SULLA CONDIZIONE FIX f = FIX f_2 PER UNA APPLICAZIONE f DI UN INSIEME TOTALMENTE ORDINATO IN SÉ (*)

di BASILIO MESSANO (a Napoli) (**)

SOMMARIO. - *Si studia, in rapporto a questioni di convergenza globale del metodo delle approssimazioni successive ed alla questione dell'esistenza di un punto fisso comune a due applicazioni, la condizione* $Fix\, f = Fix\, f_2$*; si forniscono, tra l'altro, condizioni equivalenti ad essa e si ritrova, generalizzata, una nota proposizione relativa ai sistemi dinamici discreti.*

SUMMARY. - *The condition* $Fix\, f = Fix\, f_2$ *is studied in relation to questions on global convergence of the successive approximations method, and to the question of the existence of a common fixed point for two applications. Other equivalent conditions for the same are proposed by the author. Using the notion of global convergence of the successive approximations method, the author is able to generalize a known proposition relative to discrete dynamical systems.*

Introduzione

In un precedente lavoro (cfr. [5], teorema (4.2)) abbiamo dimostrato che, dato un insieme totalmente ordinato S, completo e denso in sé, per un'applicazione f continua, rispetto alla order topology su S (1), di S in sé, la condizione:

A) $Fix\, f = Fix\, f_2$ (2).

(*) Pervenuto in Redazione il 30 aprile 1982. - Lavoro svolto nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Viale G. Di Vittorio 157/F - 71100 Foggia.

(1) Cfr., ad esempio, [4], pag. 57.

(2) Per il significato dei simboli $Fix\, f$ e $Fix\, f_2$ cfr. n. 1.

equivale alla condizione:

B) Per la coppia (S, f) il metodo delle approssimazioni successive converge globalmente (nel senso che: per ogni elemento x_0 di S, tale che la successione $(f_n(x_0))_{n \in N}$ sia limitata, la successione stessa converge ad un punto fisso di f).

Lo scopo principale di questa nota è di fornire ulteriori condizioni equivalenti alla *A)*.

Il teorema (2.2) esprime l'equivalenza alla *A)* di dieci condizioni, sei delle quali furono segnalate da A. Volčič nel 1970 (cfr. [7], theorem 2) per il caso in cui S soddisfi la ulteriore ipotesi di essere limitato.

Il citato teorema di Volčič era stato preceduto da un teorema di S. C. Chu e R. D. Moyer (cfr. [1], theorem 1) relativo al caso in cui S sia un intervallo compatto di R, e veniva peraltro ad aggiungere una condizione (3) a quelle indicate da Chu e Moyer (4).

Ulteriori condizioni equivalenti alla *A)* sono date dal teorema (3.3) la cui dimostrazione è conseguenza, oltre che del teorema (2.2), del teorema (3.1), il quale è relativo al problema dell'esistenza di un punto fisso comune a due applicazioni. A tale problema si riferisce anche il teorema (3.2).

Nel n. 4 si prova che, in ipotesi per S e f più deboli di quelle indicate all'inizio di questa introduzione, la *B)* è soddisfatta se la f soddisfa la seguente condizione più forte della *A)*:

f_2 *è crescente ed ha al più un punto fisso.*

Concludiamo questa introduzione osservando che il teorema (2.2) permette di ritrovare molto semplicemente una proposizione relativa ai sistemi dinamici discreti, e anzi di generalizzarla; nella letteratura, a quanto ci consta, non si citano dimostrazioni di tale proposizione che facciano uso della nozione di convergenza globale.

1. **Premesse**

Denotiamo, qualunque sia l'applicazione g di un insieme T in sé, con $Fix\, g$ l'insieme dei punti fissi di g e, per ogni elemento n dell'insieme N degli interi positivi, con g_n l'iterata n-esima di g.

Inoltre, con i simboli S e f denotiamo, rispettivamente, un insieme totalmente ordinato munito della order topology, e un'applicazione di S in sé; poniamo:

---

(3) Precisamente la corrispondente della condizione 2) del (2.2).

(4) Le condizioni indicate da Chu e Moyer sono le corrispondenti delle condizioni 3), 5), 6), 9) e 10) del (2.2).

$$U = \{x \in S : (f_n(x))_{n \in N} \text{ è limitata}\}.$$

Utile in questo lavoro è la seguente definizione che estende quella di convergenza globale, per la coppia (S, f), del metodo delle approssimazioni successive (abbr.: m.a.s.) data in [5]:

DEF. - *Se X è una parte chiusa e non vuota di S tale che $f(X) \subseteq X$, si dice che «per la coppia (X, f) il m.a.s. converge globalmente» quando per ogni elemento x_0 di X, tale che la successione $(f_n(x_0))_{n \in N}$ sia limitata in X, la successione stessa converge ad un punto fisso di f.*

2. - In questo numero e nel successivo sottointenderemo, salvo avviso contrario, che l'insieme S sia completo e denso in sé (5) e che f sia un'applicazione continua di S in sé.

Dimostriamo il seguente teorema che assorbe un teorema di Volčič (cfr. [7], theorem 1):

(2.1) - *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

α) $Fix\, f \neq Fix\, f_2$.

β) *Esiste una coppia* $(x_1, x_2) \in S \times S$ *tale che:*

$$f(x_2) = x_1 < x_2 = f(x_1).$$

γ) *Esiste una coppia* $(x_1, x_2) \in U \times U$ *tale che:*

$$f(x_2) \leq x_1 < x_2 \leq f(x_1).$$

DIM. - α) ⇒ β). Detto x un elemento di S tale che:

$$f(x) \neq x = f_2(x),$$

e posto:

$$x_1 = \min\{f(x), x\} \quad , \quad x_2 = \max\{f(x), x\},$$

risulta:

$$f(x_2) = x_1 < x_2 = f(x_1).$$

β) ⇒ γ). Evidente.

γ) ⇒ α). Supponiamo per assurdo che $Fix\, f = Fix\, f_2$. Allora, poiché in virtù del teorema (4.1) di [5] dalla γ) consegue:

$$f_2(x_2) < x_2 \ , \ f_2(x_1) > x_1,$$

ognuna delle uguaglianze $f(x_2) = x_1$, $f(x_1) = x_2$ è assurda, in quanto la prima implica:

(5) Un interessante esempio di insieme totalmente ordinato, completo e denso in sé è fornito da ogni parte di R che sia l'unione di una famiglia $(I_i)_{i \in N'}$ (N' intervallo di N) di intervalli di R tale che:

$$\sup I_i < \inf I_{i+1}, \ \sup I_i \in I_i \text{ aut } \inf I_{i+1} \in I_{i+1},$$

per ogni i di N' diverso dall'eventuale massimo di N'.

$$f_2(x_2) = f(x_1) \geq x_2,$$

e la seconda implica:

$$f_2(x_1) = f(x_2) \leq x_1.$$

Si ha pertanto:

$$f(x_2) < x_1 < x_2 < f(x_1).$$

Poiché:

$$f(f(x_2)) < x_2 < f(x_1),$$

l'insieme chiuso e limitato:

$$V = f^{-1}(\{x_2\}) \cap [f(x_2), x_1] = f^{-1}(\{x_2\}) \cap \,]f(x_2), x_1[$$

è non vuoto. Posto:

$$y_0 = \max V,$$

per ogni $t \in \,]y_0, x_1[$ risulta ovviamente:

$$t < x_1 < x_2 < f(t),$$

e conseguentemente si ha che:

(1) $$Fix\, f \cap \,]y_0, x_1[\, = \phi.$$

D'altro canto, essendo:

$$f_2(y_0) = f(x_2) < y_0 \text{ e } f_2(x_1) > x_1,$$

a norma del teorema (3.2) di [5] risulta:

$$Fix\, f_2 \cap \,]y_0, x_1[\, \neq \phi,$$

ma ciò è in contrasto con la (1) in quanto si è ammessa l'uguaglianza:

$$Fix\, f = Fix\, f_2 \text{ (6)}.$$

OSSERVAZIONE 1 - Rileviamo esplicitamente che, se esiste una coppia $(x_1, x_2) \in S \times S$ tale che:

$$f(x_2) \leq x_1 < x_2 \leq f(x_1),$$

non è detto che la α) sia verificata. In proposito basta osservare che, posto $S = R$ e denotata con f la funzione di R in R così definita:

$$f(x) = -2x \text{ per ogni } x \in R,$$

(6) Nel caso particolare in cui S è limitato e quindi $U = S$, l'implicazione $\gamma) \Rightarrow \alpha)$ è stata già dimostrata da Volčič (cfr. [7], theorem 2, equivalenza delle proprietà I e V).
La dimostrazione da noi data ha qualche punto di contatto con quella di Volčič che, peraltro, si può estendere pari pari al caso generale quando si tenga presente il già citato teorema (4.1) di [5].

risulta $Fix\, f_n = \{0\}$ per ogni $n \in N$, mentre per $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$ si ha:

$$f(x_2) = x_1 < x_2 < f(x_1).$$

Sfruttando la (2.1) e due risultati contenuti in [5] riusciremo a dimostrare agevolmente il seguente teorema:

(2.2) - *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1) *Non esiste alcuna coppia* $(x_1, x_2) \in S \times S$ *tale che:*
$$f(x_2) = x_1 < x_2 = f(x_1).$$

2) *Non esiste alcuna coppia* $(x_1,x_2) \in U \times U$ *tale che:*
$$f(x_2) \leq x_1 < x_2 \leq f(x_1).$$

3) $f(x) < x \Rightarrow f_2(x) < x$ *per ogni* $x \in U$
$f(x) > x \Rightarrow f_2(x) > x$ *per ogni* $x \in U$.

4) $Fix\, f = Fix\, f_2$.

5) *Per ogni* $n \in N$ *risulta:*
$f(x) < x \Rightarrow f_n(x) < x$ *per ogni* $x \in U$
$f(x) > x \Rightarrow f_n(x) > x$ *per ogni* $x \in U$.

6) $Fix\, f = Fix\, f_n$ *per ogni* $n \in N$.

7) *Esiste un* $n \in N$ *tale che:*
$f(x) < x \Rightarrow f_{2n}(x) < x$ *per ogni* $x \in U$
$f(x) > x \Rightarrow f_{2n}(x) > x$ *per ogni* $x \in U$.

8) *Esiste un* $n \in N$ *tale che:*
$Fix\, f = Fix\, f_{2n}$.

9) *Se* G *è un sottoinsieme di* S *non vuoto, chiuso, limitato e tale che* $f(G) \subseteq G$, f *è dotata di almeno un punto fisso in* G.

10) *Per la coppia* (S, f) *il m.a.s. converge globalmente.*

11) *Se* G' *è un sottoinsieme di* S *non vuoto, chiuso e tale che* $f(G') \subseteq G'$, *per la coppia* (G', f) *il m.a.s. converge globalmente.*

DIM. - Poiché, evidentemente, 5) $\Rightarrow$ 6) $\Rightarrow$ 4) e 5) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4), e d'altro canto, a norma della (2.1), le proprietà 1), 2) e 4) sono equivalenti, basta dimostrare le proposizioni seguenti:

a) 4) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 7) $\Rightarrow$ 8) $\Rightarrow$ 4).

b) 4) $\Rightarrow$ 10) $\Rightarrow$ 11) $\Rightarrow$ 9) $\Rightarrow$ 4).

Dimostrazione della a).

4) $\Rightarrow$ 5). Consegue dal teorema (4.1) di [5].

5) $\Rightarrow$ 7) $\Rightarrow$ 8). Evidente.

8) $\Rightarrow$ 4). Basta osservare che, per ogni $n \in N$, risulta:

$$Fix\, f \subseteq Fix\, f_2 \subseteq Fix\, f_{2n}.$$

Dimostrazione della b).

4) $\Rightarrow$ 10). Consegue dal teorema (4.2) di [5].

10) $\Rightarrow$ 11). Se x è un elemento di G' tale che la successione $(f_n(x))_{n \in N}$ sia limitata la successione stessa, per la 10), converge ad un punto fisso di f.

11) $\Rightarrow$ 9). Evidente, quando si applichi la 11) per $G' = G$.

9) $\Rightarrow$ 4). Se esistesse un $x \in S$ tale che $f(x) \neq x = f_2(x)$, l'insieme:

$$G = \{f(x), x\}$$

verificherebbe le ipotesi della 9), quindi ad esso dovrebbe appartenere un punto fisso di f, ma ciò non può accadere.

OSSERVAZIONE 2 - Poiché 4) $\Rightarrow$ 6) la condizione:

$$Fix\, f = Fix\, f_{2n} \text{ per ogni } n \in N$$

risulta equivalente alla 4).

Non è invece equivalente alla 4) la condizione:

$$Fix\, f = Fix\, f_{2n+1} \text{ per ogni } n \in N;$$

in proposito basta considerare il seguente esempio:

$$S = R, f(x) = -x \text{ per ogni } x \in R.$$

Conseguenza immediata del teorema (2.2) è il teorema seguente che assorbe un noto risultato relativo ai sistemi dinamici discreti (7):

(2.3) - *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

δ) *Non esistono punti periodici di periodo due* (8).

ε) *Qualunque sia l'intero $n \geq 2$, non esistono punti periodici di periodo n.*

DIM. - Poiché, evidentemente, δ) $\Rightarrow$ 4) e 6) $\Rightarrow$ ε) $\Rightarrow$ δ) basta osservare che a norma del (2.2), la 4) implica la 6).

OSSERVAZIONE 3 - Dalla stessa dimostrazione del teorema (2.3)

---

(7) Cfr. [6], teorema 1; cfr. anche [3], teorema 1, pp. 521-523.

(8) Un punto x di S si dice *periodico di periodo* n ($\geqslant 2$) *se risulta:* $f_n(x) = x, f_i(x) \neq x$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

consegue che le proprietà δ) e ε) sono equivalenti a quelle del teorema (2.2).

Concludiamo questo numero facendo vedere che tutte le ipotesi su S e su f, nel (2.2), sono essenziali affinché le undici proprietà, di tale teorema, siano equivalenti. Più precisamente formuliamo tre esempi per mostrare che, se un insieme totalmente ordinato $(S, \leq)$ e una applicazione f di S in sé verificano soltanto due delle seguenti condizioni:

— *S è completo*

— *S è denso in sé*

— *f è continua*

non è detto che la 4) implichi la 6).

Esempio 1 - Sia $S = [0,1]$ e sia f la funzione di $[0,1]$ in $[0,1]$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{se } 0 \leq x < 1/3 \\ 2/3 & \text{se } 1/3 \leq x < 2/3 \\ 0 & \text{se } x = 2/3 \\ x & \text{se } 2/3 < x \leq 1. \end{cases}$$

Come facilmente si verifica, risulta:

$$Fix\, f = Fix\, f_2 = \,]\,2/3, 1\,],\ Fix\, f_3 = \{0, 1/3\} \cup [2/3, 1].$$

Esempio 2 - Sia $S = \{a, b, c, d\}$, con $a < b < c < d$, sia f l'applicazione di S in sé tale che:

$$f(a) = b,\ f(b) = c,\ f(c) = a,\ f(d) = d.$$

Ovviamente risulta:

$$Fix\, f = Fix\, f_2 = \{d\},\ Fix\, f_3 = S.$$

Esempio 3 - Consideriamo l'intervallo $[0,1]$ di R e la funzione g di $[0,1]$ in $[0,1]$ così definita:

$$g(x) = \begin{cases} x + (2/3) & \text{se } 0 \leq x \leq 1/3 \\ 2\,((5/6) - x) & \text{se } 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ 1 - x & \text{se } 2/3 \leq x \leq 1 \text{ (9)}. \end{cases}$$

Poniamo:

$$S = [0,1] - \{a_1, a_2, y_1, \ldots, y_n, \ldots\},$$

dove a_1 e $a_2 (a_1 < a_2)$ sono gli elementi di $Fix\, g_2 - Fix\, g$, y_1 è il punto di $[0,1] - \{a_1\}$ la cui immagine mediante g è a_2, e $y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ sono i punti di $[0,1]$ così definiti:

(9) Cfr. [2], example 1, (pp. 302-303).

$$y_n = g^{-1}(y_{n-1}) \text{ per ogni intero } n > 1.$$

Osservato poi che $g(S) \subseteq S$, indichiamo con f la funzione di S in S così definita:

$$f(x) = g(x) \text{ per ogni } x \in S.$$

Come facilmente si verifica, risulta:

$$Fix\, f = Fix\, f_2 = \{5/9\},$$

$$Fix\, f_4 = \{5/9\} \cup ([0, 1/3] - \{a_1\}) \cup ([2/3, 1] - \{a_2\}).$$

3. - Nel presente numero daremo (cfr. (3.3)) ulteriori condizioni equivalenti alla condizione $Fix\, f = Fix\, f_2$, usufruendo del teorema (3.1) che fornisce un procedimento costruttivo per individuare un punto fisso comune a due applicazioni, almeno una delle quali sia un'applicazione continua di S in sé.

(3.1) - *Sia S' un intervallo di S soddisfacente le condizioni:*

$$f(S') \subseteq S', \quad Fix\, f \cap S' = Fix\, f_2 \cap S',$$

e g un'applicazione di un sottoinsieme di S in S godente della proprietà che l'insieme G dei punti fissi di g in S' sia chiuso su S', non vuoto e tale che $f(G) \subseteq G$.

Allora, dato un punto x_0 di G, la successione $(f_n(x_0))_{n \in N}$ converge ad un punto fisso comune a f ed a g, sempre che sia limitata in S'.

DIM. - Escluso il caso banale in cui S' sia costituito da un solo elemento, l'asserto consegue in modo ovvio dalla implicazione 4) $\Rightarrow$ 11) della (2.2) quando si osservi che la funzione:

$$x \in S' \to f(x) \in S'$$

è continua con riferimento alla order topology su S' in quanto, essendo S' un intervallo, tale topologia coincide con la topologia indotta su S' dalla order topology su S.

Dal teorema appena dimostrato consegue che:

(3.2) - *Se esiste un intervallo S' di S tale che:*

$$f(S') \subseteq S', \quad Fix\, f \cap S' = Fix\, f_2 \cap S',$$

e g è un'applicazione continua di S in sé permutabile con f in S', la condizione:

μ) *esiste un punto fisso x_0 di g in S' tale che la successione $(f_n(x_0))_{n \in N}$ sia limitata in S'*

implica l'esistenza di un punto fisso comune a f ed a g [10].

OSSERVAZIONI

1 - Se S è limitato e $S' = S$ la condizione μ) è certamente verificata, in quanto esiste un punto fisso di g; cfr. [5], nota 15.

2. - Il teorema (3.2) implica, evidentemente, il seguente teorema di Chu e Moyer (cfr. [1], theorem 2): *Se esiste un intervallo chiuso S' di $[0,1]$ tale che:*

$$f(S') \subseteq S', \quad Fix\, f \cap S' = Fix\, f_2 \cap S',$$

e g è un'applicazione continua di $[0,1]$ in sé permutabile con f in $[0,1]$, l'esistenza di un punto fisso di g in S' implica l'esistenza di un punto fisso comune a f ed a g.

Questo teorema e la sua dimostrazione ci hanno suggerito i teoremi (3.1) e (3.2).

Dimostriamo infine, usufruendo dei teoremi (2.2) e (3.1), il seguente teorema che dà ulteriori condizioni equivalenti alla condizione $Fix\, f = Fix\, f_2$:

(3.3) - *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

4) $Fix\, f = Fix\, f_2$.

12) *Qualunque sia l'applicazione g di un sottoinsieme di S in S tale che l'insieme $G = Fix\ g$ sia chiuso, non vuoto e soddisfi la condizione $f(G) \subseteq G$, dato un punto x_0 di G, la successione $(f_n(x_0))_{n \in N}$ converge ad un punto fisso comune a f ed a g, sempre che sia limitata.*

13) *Per qualunque applicazione continua g di S in sé permutabile con f in S, tale che $G = Fix\ g$ sia non vuoto, dato un punto x_0 di G, la successione $(f_n(x_0))_{n \in N}$ converge ad un punto fisso comune a f ed a g, sempre che sia limitata.*

DIM. - 4) $\Rightarrow$ 12). Consegue in modo ovvio dal teorema (3.1) applicato nel caso $S' = S$.

12) $\Rightarrow$ 13). Evidente, quando si tenga presente la proposizione *a)* della nota 10.

---

(10) Per quanto riguarda la verifica della condizione $f(G) \subseteq G$ basta tener presente che:
a) Se le applicazioni φ e ψ di un insieme T in sé sono permutabili in un insieme T' di T (nel senso che $\varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x))$ per ogni $x \in T'$) e *$\varphi(T') \subseteq T'$, denotato con G l'insieme dei punti fissi di ψ in T' risulta:*

$$\varphi(G) \subseteq G.$$

Infatti, per ogni $x \in G$, si ha:

$$\varphi(x) = \varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x)).$$

13) $\Rightarrow$ 4). Basta tener presente la implicazione 10) $\Rightarrow$ 4) del (2.2) dopo aver osservato che la 13), applicata nel caso in cui g sia l'applicazione identica di S su S, implica la 10).

4. - Consideriamo la condizione:

ν) *Fix* f_2 *è costituito al più da un elemento.*

Sussiste la proposizione seguente, la quale in realtà prescinde dalla ipotesi, assunta in questo lavoro, che S sia un insieme ordinato:

(4.1) - *La condizione* ν) *implica che:*

$$Fix\, f = Fix\, f_2.$$

DIM. - L'asserto è ovvio se $Fix\, f_2$ è vuoto; per quanto riguarda il caso in cui $Fix\, f_2$ è costituito da un unico elemento, diciamolo p, basta osservare che in virtù della proposizione *a)* della nota 10 si ha:

$$f(p) = p.$$

Dalla (4.1) e dal teorema (2.2) consegue banalmente che, nelle ipotesi per S e per f indicate all'inizio del n. 2, la condizione ν) implica la convergenza globale, per la coppia (S, f), del m.a.s.

Ci domandiamo se tale implicazione continua a sussistere in ogni caso in cui siano verificate le seguenti ipotesi per S e per f, già considerate in [5], meno restrittive di quelle indicate all'inizio del n. 2:

i) ogni successione infinita crescente (risp. *decrescente) e limitata di elementi di* S *è dotata di estremo superiore* (risp. *estremo inferiore).*

ii) f *è sequenzialmente continua.*

La risposta è negativa, come si può constatare considerando l'esempio 2 del n. 2.

Vale però il seguente teorema:

(4.2) - *Se l'insieme* S *soddisfa la i) e* f *soddisfa la ii) ed è tale che la* f_2 *è crescente, la condizione* ν) *implica che per la coppia* (S, f) *il m.a.s. converge globalmente.*

DIM. - Poiché la f_2 è sequenzialmente continua, a norma della (2.4) di [5] si ha che per la coppia (S, f_2) il m.as. converge globalmente.

Allora, se per un punto x di S la successione $(f_n(x))_{n \in N}$ è limitata le successioni $(f_{2n}(x))_{n \in N}$ e $(f_{2n}(f(x)))_{n \in N}$, risultando anch'esse limitate, convergono ad un punto fisso della f_2, che, per la v), è l'unico elemento, diciamolo p, di $Fix\, f_2$.

La successione $(f_n(x_n))_{n \in N}$ converge pertanto al punto p; da ciò e dalla uguaglianza $Fix\, f = Fix\, f_2$ (cfr. (4.1)) consegue l'asserto.

OSSERVAZIONE - Appare evidente dalla dimostrazione che nella (4.2) la *ii)* può essere sostituita dalla condizione, meno restrittiva, che la f_2 sia sequenzialmente continua.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. C. CHU, R. D. MOYER, *On continuous functions, commuting functions and fixed points*, Fund. Math., *59* (1966), 91-95.

[2] M. Y. COSNARD, *On the behavior of successive approximations*, Siam J. Numer. Anal., *16*, n. 2 (1979), 300-310.

[3] G. GEYMONAT, *Lezioni di Matematica*, vol. 1, Editrice Levrotto & Bella, Torino (1981).

[4] J. L. KELLEY, *General Topology*, Springer-Verlag, New York (1975).

[5] B. MESSANO, *Convergenza globale del metodo delle approssimazioni successive in un insieme totalmente ordinato*, in corso di stampa su «Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni».

[6] A. N. SARKOVSKII, *Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself*, Ukr. Mat. Z., *16* (1964), 61-71.

[7] A. VOLČIČ, *Some remarks on a S. C. Chu and R. D. Moyer's theorem*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., *49* (1970), 122-127.