (\sim B(uxy))$. Ne viene $\sim B(uxz)$ (Prop. 20), da cui $x \leq z$.

5) $|x| = |y| = |z| = n \ (> 0)$. Sia $u: (|u| = n - 1) \wedge B(uuy)$. Si ha $(u \leq y) \vee (y \leq u)$ (Prop. 23). Se è $u \leq y$, si ha $B(uyz) \wedge \wedge (\sim B(uyx))$; nell'altro caso, si ottiene $B(uyx) \wedge (\sim B(uyz))$. In ogni caso, si ha $B(xyz)$ (A5), da cui $B(xxz) \wedge (\sim B(yxz))$. Esiste poi $t: (|t| = n - 1) \wedge B(ttx)$, per il quale si ha $B(txz)$ se e solo se è $B(txy)$ (A5). Dall'ipotesi $x \leq y$, si ha ora subito la tesi.

c. v. d.

Nel corso della dimostrazione dell'ultimo Teorema, si è, fra l'altro, provato il

COROLLARIO 31. $(x \leq y \leq z) \Rightarrow B(xyz)$.

Possiamo ora concludere col

TEOREMA 32. *Dato un insieme E, dotato di una b-relazione B e connesso rispetto ad essa, si ha $B(xyz)$ se e solo se è $(x \leq y \leq z) \vee (z \leq y \leq x)$ nell'ordinamento $s(B)$ introdotto in E dalla Definizione* 8.

Dim. Il *se* è espresso dal Corollario 31. Proviamo il *solo se.* Sia dunque $B(xyz)$. Se i tre elementi x, y, z non sono distinti, la tesi è assicurata dalla Prop. 23. In caso contrario, da tale Proposizione si ricava:

$$((x \leq y) \vee (y \leq x)) \wedge ((y \leq z) \vee (z \leq y)) \wedge ((x \leq z) \vee (z \leq x)),$$

da cui la tesi, dato che si tratta di una relazione d'ordine.

c. v. d.

I Teoremi 22 e 32 si possono così riassumere:

TEOREMA 33. *Sia E un insieme dotato di una b-relazione B e connesso rispetto ad essa. E' possibile definire in E una e una sola coppia di ordinamenti, tra loro opposti, che generano la B. Uno di tali ordinamenti è quello $s(B)$ espresso dalla Definizione 8.*

Il Teorema 32 si può esprimere concisamente con l'uguaglianza

$$B = \beta(s(B)).$$

Supponiamo ora che in un insieme E sia definita una relazione d'ordine σ e che E sia connesso rispetto a $\beta(\sigma) = B$. Per il Teor. 32, anche l'ordinamento $s(B)$ genera la B. Per il Teor. 22, si conclude col

COROLLARIO 34. *Per ogni ordinamento σ definito su un insieme E, connesso rispetto a $\beta(\sigma)$, si ha:*

$$s(\beta(\sigma)) = \sigma \quad \text{o} \quad s(\beta(\sigma)) = \sigma^*.$$

* * *

Osserviamo ora, per concludere, che, se diamo all'assioma A1 la forma più forte

A1'. $B(aab)$,

E risulta connesso e si ottiene:

$$B(bac) \vee B(acb) \vee B(cba).$$

Da ciò si ricava (Prop. 23) che l'ordinamento introdotto in E dalla Def. 8 è, in questo caso, *totale.* Le A1', A2, ..., A6 possono dunque essere assunte come assiomi di una relazione di *fra totale*, generata cioè da un ordinamento totale.

Questo argomento è già stato esaurientemente studiato da W. Szmielew. Qui ci limitiamo ad osservare che il sistema di assiomi adottato dalla Szmielew è, per forza di cose, equivalente a quello costituito dai nostri assiomi, con A1' in luogo di A1.

Chiudiamo notando che l'assioma A3 segue banalmente dalla A1'. Per contro, gli esempi 1, 2, 4, 5, 6 del Teor. 4 provano l'indipendenza degli altri assiomi (sempre con $card(E) \geq 4$). Inoltre il Teor. 2, supponendo di partire da un ordinamento totale, prova la consistenza dei nostri assiomi.