SUL CONFRONTO FRA EVENTI DI PROBABILITA' NULLA (*)

di Giulianella Coletti e Giuliana Regoli (a Perugia) (**)

Sommario. - *Sull'insieme delle parti di un insieme Ω si definiscono, mediante la probabilità condizionata, due relazioni di equivalenza e due ordinamenti che permettono di confrontare fra loro eventi di probabilità nulla e si studiano le proprietà delle strutture di ordine ottenute. Si danno infine caratterizzazioni di dette relazioni in termini di misure strettamente positive a valori in un campo iperreale.*

Summary. - *By means of the conditional probability we define on the power set of a set Ω two equivalence relations and two orderings which enable us to compare zero-probability events. We study the properties of such order structures. We characterize such relations in terms of strictly positive measures with values in an extension field of the reals.*

1. - Introduzione e premesse

E' noto che, data una probabilità p (σ-additiva o no), al più una infinità numerabile di eventi incompatibili può avere probabilità positiva. Nasce quindi l'esigenza di dstinguere tra loro e dall'evento impossibile gli eventi di probabilità nulla.

De Finetti, che ha messo in luce l'importanza concettuale dello studio delle probabilità nulle, indica in [2], [3], [4] la strada delle probabilità condizionate per poter «stratificare» gli eventi di probabilità nulla: non identificando il teorema delle probabilità compo-

(*) Pervenuto in redazione il 7 giugno 1981. Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi funzionale e le sue Applicazioni del C.N.R.
(**) Indirizzo degli Autori: Dipartimento di Matematica - Università degli Studi - Via Vanvitelli, 1 - 06100 Perugia.

ste con la definizione di probabilità condizionata, egli sostiene la opportunità di definire tale concetto anche per eventi «condizionanti» di probabilità nulla. Sarà Dubins ([5]) a dare un inquadramento formale e una soluzione definitiva al problema dell'esistenza di una probabilità condizionata per ogni coppia di eventi con secondo evento non impossibile.

In questo lavoro, riprendendo l'idea di De Finetti ([2]), definiamo, tramite la probabilità condizionata, due relazioni di equivalenza e due ordinamenti in $\mathcal{P}(\Omega)$, che permettono di confrontare fra loro eventi di probabilità nulla. Il primo ordinamento distingue eventi non «ugualmente probabili», il secondo (compatibile con il primo) caratterizza eventi che sono nulli rispetto ad altri.

Nell'ultimo paragrafo caratterizziamo le relazioni di equivalenza e di ordine date, in termini di misure a valori in un campo iperreale.

Dati due eventi E, F, indichiamo la loro somma logica con il simbolo $E + F$, il loro prodotto logico con EF.

Date due algebre di eventi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{G}$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$, si dice probabilità condizionata una funzione p definita in $\mathcal{A} \times \mathcal{G}^0$ ($\mathcal{G}^0 = \mathcal{G} - \{\phi\}$) che verifichi le seguenti proprietà:

i) $p(./H)$ è una probabilità finitamente additiva per ogni $H \in \mathcal{G}^0$;

ii) $p(H/H) = 1$ per ogni $H \in \mathcal{G}^0$;

iii) $p(EF/G) = p(E/G)p(F/EG)$ per $G, EG \in \mathcal{G}^0$, $E, F \in \mathcal{A}$.

Inoltre si pone $p(./\Omega) = p(.)$, se Ω rappresenta l'evento certo.

Si ottiene un sistema di assiomi equivalente se all'assioma iii) si sostituisce il seguente (cfr. [5]):

iii') $p(A/C) = p(A/B)p(B/C)$ per $A \in \mathcal{A}$, $B, C \in \mathcal{G}^0$; $A \subseteq B \subseteq C$.

Non imponendo a priori la σ-additività la p suddetta si può estendere [5] ad una probabilità condizionata *completa* su $\mathcal{B}$, cioè ad una probabilità condizionata su $\mathcal{B} \times \mathcal{B}^0$, essendo $\mathcal{B}$ una qualunque algebra contenente $\mathcal{A}$, (per esempio, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$). Non è quindi restrittivo considerare, come si farà in seguito, probabilità condizionate complete.

In [1] si dimostra che è possibile costruire (come estensione di una probabilità data) una probabilità condizionata con specifiche caratterizzazioni degli zeri; gli esempi riportati in questo lavoro sono quindi legittimati anche da tali risultati.

2. - Equivalenza in probabilità

Dato un insieme Ω, sia p una probabilità condizionata completa sull'insieme di eventi rappresentati dall'insieme delle parti $\mathcal{P}(\Omega)$.

DEFINIZIONE 1 - Definiamo *equivalenti in probabilità* $(A \sim B)$ due eventi $A, B \neq \phi$ per cui valga

1) $p(A/A+B) = p(B/A+B)$.

Notiamo subito che, se $A \sim B$ necessariamente $p(A/A+B) \neq 0$ essendo

$1 = p(A+B/A+B) = p(A/A+B) + p(B/A+B) - p(AB/A+B)$.

PROPOSIZIONE 1 - *La relazione* $\sim$ *è una relazione di equivalenza.*

Dim.: Le proprietà simmetrica e riflessiva sono ovvie. Per la proprietà transitiva si considerino tre eventi A, B, C, tali che $A \sim B$, $B \sim C$. Per l'additività della probabilità condizionata si può scrivere:

$$\begin{aligned} p(A+B+C/A+B+C) &= p(A/A+B+C) + p(B/A+B+C) + \\ &+ p(C/A+B+C) - [p(AB/A+B+C) + p(BC/A+B+C) + \\ &+ p(AC/A+B+C) - p(ABC/A+B+C)] \end{aligned}$$

e, usando la proprietà (iii'), ed indicando con K la somma dentro parentesi quadra, segue:

$$\begin{aligned} p(A+B+C/A+B+C) &= p(A/A+C)\, p(A+C/A+B+C) + \\ &+ p(B/A+B)\, p(A+B/A+B+C) + \\ &+ p(C/C+B)\, p(C+B/A+B+C) - K. \end{aligned}$$

In modo analogo si ottiene

$$\begin{aligned} p(A+B+C/A+B+C) &= p(C/A+C)\, p(A+C/A+B+C) + \\ &+ p(A/A+B)\, p(A+B/A+B+C) + \\ &+ p(B/B+C)\, p(B+C/A+B+C) - K \end{aligned}$$

e quindi risulta $p(A/A+C) = p(C/A+C)$, cioè $A \sim C$, se proviamo che

2) $p(A+C/A+B+C) \neq 0$.

Infatti $p(A + C/A + B + C) = 0$ implica

$$p(A/A + B)\, p(A + B/A + B + C) = p(A/A + B + C) = 0$$

e quindi

$$p(A + B/A + B + C) = 0 \text{ poiché } p(A/A + B) \neq 0.$$

Ciò è assurdo dal momento che

$$p(A+B/A+B+C) + p(A+C/A+B+C) \geq p(A+B+C/A+B+C) = 1.$$

Vale la seguente Proposizione di verifica immediata

PROPOSIZIONF 2 - *Posto* $A \sim_H B$ *se* $p(A/H) = p(B/H)$, *valgono le seguenti affermazioni:*

i) *Se* $H \subset H'$ *allora* $A \sim_H B$ *implica* $AH \sim_{H'} BH$,
se inoltre $p(H/H') \neq 0$ *allora* $A \sim_H B$ *se e solo se* $AH \sim_{H'} BH$.

ii) *Se* $A+B \subset H \subset H'$ *allora* $A \sim_H B$ *implica* $A \sim_{H'} B$,
se inoltre $p(H/H') \neq 0$ *allora* $A \sim_H B$ *se e solo se* $A \sim_{H'} B$.

iii) *Se* $A+B \subset H$ *allora* $A \sim B$ *implica* $A \sim_H B$,
se inoltre $p(A+B/H) \neq 0$ *allora* $A \sim B$ *se e solo se* $A \sim_H B$.

iv) *Se* $A \sim B$ *allora* $p(A) = p(B)$,
se inoltre $p(A+B) \neq 0$ *allora* $A \sim B$ *se e solo se* $p(A) = p(B)$.

Questa Proposizione mette in evidenza che la massima discriminazione si ha per $H = A+B$; pertanto essa fornisce una giustificazione della definizione adottata.

Vogliamo notare che nella Proposizione 2 l'ipotesi $p(H/H') \neq 0$ giuoca un ruolo essenziale. Diamo a questo proposito un controesempio all'affermazione (iv): si consideri l'intervallo $[0, 1]$ con una probabilità condizionata p per cui i punti risultino equivalenti in probabilità (tale p esiste, vedi teorema 3 di [1]). Se A è un singolo punto e B l'insieme di due punti distinti dal primo, si ha ovviamente:

$$p(A) = p(B) = 0 \qquad \text{mentre} \quad p(A/A+B) = 1/3 \quad p(B/A+B) = 2/3.$$

Nella seguente proposizione vengono confrontati due eventi equivalenti con gli eventi che si ottengono da questi con operazioni logiche.

PROPOSIZIONF 3 - *Dati due eventi* A, B, *se* $A \sim B$, *le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i) $p(A/A+B) = 1$

ii) $A \sim A+B$

iii) $A \sim AB$

iv) $p(A \div B/A+B) = 0$ *($\div$ differenza simmetrica)*

v) $p(A-B/A) = 0$ *(o, simmetricamente, $p(B-A/B) = 0$)*

Dim.: Si osservi intanto che:

3) *se* $A \subset B$, *si ha* $A \sim B$ *se e solo se* $p(A/A+B) = 1$.

Da (3) segue immediatamente che (i) è equivalente a (ii). Per dimostrare che (i) è equivalente a (iii), si consideri l'uguaglianza:

$$1 = p(A/A+B) + p(B/A+B) - p(AB/A+B) =$$
$$= 2p(A/A+B) - p(AB/A)\, p(A/A+B) = p(A/A+B)\,[2\text{-}p(AB/A)]$$

da cui segue immediatamente che $p(AB/A) = 1$ se e solo se $p(A/A+B) = 1$. Per la (3) segue l'asserto.

Per dimostrare (i) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v), basta considerare le uguaglianze:

$$1 = p(B/A+B) + p(A-B/A+B) = p(A/A+B) + p(B-A/A+B) =$$
$$= p(A/A+B) + p(A-B/A)\, p(A/A+B).$$

3. - **Ordinamento in probabilità**

Sull'insieme $\mathcal{S}$ delle classi di equivalenza definite dalla relazione (1), definiamo una relazione di ordine.

DEFINIZIONE 2 - Date $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}$ diremo che $\mathcal{A}$ *precede* $\mathcal{B}$ (in simboli $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$) se per ogni $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ vale la disuguaglianza:

4) $p(A/A+B) \leqslant p(B/A+B)$.

PROPOSIZIONE 4 - *La relazione* $\leqslant$ *è un ordinamento totale su* $\mathcal{S}$.

Dim.: Per dimostrare che tale relazione è di ordine si noti che le proprietà riflessiva e antisimmetrica sono immediate e che la proprietà transitiva si dimostra procedendo in modo quasi del tutto analogo a quanto fatto nella Proposizione 1.

Per dimostrare che l'ordinamento è totale si osservi intanto che se $A \sim A'$ e $B \sim B'$, allora

5) $p(A+B/A+B+A'+B') \neq 0$ e analogamente

$p(A'+B'/A+B+A'+B') \neq 0$.

Si può infatti scrivere

$$p(A+B/A+B+A'+B') = p(A/A+B)\, p(A+B/A+B+A'+B') +$$
$$+ p(B/B+B')\, p(B+B'/A+B+A'+B') - p(AB/A+B+A'+B').$$

Da questo segue che se $p(A+B/A+B+A'+B') = 0$ allora sarebbe $p(B+B'/A+B+A'+B') = 0$ e, ragionando analogamente,

$$p(A+A'/A+B+A'+B') = 0.$$

Ciò è assurdo poiché

6) $p(A+B+A'+B'/A+B+A'+B') \leq p(A+A'/A+B+A'+B') +$
$+ p(B+B'/A+B+A'+B')$.

Dimostriamo ora che due classi sono sempre confrontabili fra loro. Siano A e B due eventi che verificano la (4), e siano A' e B' due eventi distinti da A e B e tali che $A \sim A'$ e $B \sim B'$.

Si considerino le uguaglianze:

$$
\begin{aligned}
7)\quad & p(A/A+B)\, p(A+B/C) + p(A'/A+A')\, p(A+A'/C) + \\
& + p(B/B+B')\, p(B+B'/C) + \\
& + p(B'/A'+B')\, p(A'+B'/C) - K = p(C/C) = \\
& = p(A/A+A')\, p(A+A'/C) + p(A'/A'+B')\, p(A'+B'/C) + \\
& + p(B/A+B)\, p(A+B/C) + p(B'/B+B')\, p(B+B'/C) - K
\end{aligned}
$$

dove $C = A+B+A'+B'$ e K è la somma delle probabilità condizionate a C di tutti i possibili prodotti dei quattro eventi.

Dalla (7), tenendo conto della (5) e delle relazioni tra gli eventi A, A', B, B' segue:

$$p(A'/A'+B') \leq p(B'/A'+B').$$

Questo dimostra che, se per A e B vale la (4), essa vale anche per tutti gli elementi delle due rispettive classi di equivalenza.

Notiamo che la relazione di ordine definita con (4) è compatibile con l'inclusione di $\mathcal{S}(\Omega)$ e che la probabilità è monotona rispetto a questo ordinamento, nel senso precisato dalla seguente proposizione:

Proposizione 5 - *Se $A, B \in \mathcal{S}(\Omega)$ e $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ sono le rispettive classi di equivalenza, valgono le seguenti proprietà:*

i) *se $A \subset B$ allora $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$;*

ii) *se $p(A) < p(B)$ allora $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$.*

Dim.: La dimostrazione di (i) è immediata.

Per dimostrare (ii) basta considerare:

$$p(A) = p(A/A+B)\, p(A+B) \qquad p(B) = p(B/A+B)\, p(A+B).$$

Si osservi che la (ii) è invertibile solo se $p(B) \neq 0$; in altre parole, eventi di probabilità nulla possono stare in classi diverse.

In certi casi è possibile invertire la (i) nel senso che: se $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$ allora $\exists\ A \in \mathfrak{A}$ e $B \in \mathfrak{B}$ tali che $A \subset B$.

Tale proprietà non può valere incondizionatamente: infatti se $\mathrm{card}(\Omega) = 2$ la (i) è invertibile nel senso detto solo se i due eventi non banali sono equiprobabili. La successiva Proposizione 6 dà condizioni per la validità della proprietà suddetta.

PROPOSIZIONE 6 - *Se $p(.)$ è una probabilità continua e $\mathfrak{B}$ è una classe di equivalenza tale che $p(B) > 0$ per ogni $B \in \mathfrak{B}$, allora data comunque una classe $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$, esistono un elemento $A \in \mathfrak{A}$ e un elemento $B \in \mathfrak{B}$, tali che $A \subset B$.*

Dim.: Se $p(A) = 0$ per ogni $A \in \mathfrak{A}$, essendo $A+B \sim B$ segue immediatamente la tesi. Se viceversa $p(A) > 0$ è possibile costruire (cfr. Teorema 3.2 di [8]) un insieme $A' \subset B$ tale che $p(A') = p(A)$, e quindi $A' \subset \mathfrak{A}$.

Faremo ora alcune considerazioni sulla struttura d'ordine di $(\mathfrak{S}, \leqslant)$.

In generale non si può affermare niente sul minimo di $(\mathfrak{S}, <)$. Se però nel modello considerato gli eventi rappresentati dai singoli punti risultano equivalenti, la classe contenente questi (e solo questi!) risulta la classe minima in $(\mathfrak{S}, <)$ e ogni classe contenente insiemi finiti è formata da tutti e soli gli insiemi aventi la stessa cardinalità. Da quanto detto si deduce che le classi suddette non hanno massimo e che precedono tutte ogni classe contenente insiemi infiniti.

Se ci si limita ora ad analizzare le classi di $\mathfrak{S}$ contenenti insiemi infiniti è possibile fare la seguente affermazione valida in generale:

PROPOSIZIONE 7 - *Se p è una probabilità condizionata completa su $\mathfrak{S}(\Omega)$, le classi di equivalenza degli insiemi infiniti non hanno minimo in $(\mathfrak{S}, <)$.*

Dim.: Sia A un insieme infinito, se B e C sono due sottoinsiemi di A, anche essi infiniti e costituenti una partizione di A, poiché $B \sim A$ implica $p(B/A) = 1$ e quindi $p(C/A) = 0$, ne segue che almeno uno dei due sottoinsiemi precede A.

In seguito, come immediata conseguenza della Proposizione 10, potremo rilevare che non c'è minimo neppure se ci si limita a considerare insiemi infiniti della stessa cardinalità.

4. - Ordine di zeri o infinitesimi

DEFINIZIONE 3 - Se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B} \in \mathfrak{S}$ diremo che $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ *sono dello stesso ordine* (in simboli $\mathfrak{A} =^* \mathfrak{B}$) se $\forall A \in \mathfrak{A}$ e $B \in \mathfrak{B}$ valgono contemporaneamente

$$8) \qquad p(A/A+B) \neq 0 \quad \text{e} \quad p(B/A+B) \neq 0$$

DEFINIZIONE 4 - Diremo che la classe $\mathfrak{A}$ *è uno zero di ordine superiore a* $\mathfrak{B}$ (in simboli $\mathfrak{A} <^* \mathfrak{B}$) se $\forall A \in \mathfrak{A}$ e $B \in \mathfrak{B}$ vale

9) $\quad p(A/A+B) = 0 \quad$ (e conseguentemente $p(B/A+B) = 1$)

Si noti che, comunque si prendano due classi di equivalenza, queste sono nella relazione $=^*$ oppure nella $<^*$; infatti dalla (7) si deduce che due eventi sono nella relazione (8) (oppure nella (9)) se e solo se lo sono tutti gli eventi delle rispettive classi di equivalenza. Questo tra l'altro ci autorizzerà, in seguito, a indicare, per brevità di notazione, due classi nella relazione $=^*$ o $<^*$ usando due rispettivi rappresentanti di esse.

La relazione $=^*$ è una relazione di equivalenza in $\mathcal{S}$: la proprietà riflessiva e simmetrica sono immediate; per dimostrare la transitiva si consideri la seguente uguaglianza:

$$p(A/A+B)\, p(A+B/A+B+C) + p(B+C-A/A+B+C) =$$
$$= p(A/A+C)\, p(A+C/A+B+C) + p(B+C-A/A+B+C).$$

Da questa e dalla (2) segue che $p(A/A+C) \neq 0$ e, operando in modo analogo, $p(C/A+C) \neq 0$.

La relazione $<^*$ induce un ordinamento stretto su $\mathcal{S}$ che, per quanto detto sopra, diventa un ordinamento totale, nel quoziente rispetto alla relazione $=^*$.

Per dimostrare che la relazione $<^*$ è transitiva, si considerino $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$ e $C \in \mathfrak{C}$ con $\mathfrak{A} <^* \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} <^* \mathfrak{C}$, e le seguenti disuguaglianze:

$$0 = p(A/A+B) \geqslant p(A/A+B+C) =$$
$$= p(A/A+C)\, p(A+C/A+B+C) \geqslant p(A/A+C)\, p(C/A+B+C);$$

d'altra parte $p(C/A+B+C) = 1$, poiché

$$p(A+B/A+B+C) \leq p(A/A+B)\, p(A+B/A+B+C) +$$
$$+ p(B/B+C)\, p(B+C/A+B+C) = 0.$$

Notiamo che questo ordinamento è compatibile con l'ordinamento $\leqslant$ nel senso che se $\mathfrak{A} <^* \mathfrak{B}$ allora $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ e viceversa se $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$ allora $\mathfrak{A} \leqslant^* \mathfrak{B}$.

L'ordinamento definito in questo paragrafo è già stato introdotto da Rényi [7]. Noi qui ne studiamo le proprietà anche in relazione con l'ordinamento in probabilità definito nel paragrafo precedente.

La seguente proposizione è in parte una rilettura in termini di ordine di zeri, di proprietà già enunciate e, inoltre, fornisce criteri per l'equivalenza in probabilità.

Proposizione 8 - *Se A e $B \in \mathcal{S}(\Omega)$, valgono le seguenti proprietà:*

i) *$A+B \sim B$ se e solo se $A-B <^* B$*

ii) *Se $A <^* B$ allora $B \sim A+B \sim B-A$*

iii) *Se $A =^* B$ allora $A =^* A+B$*

iv) *Se* $A \subset B$, $A \sim B$ *allora* $B - A <^* A$.

Dim.: La condizione necessaria della (i) deriva dalla (iv) della Proposizione 3. Per la condizione sufficiente basta considerare

$$p(A+B/A+B) = p(B/A+B) + p(A-B/A+B).$$

Dalla uguaglianza suddetta discende anche la prima parte della (ii). Se poi si considera che $AB \subset A$ e $A <^* B$ implica $AB <^* B$ cioè $p(AB/B) = 0$, dalla (3) risulta $B \sim B - A$.

La (iii) discende immediatamente dalla definizione di $=^*$.

La (iv) segue, come la (i), dalla Proposizione 3.

Qui di seguito diamo ulteriori informazioni sulla struttura d'ordine di $(\mathcal{S}, <^*)$. Confrontiamo dapprima, a tale scopo, l'ordine di un insieme numerabile $A \subset \mathcal{S}(\Omega)$ rispetto ai suoi elementi.

Non si possono, su questo argomento, fare affermazioni di validità generale, infatti A è dello stesso ordine di ogni suo punto se (e solo se) $p(./A)$ è una probabilità per cui tutti i punti di A sono atomi, cioè $p(\{x\}/A) > 0$; A può essere dello stesso ordine di un suo solo punto x nel caso che $p(./A)$ sia una probabilità concentrata in x, oppure può essere di ordine superiore a tutti i suoi punti, come si vede, ad esempio, dalla seguente:

Proposizione 9 - *Data una successione di eventi* $A_i \subset \mathcal{S}(\Omega)$, *se gli* A_i *sono tutti equivalenti in probabilità e se per ogni* $i \neq j$ $A_i A_j <^* A_j$, *allora gli* A_i *sono zeri di ordine superiore rispetto all'unione, cioè:*

$$\sum_1^\infty {}_i A_i {}^*\!> A_j \qquad \text{per ogni } j \in N$$

Dim.: Essendo gli A_i equivalenti, per $i \neq j$ si ha $p(A_i/A_i+A_j) = 1/2$ da cui deriva $p(A_i/A_1+\ldots+A_n) = 1/n$ $i = 1, 2, \ldots, n$.

Poiché, d'altra parte, si ha

$$p(A_j \,/\, \sum_1^\infty {}_i A_i) \leq p(A_j/A_1 + \ldots + A_n)$$

segue immediatamente la tesi.

Sia ora A un qualunque insieme infinito di $\mathcal{S}(\Omega)$:

Lemma - *Se* $\operatorname{card}(A) = \alpha$, α *infinito, esiste una partizione* $\mathcal{F}$ *di* A *tale che* $\operatorname{card}(\mathcal{F}) = \alpha$ *e, per ogni* $F \in \mathcal{F}$, $\operatorname{card}(F) = \alpha$.

Dim.: La dimostrazione è immediata, considerando che A è in corrispondenza biunivoca con $A \times A = \bigcup_{x \in A} A \times \{x\}$.

Proposizionf 10 - *Sia* $A \in \mathcal{S}(\Omega)$ *tale che* $\operatorname{card}(A) > \chi_0$. *Esiste un sottoinsieme* B *di* A *con* $\operatorname{card}(B) = \operatorname{card}(A)$ *e tale che* $B <^* A$.

Dim.: Data una partizione $\mathfrak{F}$ di A di cardinalità $\alpha = \mathrm{card}(A)$ in insiemi di cardinalità α, al più una infinità numerabile di tali insiemi ha probabilità $p(./A)$ positiva. Esiste quindi almeno un $B \in \mathfrak{F}$ tale che $p(B/A) = 0$.

Per A numerabile la Proposizione 10 può non valere, cioè è possibile che tutti i sottoinsiemi numerabili di A siano dello stesso ordine di A, come si può vedere considerando il caso in cui $p(./A)$ è una probabilità per cui tutti i punti di A sono atomi. Se però si fanno ipotesi sugli elementi di A, è possibile estendere il risultato enunciato nella Proposizione 10 anche agli insiemi numerabili, come risulta dalla seguente:

PROPOSIZIONE 11 (De Finetti [2]) - *Data una successione di eventi incompatibili e equivalenti in probabilità, esiste una sottosuccessione $(A_j)_{j \in M}$, $M \subset N$, tale che*

$$\sum_{j \in M} A_j <^* \sum_{i \in N} A_i .$$

Dim.: Sia $E_1 = \sum_{i \in N} A_i$ e sia $E_n = \sum_{j \in M_n} A_j$, ove M_n è infinito e tale che $M_{n-1} \supset M_n$ e inoltre $p(E_n/E_{n-1}) \leq 1/n-1$.

Ovviamente $E_n - E_{n+1}$ contiene qualche $A_i \in (A_j)_{j \in M_n}$ e si può costruire un E nel modo seguente:

$$E = \sum_n A_{k_n}, \text{con } A_{k_n} \subset E_n - E_{n+1} .$$

Dalla seguente disuguaglianza

$$p(E/E_1) \leq p(E/E_n) = p(EE_n/E_n) = p(A_{k_n}/E_n) + p(EE_{n+1}/E_n),$$

considerando che per la Proposizione 9 $p(A_{k_n} E_n) = 0$, discende:

$$p(E/E_1) < 1/n,$$

da cui la tesi.

Si osservi che nella dimostrazione non si usa in realtà il fatto che gli A_i siano equivalenti, ma soltanto che $A_{k_n} <^* E_n$; la proposizione vale quindi in ipotesi più generali.

Spesso in problemi di probabilità si ha bisogno di modelli in cui i punti siano equivalenti (in probabilità), non essendoci a priori nessuna ragione per considerare un evento «più probabile» di un altro. In [1] si dimostra che tali modelli esistono e che è possibile costruirli come estensione di una qualunque probabilità purché non atomica.

Qui, prendendo in considerazione i modelli suddetti, trarremo alcune conclusioni sulla struttura d'ordine di $(\mathcal{S}, <)$ e $(\mathcal{S}, <^*)$.

PROPOSIZIONE 12 - *Se p è una probabilità condizionata completa su $\mathcal{S}(\Omega)$, per cui i singoli punti sono di probabilità nulla ed equiva-*

lenti in probabilità, valgono le seguenti proprietà:

i) $(\mathcal{S}, <)$ *ha un segmento iniziale* $\mathcal{S}'$ *isomorfo ad* $\mathbf{N}$, *costituito dalle classi di equivalenza degli insiemi finiti e in ogni classe ci sono tutti e soli gli insiemi della stessa cardinalità;*

ii) $\mathcal{S}'$ *non ha massimo e* $\mathcal{S}-\mathcal{S}'$ *non ha minimo;*

iii) $\mathcal{S}'$ *è una classe di equivalenza rispetto alla relazione* $=^*$ *ed è la classe minima rispetto all'ordinamento* $<^*$;

iv) *se* α *è un cardinale infinito e* $\mathcal{S}_\alpha = \{\mathcal{A} \in \mathcal{S} \,/\, \exists A \in \mathcal{A}, \mathrm{card}(A) = \alpha\}$, $(\mathcal{S}_\alpha, <^*)$ *non ha minimo.*

Le dimostrazioni sono immediate usando le Proposizioni 7, 9, 10, 11.

5. - **Probabilità condizionate e misure in un campo iperreale**

In questo paragrafo vogliamo rileggere le relazioni definite nei paragrafi precedenti in termini di misure a valori in un campo iperreale.

Riportiamo qui brevemente alcune note proprietà dei campi ordinati contenenti i reali.

Sia K un campo totalmente ordinato contenente $\mathbf{R}$. Indichiamo con F l'anello degli elementi finiti di K, cioè $F = \{x \in K \,/\, \exists r \in R \quad x<r\}$, e con I l'ideale di F costituito dagli infinitesimi, cioè

$$I = \{x \in F \,/\, \forall \varepsilon \in R^+ \quad 0 < |x| < \varepsilon\}.$$

Due elementi x, y di F si dicono dello stesso ordine (in simboli $x =^* y$) se $x/y \in F - I$; x si dice di ordine superiore a $y (x <^* y)$ se $x/y \in I$.

Vogliamo notare che l'uso qui degli stessi simboli usati per le relazioni definite nel precedente paragrafo non è arbitrario, come si vedrà dalla Proposizione 13.

Vogliamo inoltre notare che, poiché gli elementi di $F-I$ sono tutti dello stesso ordine, le definizioni ora date acquistano effettivo interesse nel caso che x e y siano infinitesimi.

La proiezione canonica $Re: F \to F/I$ associa ad ogni elemento la sua parte reale (essendo F/I isomorfo ad $\mathbf{R}$).

E' noto ([6]) che, data una probabilità condizionata completa p su un'algebra $\mathcal{A}$ esiste una misura di probabilità m finitamente additiva, *strettamente positiva* (cioè $m(B) \neq 0$ se $B \neq \phi$), a valori in un campo K estensione ordinata di $\mathbf{R}$, e tale che

$$p(A/B) = Re \frac{m(AB)}{m(B)}$$

Chiameremo una tale m una K-misura associata a p. E' ovvio che la probabilità risulta la parte reale della misura m, cioè

$$p(A) = Re(m(A)).$$

PROPOSIZIONF 13 - *Sia p una probabilità condizionata completa su $\mathcal{S}(\Omega)$ e m una K-misura associata a p. Per ogni $A, B \in \mathcal{S}(\Omega)^0$, valgono le seguenti equivalenze:*

i) $A <^* B$ *se e solo se* $Re \dfrac{m(A)}{m(B)} = 0$ *cioè se e solo se* $m(A) <^* m(B)$

ii) $A < B$ *se e solo se* $Re \dfrac{m(A)}{m(B)} < 1$

PROPOSIZIONF 14 - *Siano p e m come nella proposizione precedente. Per ogni $A, B \in \mathcal{S}(\Omega)^0$ sia $m(B) - m(A) = i$. Valgono le seguenti equivalenze:*

i) $A <^* B$ *se e solo se* $m(A) <^* i$

ii) $A < B$ *se e solo se* $m(A) \leqslant^* i,\ i > 0$

Le dimostrazioni delle due proposizioni sono elementari; a titolo esemplificativo dimostriamo la (ii) delle due proposizioni:

$$A < B \text{ se e solo se } Re \frac{m(A)}{m(A+B)} \; \frac{m(A+B)}{m(B)} = k < 1$$

(ciò dimostra la (ii) della 13).

Posto ora $\dfrac{m(A)}{m(B)} = k + j$ con $k \in \mathbf{R}$ $j \in I$, per quanto dimostrato sopra, si ha $A < B$ se e solo se $0 \leqslant k < 1$, e quindi $i > 0$; poiché $\dfrac{m(A)}{i} = \dfrac{k+j}{1-k-j}$, $A < B$ risulta equivalente a $\dfrac{m(A)}{i} \in F^+$ cioè $m(A) \leqslant^* i,\ i > 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. COLETTI, G. REGOLI, *Costruzione di probabilità condizionate con eventi di probabilità nulla assegnati,* Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983).

[2] B. DE FINETTI, *Les probabilites nulles,* Bull. Sc. Math. 60 (1936) 275-288.

[3] B. DE FINETTI, *Sulle probabilità numerabili e geometriche,* Rend. Ist. Lombardo, 6i (1928) 817-824.

[4] B. DE FINETTI, *Teoria delle probabilità.* Einaudi 1970.

[5] L. E. DUBINS, *Finitely additive conditional probabilities, conglomerability and disintegrations,* Ann. Probability 3 (1975) 89-99.

[6] P. H. KRAUSS, *Representation of conditional probability measures on Boolean algebras,* Acta Math. Sci. Hungar. 19 (1968) 229-241.

[7] A. RÉNYI, *Theory of Probability and its applications,* vol. I (1956).

[8] R. SCOZZAFAVA, *Completa additività su opportune successioni di insiemi di una misura di probabilità semplicemente additiva e fortemente atomica,* Boll. U.M.I. (5) 16-B (1979) 639-648.