SUI GRUPPI IN CUI L'INTERSEZIONE DI DUE QUALUNQUE SOTTOGRUPPI NON CONFRONTABILI E' ABELIANA (parte seconda) (*)

di FRANCESCO DE GIOVANNI (a Napoli) (**)

SOMMARIO. - *In questa nota si continua lo studio della classe (P) dei gruppi nei quali l'intersezione di due sottogruppi non confrontabili è abeliana. Sono esaminati i gruppi localmente supersolubili e localmente risolubili in (P).*

SUMMARY. - *In this paper the study of the class (P) of groups in which the intersection of incomparable subgroups is abelian is continued. Locally supersoluble and locally soluble groups in (P) are examined.*

Nella prima parte di questo lavoro ([3]) l'Autore ha preso in esame la classe (P) dei gruppi nei quali l'intersezione di due qualunque sottogruppi non confrontabili è abeliana, caratterizzando i gruppi supersolubili finiti e i gruppi localmente nilpotenti appartenenti a (P). Tale ricerca prende spunto da alcuni lavori di CHAADAEV ([1], [2]) sui gruppi finiti non risolubili in cui l'intersezione di due qualunque sottogruppi non confrontabili di ordine pari è abeliana.

In questa seconda parte sono esaminati i gruppi localmente supersolubili e localmente risolubili in (P) e si prova, tra l'altro, che sono abeliani i gruppi localmente risolubili appartenenti a (P) e dotati di qualche elemento aperiodico.

(*) Pervenuto in Redazione il 12 gennaio 1981. Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni del C.N.R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Via Mezzocannone 8 - 80134 Napoli.

Notazioni e terminologia sono quelle già usate in [3]; in particolare si fa riferimento a [7] e [8]. La numerazione prosegue quella di [3].

N. 3 Gruppi localmente supersolubili appartenenti a (P) .

Ci si limiterà qui a considerare i gruppi localmente supersolubili periodici G con $|\omega(G)| \leq 3$. Infatti si proverà nel successivo N. 4 che i gruppi localmente risolubili in (P) dotati di qualche elemento aperiodico sono abeliani, sicché ci si può limitare al caso periodico e, per la 1.2 (cfr. [3]), supporre $|\omega(G)| \leq 3$.

TEOREMA 3.1. *Sia G un gruppo localmente supersolubile periodico dotato di qualche sottogruppo di SYLOW non localmente ciclico e con $|\omega(G)| = 3$. Sono equivalenti:*

- (i) $G \in (P)$;
- (ii) G è abeliano.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) Esiste in G un sottogruppo finito H dotato di qualche sottogruppo di SYLOW non ciclico e con $|\omega(H)| = 3$. Qualunque siano gli elementi x e y di G , il gruppo finito $HV\langle x, y \rangle$ appartiene a (P) , sicché, per il TEOREMA 2.1, è abeliano e x e y sono permutabili.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ovvvia.

TEOREMA 3.2. *Sia G un gruppo localmente supersolubile periodico, a sottogruppi di SYLOW localmente ciclici e non di ordine primo, e con $|\omega(G)| = 3$. Sono equivalenti:*

- (i) $G \in (P)$;
- (ii) G è abeliano.

Dimostrazione. Si procede come nel TEOREMA 3.1, utilizzando il TEOREMA 2.2.

TEOREMA 3.3. *Sia G un gruppo localmente supersolubile periodico a sottogruppi di SYLOW localmente ciclici e con $|\omega(G)| = 3$. Se i sottogruppi di SYLOW di G relativi a due numeri primi distinti sono infiniti, risultano equivalenti:*

- (i) $G \in (P)$;
- (ii) G è abeliano.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sia $\omega(G) = \{p, q, r\}$, e si supponga

$p > q > r$; per il TEOREMA 3.2 ci si può limitare al caso in cui G è dotato di qualche sottogruppo di SYLOW di ordine primo. Denotati con S_p il p -sottogruppo di SYLOW di G e con S_q e S_r , rispettivamente un q -sottogruppo di SYLOW e un r -sottogruppo di SYLOW di G , si distinguono tre casi:

$$(1) S_p \simeq Z_p, S_q \simeq Z(q^\infty), S_r \simeq Z(r^\infty).$$

Qualunque sia il q -sottogruppo di SYLOW V di G , posto $H = S_p V$, si ha $S_p \leq Z_H(S_p)$, e quindi $H/Z_H(S_p)$, in quanto isomorfo ad un quoziente finito di $V \simeq Z(q^\infty)$, è identico, per cui $H = Z_H(S_p)$ è abeliano. Se x è un q -elemento di G , denotato con y un elemento di S_q di periodo eguale a quello di x , il gruppo finito $\langle S_p, x, y \rangle$ è un $\{p, q\}$ -gruppo, e quindi è del tipo $S_p L$, con L q -gruppo, e quindi è abeliano per quanto già visto. Dopo di ciò il gruppo ciclico L è l'unico q -sottogruppo di SYLOW di $S_p L$, e se ne deduce che $x \in S_q$. Pertanto S_q è normale in G e $S_p S_q$ è abeliano; come nella prima parte si prova che $S_p S_r$ è abeliano. Qualunque sia il numero naturale n , si denoti con A_n il sottogruppo di ordine q^n di S_q e con B_n il sottogruppo di ordine r^n di S_r . Ogni A_n è normale in G e per ogni $n > 1$, il TEOREMA 2.6 applicato al gruppo finito $S_p A_n B_m$ assicura che $A_n B_m$ è abeliano per ogni $m \in \mathbf{N}$, per cui tale è $S_q S_r$. Da ciò segue l'abelianità di G .

$$(2) S_p \simeq Z(p^\infty), S_q \simeq Z_q, S_r \simeq Z(r^\infty).$$

Qualunque sia il numero naturale n , si denoti con A_n il sottogruppo di ordine p^n di S_p e con B_n il sottogruppo di ordine r^n di S_r ; ogni A_n è normale in G e, qualunque sia $n > 1$, il TEOREMA 2.14 applicato al gruppo finito $A_n B_{m+1}$ assicura che $A_n B_m$ è abeliano per ogni $m \in \mathbf{N}$, sicché tale è $S_p S_r$ e $S_p S_r \leq Z_G(S_p)$. Per assurdo sia $Z_G(S_p) = S_p \times S_r$; il sottogruppo S_r , in quanto caratteristico in $Z_G(S_p) \triangleleft G$, è normale in G , sicché tale è anche ogni B_n . Qualunque sia $n > 1$, il TEOREMA 2.4 applicato al gruppo finito $A_n S_q B_m$ assicura che $A_n S_q$ è abeliano, per cui tale è $S_p S_q$, e da ciò segue, come nel caso (1), che S_q è normale in G . Dopo di ciò G è prodotto diretto dei suoi sottogruppi di SYLOW ed è quindi abeliano, contro l'ipotesi $Z_G(S_p) < G$. Pertanto si ha $S_p \leq Z(G)$. Allora $S_p S_q$ è abeliano e, come in (1), S_q è normale in G . Considerato il gruppo $H = S_q S_r$, si ha $S_q \leq Z_H(S_q)$ e quindi $H/Z_H(S_q)$, in quanto isomorfo a un quoziente finito di $S_r \simeq Z(r^\infty)$, è identico, sicché $H = Z_H(S_q)$ è abeliano. Da ciò segue l'abelianità di G .

$$(3) S_p \simeq Z(p^\infty), S_q \simeq Z(q^\infty), S_r \simeq Z_r.$$

Qualunque sia il numero naturale n si denoti con A_n il sottogruppo di ordine p^n di S_p e con B_n il sottogruppo di ordine q^n di S_q ; ogni A_n è normale in G . Qualunque sia $n > 1$, il TEOREMA 2.14 applicato al gruppo finito $A_n B_{m+1}$ assicura che $A_n B_m$ è abeliano per ogni $m \in \mathbf{N}$, sicché $S_p S_q$ è abeliano e, come in (1), S_q è normale in G , sicché tale è anche ogni B_n . Qualunque siano $n > 1$ e $m > 1$, il

TEOREMA 2.3 assicura che il gruppo finito $A_n B_m S_r$ è abeliano, per cui tale è anche G .

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ovvvia.

TEOREMA 3.4. Sia G un gruppo localmente supersolubile periodico infinito con $\omega(G) = \{p, q, r\}$, e siano S_p un p -sottogruppo di SYLOW, S_q un q -sottogruppo di SYLOW e S_r un r -sottogruppo di SYLOW di G . Se $S_p \simeq Z(p^\infty)$, $S_q \simeq Z(q^k)$ ($1 < k < \infty$) e $S_r \simeq Z_r$, risulta:

(a) Se $q > r$, sono equivalenti:

(i) $G \in (P)$;

(ii) G è abeliano.

(b) Se $q < r$, sono equivalenti:

(i) $G \in (P)$;

(ii) $|G : Z(G)|$ divide qr .

Dimostrazione. Qualunque sia $n > 1$, si denoti con A_n il sottogruppo di ordine p^n di S_p .

(a) (i) $\Rightarrow$ (ii) Sia in primo luogo $p > r$; qualunque sia $n > 1$, il TEOREMA 2.3 assicura che $A_n \vee S_q \vee S_r$ è abeliano, per cui tale è anche G . Sia invece $p < r$, e quindi $S_q \triangleleft G$; posto $H = S_p S_q$, si ha $S_q \leq Z_H(S_q)$ e, come nel TEOREMA 3.3, H è abeliano. Qualunque sia $n > 1$, il TEOREMA 2.4 applicato al gruppo finito $S_q S_r A_n$ assicura che $S_q S_r$ è abeliano, sicché, come nella (1) del TEOREMA 3.3, S_r è normale in G . Poiché allora $S_r S_p$ è abeliano, tale è anche G .

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ovvvia.

(b) Ogni A_n risulta normale in G e quindi tale è anche S_p . Infatti: se $p > r$ si ha $S_p \triangleleft G$ e ogni $A_n \triangleleft G$; se $p < q$, $S_q S_r$ è finito e normale e perciò è centralizzato da $S_p \simeq Z(p^\infty)$, per cui $A_n \triangleleft G$. Se infine $q < p < r$, come prima S_r è centralizzato da S_p , sicché dalla abelianità di $S_r S_p$ segue che S_p è normale in G e ogni $A_n \triangleleft G$. (i) $\Rightarrow$ (ii) Qualunque sia $n \in \mathbf{N}$, i TEOREMI 2.4 e 2.6 assicurano che i complementi di SYLOW del gruppo finito $A_{n+1} \vee S_q \vee S_r$ sono almeno minimali non abeliani, per cui $A_n S_q$ e $A_n S_r$ sono abeliani, e quindi tali sono anche $S_p S_q$ e $S_p S_r$, sicché $S_p \leq Z(G)$. Sia M l'unico sottogruppo massimale di S_q . Poiché i p -complementi di $A_n \vee S_q \vee S_r$ sono almeno minimali non abeliani, il sottogruppo⁽³⁾ MS_r è abeliano e $M \leq Z(G)$. Dopo di ciò $|G : Z(G)|$ divide qr .

(ii) $\Rightarrow$ (i) Siano H e K sottogruppi non confrontabili di G . Poiché⁽³⁾ $S_r \triangleleft G$, da $S_r \not\leq H \wedge K$ segue che $H \wedge K$ è un r' -gruppo ed è quin-

(3) S_r risulta normale in G . Infatti, se $r < p$, $S_p S_r$ è abeliano e normale come nella (1) del TEOREMA 3.3; se invece $r > p$, è ovvio che $S_r \triangleleft G$.

di abeliano; si può quindi supporre $S_r \leq H \wedge K$. Se risultasse $S_q \leq H \wedge K$, si avrebbe $S_r S_q \leq H \wedge K$, il che è assurdo, giacché $S_r S_q \triangleleft G$ e $G/S_r S_q \simeq Z(p^\infty)$. Risulta quindi $S_q \not\leq H \wedge K$ e perciò $H \wedge K \wedge S_q < S_q$ è centrale in G . Dopo di ciò si ha $H \wedge K =$

$$\begin{aligned} &= (S_r(S_p \times S_q)) \wedge (H \wedge K) = S_r((S_p \times S_q) \wedge (H \wedge K)) = \\ &= S_r((S_p \wedge H \wedge K) \times (S_q \wedge H \wedge K)), \text{ per cui } H \wedge K \text{ è abeliano e } \\ &G \in (P). \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 3.5. Esistono gruppi non abeliani appartenenti a (P) verificanti le ipotesi del **TEOREMA 3.4 (b)**, come illustrano le situazioni seguenti:

- (1) Sia $\delta : Z_9 \rightarrow \text{Aut}(Z_7)$ un omomorfismo di nucleo il sottogruppo di ordine 3 di Z_9 , e sia $H = [Z_7]_\delta \cdot Z_9$; il gruppo $G = Z(2^\infty) \times H$ è non abeliano e appartiene a (P) .
- (2) Sia H come in (1) e sia p un numero primo ≥ 11 ; il gruppo $G = H \times Z(p^\infty)$ è non abeliano e appartiene a (P) .
- (3) Sia $\delta : Z_{25} \rightarrow \text{Aut}(Z_{11})$ un omomorfismo di nucleo il sottogruppo di ordine 5 di Z_{25} , e sia $H = [Z_{11}]_\delta \cdot Z_{25}$. Il gruppo $G = Z(7^\infty) \times H$ è non abeliano e appartiene a (P) .

TEOREMA 3.6. *Sia G un gruppo localmente supersolubile periodico infinito a sottogruppi di SYLOW localmente ciclici e con $|\omega(G)| = 3$. Se i sottogruppi di SYLOW di G relativi a due numeri primi distinti hanno ordine primo, sono equivalenti:*

- (i) $G \in (P)$;
- (ii) il sottogruppo di SYLOW infinito di G è centrale.

Dimostrazione. Sia $\omega(G) = \{p, q, r\}$ e siano S_p, S_q e S_r rispettivamente un p -sottogruppo di SYLOW, un q -sottogruppo di SYLOW e un r -sottogruppo di SYLOW di G , e sia $S_p \simeq Z(p^\infty)$. Come nella dimostrazione del **TEOREMA 3.4** si prova che S_p è normale in G e quindi, denotato con A_n il sottogruppo di ordine p^n di S_p , tale è anche ogni A_n .

(i) $\Rightarrow$ (ii) Qualunque sia $n \in \mathbf{N}$, i **TEOREMI 2.4, 2.6 e 2.8** assicurano che il gruppo finito $A_{n+1} \vee S_q \vee S_r$ ha i complementi di SYLOW almeno minimali non abeliani, per cui $A_n S_q$ e $A_n S_r$ sono abeliani, sicché $A_n \leq Z(G)$ e $S_p \leq Z(G)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sia $q > r$ e quindi $S_q \triangleleft G$. Siano H e K sottogruppi non confrontabili di G ; se $S_q \not\leq H \wedge K$, $H \wedge K$ è un q' -gruppo ed è quindi abeliano. Sia invece $S_q \leq H \wedge K$; se $H \wedge K$ contenesse $S_q S_r \triangleleft G$, si verrebbe ad un assurdo giacché $G/S_q S_r \simeq Z(p^\infty)$. Allora da $S_q \leq H \wedge K$ e $S_q S_r \not\leq H \wedge K$ segue che $H \wedge K$ è un r' -gruppo ed è quindi abeliano, per cui $G \in (P)$.

OSSERVAZIONE 3.7. Esistono gruppi non abeliani appartenenti a (P) e verificanti le ipotesi del TEOREMA 3.6, come illustrano le situazioni seguenti:

- (1) Sia α un automorfismo di periodo 3 di Z_7 , e sia $H = [Z_7] \langle \alpha \rangle$; il gruppo $G = Z(2^\infty) \times H$ è non abeliano e appartiene a (P) .
- (2) Sia H come in (1) e sia p un numero primo ≥ 11 ; il gruppo $G = H \times Z(p^\infty)$ è non abeliano e appartiene a (P) .
- (3) Sia α un automorfismo di periodo 5 di Z_{11} , e sia $H = [Z_{11}] \langle \alpha \rangle$; il gruppo $G = Z(7^\infty) \times H$ è non abeliano e appartiene a (P) .

Dai TEOREMI 3.1-3.6 discende la seguente caratterizzazione dei gruppi localmente supersolubili periodici infiniti appartenenti a (P) e con $|\omega(G)| = 3$.

TEOREMA 3.8. *Sia G un gruppo localmente supersolubile periodico infinito con $\omega(G) = \{p, q, r\}$; sono equivalenti:*

- (i) $G \in (P)$;
- (ii) G è un gruppo di uno dei tipi seguenti:
  - (a) G è abeliano;
  - (b) G è a sottogruppi di SYLOW localmente ciclici, con i sottogruppi di SYLOW relativi a due numeri primi distinti $(q, r$ con $q > r$) finiti, i q -sottogruppi di SYLOW di ordine primo e $|G/Z(G)| = qr$.

TEOREMA 3.9. *Sia G un gruppo localmente supersolubile periodico privo di sottogruppi di SYLOW localmente ciclici e con $|\omega(G)| = 2$. Sono equivalenti:*

- (i) $G \in (P)$;
- (ii) G è abeliano.

Dimostrazione. Segue dal TEOREMA 2.11.

TEOREMA 3.10. *Sia G un gruppo localmente supersolubile periodico appartenente a (P) e con $|\omega(G)| = 2$. I sottogruppi di SYLOW infiniti di G sono abeliani e quelli finiti sono abeliani o minimali non abeliani.*

Dimostrazione. Sia $\omega(G) = \{p, q\}$, e sia S_p un p -sottogruppo di SYLOW di G . Si supponga in primo luogo S_p infinito, e siano x e y elementi di S_p ; detto H un sottogruppo finito di S_p contenente propriamente $\langle x, y \rangle$, e K un q -sottogruppo finito non identico di G , il

TEOREMA 2.12 applicato al gruppo finito $H \vee K$ assicura che x e y sono permutabili, per cui S_p è abeliano. Sia invece S_p finito; detto K un q -sottogruppo finito non identico di G , ancora il TEOREMA 2.12 applicato al gruppo finito $S_p \vee K$ assicura che S_p è abeliano oppure minimale non abeliano.

TEOREMA 3.11. *Sia G un gruppo localmente supersolubile periodico con $\omega(G) = \{p, q\}$. Se i sottogruppi di SYLOW di G sono infiniti, risultano equivalenti:*

- (i) $G \in (P)$;
- (ii) G è abeliano.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sia per fissare le idee $p > q$, e si denoti con S_p l'unico p -sottogruppo di SYLOW di G e con S_q un q -sottogruppo di SYLOW di G . In primo luogo sia $S_p \simeq Z(p^\infty)$, e si denoti con A_n il sottogruppo di ordine p^n di S_p ; qualunque sia $x \in S_q$ esiste un sottogruppo finito H di S_q contenente propriamente $\langle x \rangle$. Se H è non ciclico il TEOREMA 2.16 assicura, per $n > 1$, l'abelianità del gruppo finito $A_n H$; se invece H è ciclico, $\langle x \rangle$ è contenuto nell'unico sottogruppo massimale di H e il TEOREMA 2.14 applicato al gruppo finito $A_n H$ assicura, per $n > 1$, l'abelianità di $A_n \langle x \rangle$. Pertanto, per l'arbitrarietà di x in S_q e di $n > 1$, si ha $S_p \leq Z_G(S_q)$ e $G = S_p \times S_q$ è abeliano per il TEOREMA 3.10. Sia invece $S_p \neq Z(p^\infty)$; se risulta $S_q \neq Z(q^\infty)$, l'asserto segue dal TEOREMA 3.9. Sia invece $S_q \simeq Z(q^\infty)$, e si denoti con B_n il sottogruppo di ordine q^n di S_q . Denotato con K un sottogruppo finito non ciclico di S_p , qualunque siano $x \in S_p$ e $n \in \mathbb{N}$, si può considerare il gruppo finito $L = K \vee \langle x \rangle \vee B_{n+1}$; indicato con L_p il p -sottogruppo di SYLOW di L , si ha $K \vee \langle x \rangle \leq L_p$ e, per il TEOREMA 2.21, il sottogruppo $L_p B_n$ è abeliano. Dopo di ciò S_p centralizza ogni B_n e quindi S_q , e come prima $G = S_p \times S_q$ è abeliano. (ii) $\Rightarrow$ (i) Ovvio.

TEOREMA 3.12. *Sia G un gruppo localmente supersolubile periodico con $\omega(G) = \{p, q\}$, e siano S_p e S_q rispettivamente un p -sottogruppo di SYLOW e un q -sottogruppo di SYLOW di G . Se risulta $S_p \simeq Z(p^\infty)$ e $S_q \simeq Z_q$, allora G appartiene a (P) .*

Dimostrazione. In primo luogo sia $p > q$. Qualunque sia il sottogruppo finito H di G , dal TEOREMA 2.13 segue che $H \in (P)$, sicché, per la 1.1, $G \in (P)$. Se invece $p < q$, si verifica subito che G è abeliano, sicché appartiene a (P) .

TEOREMA 3.13. *Sia G un gruppo localmente supersolubile periodico a sottogruppi di SYLOW localmente ciclici e con $\omega(G) = \{p, q\}$ ($p > q$). Se il p -sottogruppo di SYLOW S_p di G è infinito mentre i q -sotto-*

gruppi di SYLOW di G sono finiti, risultano equivalenti:

- (i) $G \in (P)$;
- (ii) il sottogruppo M di indice q di G è abeliano.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) Si denoti con A_n il sottogruppo di ordine p^n di S_p , e siano S_q un q -sottogruppo di SYLOW di G e M_q il suo unico sottogruppo massimale. Qualunque sia $n > 1$, il TEOREMA 2.14 applicato al gruppo finito $A_n S_q$ assicura che $A_n M_q$ è abeliano, per cui abeliano è anche l'unico sottogruppo di indice q $S_p M_q$ di G .

(ii) $\Rightarrow$ (i) Qualunque sia il sottogruppo finito H di G , se q divide $|H|$, il sottogruppo L di indice q di H è contenuto in M ed è quindi abeliano, sicché $H \in (P)$ per il TEOREMA 2.14 e dalla 1.1 segue che $G \in (P)$.

TEOREMA 3.14. *Sia G un gruppo localmente supersolubile periodico con $\omega(G) = \{p, q\}$ ($p > q$); se il p -sottogruppo di SYLOW S_p di G è infinito e localmente ciclico e i q -sottogruppi di SYLOW di G sono finiti non ciclici, risultano equivalenti:*

- (i) $G \in (P)$;
- (ii) G è abeliano oppure prodotto diretto di un p -gruppo localmente ciclico per un q -gruppo minimale non abeliano.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) Si denoti con A_n il sottogruppo di ordine p^n di S_p e sia S_q un q -sottogruppo di SYLOW di G . Qualunque sia $n > 1$, il TEOREMA 2.16 assicura che risulta $A_n S_q = A_n \times S_q$ con S_q abeliano oppure minimale non abeliano; dopo di ciò $G = S_p \times S_q$ verifica la (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Per il TEOREMA 2.16 ogni sottogruppo finito di G appartiene a (P) , e quindi $G \in (P)$ per la 1.1.

TEOREMA 3.15. *Sia G un gruppo localmente supersolubile periodico con $\omega(G) = \{p, q\}$ ($p > q$); se il p -sottogruppo di SYLOW S_p di G è infinito e non localmente ciclico mentre i q -sottogruppi di SYLOW di G sono ciclici, risultano equivalenti:*

- (i) $G \in (P)$;
- (ii) G è abeliano, oppure $|G/Z(G)| = pq$ e $S_p = Z(p^\infty) \times R$ con R ciclico.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) Si denoti con S_q un q -sottogruppo di SYLOW di G . Il TEOREMA 3.10 assicura che S_p è abeliano. Qualunque sia il sottogruppo finito H di S_p normale in G , poiché ogni elemento di S_p/H è dotato in G/H di un numero finito di coniugati, esiste in S_p/H un sottogruppo finito non identico normale in G/H , e quin-

di anche un sottogruppo normale minimale H_1/H di G/H contenuto in S_p/H , per cui $|H_1/H| = p$. Così proseguendo si costruisce una successione

$$H < H_1 < H_2 < \dots < H_n < H_{n+1} < \dots \quad (1)$$

di sottogruppi normali di G contenuti in S_p e con $|H_{n+1}/H_n| = p$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Un noto teorema di BAER (cfr. [4]) comporta $S_p = D \times R$, con D divisibile e R ridotto; si distingueranno tre casi:

(1) $R = 1$.

Il gruppo S_p è divisibile e non localmente ciclico, per cui $S_p = \times_{i \in I} K_i$ con ogni $K_i \simeq Z(p^\infty)$ e $|I| > 1$. Sia x un elemento di S_p e, posto $H = \langle x \rangle^G$, si consideri una catena del tipo (1). Esista in primo luogo $n \in \mathbb{N}$ tale che H_{n+1}/H_n sia non ciclico; il teorema di MASCHKE applicato al gruppo abeliano elementare finito

$$\frac{H_{n+1}/H}{\Phi(H_{n+1}/H)} \text{ comporta } \frac{H_{n+1}/H}{\Phi(H_{n+1}/H)} = \frac{H_n/H}{\Phi(H_{n+1}/H)} \times \frac{L/H}{\Phi(H_{n+1}/H)}$$

con L/H sottogruppo S_q -invariante e perciò normale in G/H .

I sottogruppi $H_n S_q$ e LS_q sono non confrontabili, e quindi HS_q è abeliano e x centralizza S_q . Sia invece H_n/H ciclico per ogni $n \in \mathbb{N}$; posto $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$, chiaramente K è normale in G e $K/H \simeq Z(p^\infty)$, e si ha $K < S_p$, in quanto H è finito e $|I| > 1$. Detto y un elemento di $S_p - K$, i sottogruppi $(H_n \langle y \rangle^G S_q)$ e KS_q sono non confrontabili, per cui HS_q è abeliano e x centralizza S_q . Si ha pertanto $S_p \leq Z_G(S_q)$ e $G = S_p \times S_q$ è abeliano.

(2) $D = 1$.

Qualunque sia $x \in S_p$, posto $H = \langle x \rangle^G$, si consideri una catena $H < H_1 < H_2 < \dots < H_n < H_{n+1} < \dots$ del tipo (1). Per assurdo H_n/H sia ciclico per ogni $n \in \mathbb{N}$; posto $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$, K è normale in G e si ha $K/H \simeq Z(p^\infty)$. Poiché H è finito, K è a condizione minimale, e quindi (cfr. [4]) è prodotto diretto di un numero finito di $Z(p^\infty)$ e di p -gruppi ciclici, ed è perciò finito (in quanto S_p è ridotto), il che è manifestamente assurdo. Pertanto esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che H_n/H sia non ciclico e, come nel caso (1), x centralizza S_q . Pertanto $S_p \leq Z_G(S_q)$ e $G = S_p \times S_q$ è abeliano.

(3) $D \neq 1, R \neq 1$.

Sia in primo luogo D non localmente ciclico, e quindi $D = \times_{i \in I} D_i$ con ogni $D_i \simeq Z(p^\infty)$ e $|I| > 1$. Il caso (1) applicato al gruppo DS_q comporta $D \leq Z_G(S_q)$ e quindi $D_i \triangleleft G$ per ogni $i \in I$. Detti i e j due elementi distinti di I , qualunque sia $x \in R$ i sottogruppi $D_i \langle x, S_q \rangle$ e $D_j \langle x, S_q \rangle$ sono non confrontabili (da $D_i \langle x, S_q \rangle \leq D_j \langle x, S_q \rangle$ seguirebbe

$$D_i D_j = D_j \langle x, S_q \rangle \wedge D_i D_j = D_j (\langle x, S_q \rangle \wedge D_i D_j)$$

e quindi $D_i \simeq D_i D_j / D_j \simeq \frac{\langle x, S_q \rangle \wedge D_i D_j}{\langle x, S_q \rangle \wedge D_j}$, contro la finitezza di $\langle x, S_q \rangle$

e quindi $\langle x, S_q \rangle$ è abeliano e x centralizza S_q . Dopo di ciò $S_p \leq Z_G(S_q)$ e $G = S_p \times S_q$ è abeliano. Sia quindi $D \simeq Z(p^\infty)$, e per ogni $n \in \mathbf{N}$ si denoti con D_n il sottogruppo di ordine p^n di D ; fissato un elemento x di $R - \{1\}$, qualunque sia $n \in \mathbf{N}$ i sottogruppi $D_n \langle x, S_q \rangle$ e DS_q sono non confrontabili, per cui $D_n S_q$ è abeliano e $D \leq Z(G)$. Si supponga R infinito; applicando il caso (2) al gruppo G/D si ha che tale gruppo è abeliano, per cui $DS_q \triangleleft G$ e quindi $S_q \triangleleft G$, e $G = S_p \times S_q$ è abeliano. Sia invece R finito e in primo luogo non ciclico; il teorema di MASCHKE applicato al gruppo finito $G/D = RD/D \cdot S_q D/D$ assicura l'esistenza in RD/D di due sottogruppi massimali distinti M_1/D e M_2/D normali in G/D . I sottogruppi $M_i S_q$ e $\langle R, S_q \rangle$ sono non confrontabili, per cui $(M_i \wedge R) \vee S_q$ è abeliano ($i = 1, 2$) e $R = (M_1 \wedge R)(M_2 \wedge R)$ centralizza S_q , sicché $G = S_p \times S_q$ è abeliano. Sia infine R ciclico, e sia M il sottogruppo massimale di R ; chiaramente DM è normale in G . I sottogruppi DMS_q e $\langle R, S_q \rangle$ sono non confrontabili, per cui MS_q è abeliano e $DM \leq Z(G)$. Sia ancora L il sottogruppo massimale di S_q ; qualunque sia $x \in S_p$, i sottogruppi $\langle x \rangle^G S_q$ e $S_p L$ sono non confrontabili, per cui $\langle x \rangle^G L$ è abeliano e $L \leq Z(G)$. Dopo di ciò $DML \leq Z(G)$ e quindi, se G non è abeliano, $G/Z(G)$ ha ordine pq e $S_p = Z(p^\infty) \times R$ con R ciclico. (ii) $\Rightarrow$ (i) Sia G non abeliano, e sia $S_p = D \times R$ con $D \simeq Z(p^\infty)$ e R ciclico. Siano H e K sottogruppi non confrontabili di G , e siano L_p il p -sottogruppo di SYLOW di $H \wedge K$, L_q un q -sottogruppo di SYLOW di $H \wedge K$ e S_q un q -sottogruppo di SYLOW di G contenente L_q . Se $L_q < S_q$ oppure $L_p \leq D \times M$ (dove M denota il sottogruppo massimale di R) si ha che $H \wedge K = L_p \times L_q$ è abeliano. Per assurdo allora risulti $L_q = S_q$ ed esista $x \in L_p - (D \times M)$; si ha allora $x = ab$ con $a \in D$ e $R = \langle b \rangle$. Posto $S_q = \langle y \rangle$, si ha $y^b = y^{ab} = y^x \in \langle x, S_q \rangle$, per cui $\langle x, S_q \rangle \triangleleft G$.

$$\text{Si ha allora } 1 \neq G/\langle x, S_q \rangle = \frac{DR \langle x, S_q \rangle}{\langle x, S_q \rangle} \simeq \frac{DR}{DR \wedge \langle x, S_q \rangle}$$

che è un quoziente di $DR/\langle x \rangle = D \langle x \rangle / \langle x \rangle \simeq D/D \wedge \langle x \rangle \simeq Z(p^\infty)$, ed è quindi a sua volta isomorfo a $Z(p^\infty)$, il che è assurdo giacché $\langle x, S_q \rangle \leq H \wedge K$. Dopo di ciò $H \wedge K$ è abeliano e $G \in (P)$.

OSSERVAZIONE 3.16. Esistono in (P) gruppi non abeliani verificanti le condizioni del TEOREMA 3.15, come mostra la situazione seguente: Sia $H = Z(3^\infty) \times Z_3$, e sia α un automorfismo di H che induca l'identità su $Z(3^\infty)$ e abbia periodo 2 su Z_3 ; il gruppo $G = [H] \langle \alpha \rangle$ è non abeliano e appartiene a (P) .

TEOREMA 3.17. Sia G un gruppo localmente supersolubile periodico con $\omega(G) = \{p, q\}$ ($p > q$); se il p -sottogruppo di SYLOW S_p di G è ciclico e non ha ordine primo, mentre i q -sottogruppi di SYLOW di G sono infiniti, risultano equivalenti:

- (i) $G \in (P)$;
- (ii) G è abeliano.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sia S_q un q -sottogruppo di SYLOW di G ; il TEOREMA 3.10 assicura che S_q è abeliano. Se $S_q \simeq Z(q^\infty)$ si ha facilmente che G è abeliano. Sia S_q non localmente ciclico; qualunque sia $x \in S_q$, esiste in S_q un sottogruppo finito non ciclico H contenente x . Il TEOREMA 2.16 assicura che il gruppo finito $S_p H$ è abeliano. Pertanto x centralizza S_p e $S_q \leq Z_G(S_p)$, sicché $G = S_p \times S_q$ è abeliano. (ii) $\Rightarrow$ (i) Ovvio.

TEOREMA 3.18. *Sia G un gruppo localmente supersolubile periodico con $\omega(G) = \{p, q\}$ ($p > q$); se il p -sottogruppo di SYLOW S_p di G è finito non ciclico, e i q -sottogruppi di SYLOW di G sono infiniti, sono equivalenti:*

- (i) $G \in (P)$;
- (ii) G è abeliano oppure prodotto diretto di un p -gruppo minimale non abeliano per un q -gruppo localmente ciclico.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) Denotato con S_q un q -sottogruppo di SYLOW di G , se S_q non è localmente ciclico dal TEOREMA 3.2 segue che G è abeliano. Sia invece $S_q \simeq Z(q^\infty)$; il gruppo $Z_G(S_p) S_q / Z_G(S_p)$ è isomorfo a un quoziente finito di $S_q \simeq Z(q^\infty)$, per cui $S_q \leq Z_G(S_p)$ e $G = S_p \times S_q$. Dal TEOREMA 3.10 segue poi che, se G non è abeliano, S_p è minimale non abeliano.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Segue dal TEOREMA 1.9.

TEOREMA 3.19. *Sia G un gruppo localmente supersolubile periodico con $\omega(G) = \{p, q\}$ ($p > q$); se il p -sottogruppo di SYLOW S_p di G ha ordine p e i q -sottogruppi di SYLOW di G sono infiniti non localmente ciclici, risultano equivalenti:*

- (i) $G \in (P)$;
- (ii) G è abeliano oppure i q -sottogruppi di SYLOW di G sono del tipo $Z(q^\infty) \times R$ con R ciclico, e $G/Z(G)$ ha ordine pq .

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) Denotato con S_q un q -sottogruppo di SYLOW di G , dalla 3.10 segue che S_q è abeliano. Se S_q è divisibile, poiché il gruppo $S_q Z_G(S_p) / Z_G(S_p)$ è isomorfo a un quoziente finito di S_q , si ha $S_q \leq Z_G(S_p)$ e $G = S_p \times S_q$ è abeliano. Sia quindi S_q non divisibile e perciò dotato di sottogruppi massimali; in primo luogo sia S_q dotato di due sottogruppi massimali distinti M_1 e M_2 . I sottogruppi $S_p M_1$ e $S_p M_2$ sono non confrontabili, per cui $S_p(M_1 \wedge M_2)$ è abeliano; detti x un elemento di $M_1 - M_2$ e y un elemento di $M_2 - M_1$, poiché M_1 è infinito i sottogruppi $S_p M_1$ e $S_p \langle x, y \rangle$ sono non confrontabili, sicché $S_p \langle x \rangle$ è abeliano e similmente abeliano è

$S_p \langle y \rangle$. Dopo di ciò i sottogruppi $S_p M_1$ e $S_p M_2$ sono abeliani, per cui tale è $G = S_p \times S_q$. Sia quindi S_q dotato di un unico sottogruppo massimale M . Qualunque sia $x \in M$, detto y un elemento di $S_q - M$, i sottogruppi $S_p M$ e $S_p \langle x, y \rangle$ sono non confrontabili, per cui $S_p \langle x \rangle$ è abeliano e $M \leq Z(G)$, sicché, se G non è abeliano, $G/Z(G)$ ha ordine pq . Poiché S_q è dotato di un unico sottogruppo massimale, risulta $S_q = D \times R$ con $D = \times_{i \in I} D_i$, ogni $D_i \simeq Z(q^\infty)$ e R ciclico non identico. Se $|I| > 1$, denotati con i e j due elementi distinti di I , i sottogruppi $S_p D_i R$ e $S_p D_j R$ sono non confrontabili, per cui $S_p R$ è abeliano e $S_q = MR$ è contenuto in $Z_G(S_p)$, sicché $G = S_p \times S_q$ è abeliano. Pertanto, se G non è abeliano, si ha $S_q = Z(q^\infty) \times R$ con R ciclico.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sia G non abeliano, e siano H e K sottogruppi non confrontabili di G ; se $S_p \not\leq H \wedge K$, $H \wedge K$ è un q -gruppo ed è quindi abeliano. Si può pertanto supporre $S_p \leq H \wedge K$. Sia L_q un q -sottogruppo di SYLOW di $H \wedge K$ e siano $S_q = D \times R$ (con $D \simeq Z(q^\infty)$ e R ciclico $\neq 1$) un q -sottogruppo di SYLOW di G contenente L_q e M l'unico sottogruppo massimale di S_q . Se $L_q \leq M \leq Z(G)$, chiaramente $H \wedge K = S_p \times L_q$ è abeliano. Per assurdo sia $L_q \not\leq M$, e quindi esista $x \in L_q - M$; si ha allora $x = ab$ con $a \in D$ e $R = \langle b \rangle$. Dopo di ciò $G/S_p \langle x \rangle = S_p D \langle x \rangle / S_p \langle x \rangle \simeq D/D \wedge (S_p \langle x \rangle) \simeq Z(q^\infty)$, il che è assurdo giacché $S_p \langle x \rangle \leq H \wedge K$. Pertanto $H \wedge K$ è abeliano e $G \in (P)$.

OSSERVAZIONE 3.20. Esistono in (P) gruppi non abeliani verificanti le ipotesi del TEOREMA 3.19, come mostra la situazione seguente: Sia $H = Z(2^\infty) \times Z_2$, e sia $\vartheta : H \rightarrow \text{Aut}(Z_3)$ un epimorfismo. Il gruppo $G = [Z_3]_{\vartheta} \cdot H$ è non abeliano e appartiene a (P) .

Dai TEOREMI 3.9-3.19 discende la seguente caratterizzazione dei gruppi localmente supersolubili periodici infiniti $G \in (P)$ e con $|\omega(G)| = 2$.

TEOREMA 3.21. Sia G un gruppo localmente supersolubile periodico infinito con $\omega(G) = \{p, q\}$ ($p > q$). Sono equivalenti (denotando con S_p il p -sottogruppo di SYLOW di G e con S_q un q -sottogruppo di SYLOW di G):

- (i) $G \in (P)$;
- (ii) G è un gruppo di uno dei tipi seguenti:
  - (a) G è abeliano;
  - (b) $S_p \simeq Z(p^\infty)$, $S_q \simeq Z(q^k)$, il sottogruppo di indice q di G è abeliano;
  - (c) $G = S_p \times S_q$ con $S_p \simeq Z(p^\infty)$ e S_q finito e minimale non abeliano;
  - (d) $S_p = Z(p^\infty) \times R$, R ciclico $\neq 1$, $S_q \simeq Z(q^k)$, $|G/Z(G)| = pq$;

- (e) $G = S_p \times S_q$ con S_p finito e minimale non abeliano e $S_q \simeq Z(q^\infty)$;
 (f) $S_p \simeq Z_p$, $S_q = Z(q^\infty) \times R$ con R ciclico $\neq 1$, $|G/Z(G)| = pq$.

N. 4. Gruppi localmente risolubili appartenenti a (P).

4.1. Sia G un gruppo risolubile finitamente generabile dotato di qualche elemento aperiodico e appartenente a (P). Allora G è abeliano.

Dimostrazione. Poiché G è risolubile e non periodico, esiste in G una sezione normale abeliana infinita H/K con G/H finito. Poiché $|G:H|$ è finito, H/K è finitamente generabile e perciò dotata di una immagine omomorfa ciclica infinita H/L . Se $H = G$, qualunque sia il sottogruppo massimale M_1/L di G/L esistono due sottogruppi massimali M_2/L e M_3/L di G/L , distinti fra loro e da M_1/L , tali che $M_1 \wedge M_2 \neq M_1 \wedge M_3$. Poiché $G \in (P)$, i sottogruppi $M_1 \wedge M_2$ e $M_1 \wedge M_3$ sono abeliani e contengono L , per cui L centralizza $(M_1 \wedge M_2) (M_1 \wedge M_3) = M_1$. L'arbitrarietà di M_1 comporta $L \leq Z(G)$, per cui G è abeliano. Sia dunque $H < G$; poiché H/L è ciclico infinito, esiste in H/L un sottogruppo N/L tale che H/N sia finito e $\omega(H/N)$ abbia ordine ≥ 4 . Chiaramente $|G:N|$ è finito, sicché finito è anche G/N_G , e $|\omega(G/N_G)| \geq 4$. La 1.2 assicura allora che G/N_G è abeliano. Siano $S_1/N_G, \dots, S_t/N_G$ i sottogruppi di SYLOW di G/N_G . Qualunque sia $i \in \{1, \dots, t\}$, fissato $j \neq i$, i sottogruppi $S_i S_j$ e $S_1 \dots S_{j-1} S_{j+1} \dots S_t$ sono non confrontabili, per cui S_i è abeliano e $N_G \leq Z_G(S_i)$, per cui $N_G \leq Z(G)$ e G , in quanto nilpotente, è abeliano per il TEOREMA 1.11.

TEOREMA 4.2. Per un gruppo localmente risolubile G dotato di qualche elemento aperiodico sono equivalenti:

- (i) $G \in (P)$;
 (ii) G è abeliano.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sia a un elemento aperiodico di G ; qualunque siano gli elementi x e y di G , la 4.1 applicata al gruppo $\langle a, x, y \rangle$ assicura che x e y sono permutabili, per cui G è abeliano.
 (ii) $\Rightarrow$ (i) Ovvvia.

TEOREMA 4.3. Per un gruppo iperabeliano G dotato di qualche elemento aperiodico sono equivalenti:

- (i) $G \in (P)$;
 (ii) G è abeliano.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) Denotato con $F(G)$ il sottogruppo di FITTING di G , se $G/F(G)$ è privo di sottogruppi non confrontabili, $G/F(G)$ risulta un p -gruppo localmente ciclico (p primo), sicché $F(G)$ è dotato di qualche elemento aperiodico. La locale nilpotenza di $F(G)$ e il TEOREMA 1.11 assicurano che $F(G)$ è abeliano, per cui G è risolubile e l'asserto segue dal TEOREMA 4.2. Sia quindi $F(G)$ contenuto in due sottogruppi non confrontabili di G , e perciò sia abeliano. Esiste in $G/F(G)$ un sottogruppo normale abeliano non identico $A/F(G)$, e dalla relazione $Z_G(F(G)) \leq F(G) < A$, segue che A non è abeliano. Dopo di ciò il gruppo G/A è privo di sottogruppi non confrontabili, ed è perciò abeliano; pertanto G è risolubile e l'asserto segue ancora dal TEOREMA 4.2. (ii) $\Rightarrow$ (i) Ovvvia.

OSSERVAZIONE 4.4. Nei TEOREMI 4.2 e 4.3 non è lecito prescindere rispettivamente dalle ipotesi di locale risolubilità e di iperabelianità, sia nel caso misto che nel caso aperiodico, come illustrano le situazioni seguenti:

- (1) Sia T_∞ un gruppo non abeliano a sottogruppi non banali ciclici infiniti. Allora T_∞ è un gruppo aperiodico non abeliano appartenente a (P) .
- (2) Sia T_∞ come in (1), e sia $G = T_\infty \times Z_p$ (p primo); il gruppo G è misto non abeliano e appartiene a (P) .

In base alla 1.2 e al TEOREMA 4.2 sarà sufficiente limitarsi ai gruppi localmente risolubili periodici $G \in (P)$ con $|\omega(G)| \leq 3$.

4.5. Sia G un gruppo risolubile finito di ordine $p^\alpha q^\beta r^\gamma$ ($\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$) appartenente a (P) . Allora G è dotato di qualche sottogruppo di SYLOW normale.

Dimostrazione. Si procede per induzione su $\alpha + \beta + \gamma$, giacché se $\alpha + \beta + \gamma = 3$, G ha ordine pqr ed è supersolubile. Sia $\alpha + \beta + \gamma > 3$, e sia H un sottogruppo normale minimale di G ; poiché G è risolubile, H è primario e si può quindi supporre, per fissare le idee, H p -gruppo. Detto $\Sigma = \{S_p, S_q, S_r\}$ un sistema di SYLOW di G , se $H = S_p$ l'asserto è vero. Sia $H < S_p$; i sottogruppi $HS_q S_r$ e $S_p S_q$ sono non confrontabili, per cui HS_q è abeliano e H centralizza S_q . Similmente H centralizza S_r , sicché, essendo S_p abeliano per la 1.3, si ha $H \leq Z(G)$. Il gruppo G/H ha ordine $p^\sigma q^\beta r^\gamma$ con $0 < \sigma < \alpha$, e per induzione G/H è dotato di qualche sottogruppo di SYLOW normale. L'insieme $\Sigma^* = \{S_p/H, S_q H/H, S_r H/H\}$ è un sistema di SYLOW di G/H , sicché almeno uno dei tre elementi di Σ^* è normale in G/H . Se $S_p/H \triangleleft G/H$ si ha $S_p \triangleleft G$. Se invece $S_q H/H \triangleleft G/H$, si ha $S_q H \triangleleft G$ e quindi, essendo $S_q H$ abeliano, $S_q \triangleleft G$. Similmente da $S_r H/H \triangleleft G/H$ segue $S_r \triangleleft G$.

TEOREMA 4.6. Per un gruppo risolubile finito G di ordine $p^\alpha q^\beta r^\gamma$

privo di sottogruppi di SYLOW ciclici sono equivalenti:

- (i) $G \in (P)$;
- (ii) G è abeliano.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sia $\Sigma = \{S_p, S_q, S_r\}$ un sistema di SYLOW di G , e sia per fissare le idee $S_p \triangleleft G$ (cfr. 4.5). Sia M un sottogruppo normale massimale di G contenente S_p ; si può supporre $|G:M| = q$, e quindi $S_p S_r \leq M$. I sottogruppi $S_p S_q$ e M sono non confrontabili, per cui $S_p(S_q \wedge M)$ è abeliano; similmente $S_r V(S_q \wedge M)$ è abeliano. Dopo di ciò $S_q \wedge M$, centralizzando S_p e S_r , è centrale in G per la 1.3. Siano M_1 e M_2 due sottogruppi massimali distinti di S_r ; i sottogruppi $S_p S_r$ e $S_p(S_q \wedge M) M_i$ sono non confrontabili, per cui $S_p M_i$ è abeliano e $S_p \leq Z_G(S_r)$, sicché $S_p(S_q \wedge M) S_r \leq Z_G(S_r)$. Se S_r è normale in G , detti L_1 e L_2 due sottogruppi massimali distinti di S_q , i sottogruppi $S_p S_q$ e $S_p L_i S_r$ sono non confrontabili, per cui $S_p L_i$ è abeliano ($i = 1, 2$) e $S_p \leq Z_G(S_q)$. Similmente $S_r \leq Z_G(S_q)$, per cui $S_q \triangleleft G$ e G è abeliano. Per assurdo sia $N_G(S_r) < G$; poiché $S_p(S_q \wedge M) S_r$ è massimale in G e centralizza S_r , si ha $N_G(S_r) = Z_G(S_r)$ e, per un noto teorema di BURNSIDE⁽⁴⁾, G è r -nilpotente, sicché $S_p S_q \triangleleft G$. Poiché $G/S_p S_q \cong S_r$ è dotato di sottogruppi non confrontabili, $S_p S_q$ è abeliano e $S_q \triangleleft G$. Procedendo allora come prima, si prova che S_r è normale in G , il che è assurdo. (ii) $\Rightarrow$ (i) Ovvvia.

TEOREMA 4.7. *Sia G un gruppo localmente risolubile periodico con i sottogruppi di SYLOW non localmente ciclici e con $|\omega(G)| = 3$; sono equivalenti:*

- (i) $G \in (P)$;
- (ii) G è abeliano.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) Qualunque sia il sottogruppo finito H di G , esiste un sottogruppo finito K di G contenente H privo di sottogruppi di SYLOW ciclici e con $|\omega(K)| = 3$. Dal TEOREMA 4.6 segue che K è abeliano, per cui tale è H e quindi anche G .

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ovvvia.

TEOREMA 4.8. *Sia G un gruppo lagrangiano⁽⁵⁾ di ordine $p^a q^b r^c$, dotato di qualche sottogruppo di SYLOW non ciclico. Sono equivalenti:*

-
- (4) Sia G un gruppo finito e sia S un p -sottogruppo di SYLOW di G . Se $N_G(S) = Z_G(S)$, G è p -nilpotente (cfr. [8] pag. 139).
  - (5) Un gruppo G si dice *lagrangiano* se è finito e, per ogni divisore d di $|G|$, esiste in G un sottogruppo di ordine d .
  - (6) Il TEOREMA 4.8 non si estende ai gruppi risolubili, in quanto $G = Z_5 \times A_4$ è un gruppo risolubile di ordine $5 \cdot 3 \cdot 2^2$, non abeliano, appartenente a (P) e con il 2-sottogruppo di SYLOW non ciclico.

- (i) $G \in (P)$;
(ii) G è abeliano ⁽⁶⁾.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sia $\Sigma = \{S_p, S_q, S_r\}$ un sistema di SYLOW di G , e sia, per fissare le idee, $S_p \triangleleft G$ (cfr. 4.5). Se i sottogruppi S_q e S_r sono non ciclici, l'asserto si deduce come nel TEOREMA 4.6. Si supponga quindi S_r ciclico. Detto M un sottogruppo normale massimale di G contenente S_p , sia in primo luogo $|G:M| = q$, e quindi $S_p S_r \leq M$. I sottogruppi $S_p S_q$ e M sono non confrontabili, per cui $S_p(S_q \wedge M)$ è abeliano e similmente abeliano risulta $S_r \vee (S_q \wedge M)$, per cui $S_q \wedge M \leq Z(G)$. Detto M_1 un sottogruppo di indice p di G , si ha $G = S_p M_1$, e $S_p \wedge M_1$ è normale in G e si ha $|S_p : S_p \wedge M_1| = p$. I sottogruppi $(S_p \wedge M_1) S_q S_r$ e $S_p S_q$ sono non confrontabili, per cui $(S_p \wedge M_1) S_q$ è abeliano; similmente abeliano risulta $(S_p \wedge M_1) S_r$ sicché $S_p \wedge M_1 \leq Z(G)$, e quindi $(S_p \wedge M_1)(S_q \wedge M) \leq Z(G)$.

Chiaramente $\frac{S_p(S_q \wedge M)}{(S_p \wedge M_1)(S_q \wedge M)} \simeq S_p / (S_p \wedge M_1)$ è un sottogruppo nor-

male di ordine p di $G / (S_p \wedge M_1)(S_q \wedge M)$; poiché $G / S_p(S_q \wedge M)$ ha ordine qr^r , i suoi sottogruppi di SYLOW sono ciclici, ed è quindi supersolubile, per cui tale risulta anche $G / (S_p \wedge M_1)(S_q \wedge M)$, e quindi anche $G / Z(G)$ e perciò G . L'asserto segue allora dal TEOREMA 2.1. Sia invece $|G:M| = r$; denotato ancora con M_1 un sottogruppo di indice p di G , procedendo come nel caso precedente si ha che $S_p \wedge M_1$ è normale in G e ha indice p in S_p . Poiché G è lagrangiano e i sottogruppi di SYLOW sono coniugati, esiste in G un sottogruppo M_2 di indice q contenente S_r e quindi anche $S_p S_r$. Dopo di ciò $M_2 = S_p S_q S_r \wedge M_2 = (S_p S_r)(S_q \wedge M_2)$ e $|S_q \wedge M_2| = |M_2 : S_p S_r| = q^{\beta-1}$, per cui $|S_q : S_q \wedge M_2| = q$ e si può procedere come prima, sostituendo M_2 a M . (ii) $\Rightarrow$ (i) Ovvvia.

DEFINIZIONE. Un gruppo G si dice *localmente lagrangiano* se ogni sua parte finita è contenuta in un sottogruppo lagrangiano.

TEOREMA 4.9. *Sia G un gruppo localmente lagrangiano dotato di qualche sottogruppo di SYLOW non localmente ciclico, e con $|\omega(G)| = 3$. Sono equivalenti.*

- (i) $G \in (P)$;
(ii) G è abeliano.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) Per ipotesi esiste un sottogruppo finito H di G dotato di qualche sottogruppo di SYLOW non ciclico e con $|\omega(H)| = 3$. Qualunque siano gli elementi x e y di G , esiste un sottogruppo lagrangiano L di G contenente $H \vee \langle x, y \rangle$. Dal TEOREMA 4.8 segue che L è abeliano e x e y sono permutabili. (ii) $\Rightarrow$ (i) Ovvvia.

TEOREMA 4.10. *Sia G un gruppo lagrangiano di ordine $p^\alpha q^\beta$ privo di sottogruppi di SYLOW ciclici e con qualche sottogruppo di SYLOW normale. Sono equivalenti:*

- (i) $G \in (P)$;
- (ii) G è abeliano.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sia G dotato, per fissare le idee, di un unico p -sottogruppo di SYLOW S_p , e sia M un sottogruppo di indice p di G ; chiaramente M contiene un q -sottogruppo di SYLOW S_q di G . Poiché $G/S_p \simeq S_q$ è dotato di sottogruppi non confrontabili, S_p è abeliano, per cui $S_p \wedge M \triangleleft G$ e $|S_p : S_p \wedge M| = p$. Detti L_1 e L_2 due sottogruppi massimali distinti di S_q , i sottogruppi $S_p L_i$ e $(S_p \wedge M) S_q$ sono non confrontabili, per cui il gruppo $(S_p \wedge M) L_i$ è abeliano ($i = 1, 2$) e $S_p \wedge M$, centralizzando $S_q = L_1 L_2$, è centrale in G . Il gruppo $G/S_p \wedge M$ ha ordine pq^β e $S_p/S_p \wedge M$ è un suo sottogruppo normale di ordine p , per cui $G/S_p \wedge M$ è supersolubile, e quindi tale è anche $G/Z(G)$. Dopo di ciò G è supersolubile, e quindi abeliano per il TEOREMA 2.11. (ii) $\Rightarrow$ (i) Ovvvia.

OSSERVAZIONE 4.11. Esistono in (P) gruppi lagrangiani G con $|\omega(G)| = 2$ e privi di sottogruppi di SYLOW normali; tale è ad esempio il gruppo simmetrico S_4 .

OSSERVAZIONE 4.12. Esistono in (P) gruppi risolubili di ordine $p^\alpha q^\beta$, privi di sottogruppi di SYLOW ciclici e con qualche sottogruppo di SYLOW normale, che non sono però lagrangiani, come illustra la situazione seguente: il gruppo $G = A_4 \times Z_3$ è risolubile di ordine $3^2 \cdot 2^2$, privo di sottogruppi di SYLOW ciclici, con il 2-sottogruppo di SYLOW normale, appartiene a (P) ma non è lagrangiano (giacché privo di sottogruppi di ordine 18).

OSSERVAZIONE 4.13. Esistono in (P) gruppi lagrangiani di ordine $p^\alpha q^\beta$, dotati di qualche sottogruppo di SYLOW normale e non ciclico, che non sono supersolubili, come mostra la situazione seguente: il gruppo $G = A_4 \times Z_2$ è lagrangiano di ordine $3 \cdot 2^3$, con il 2-sottogruppo di SYLOW normale e non ciclico, appartiene a (P) , ma non è supersolubile.

4.14. *Sia G un gruppo lagrangiano di ordine $p^\alpha q^\beta$ appartenente a (P) . Se G è privo di sottogruppi di SYLOW abeliani, i suoi sottogruppi di SYLOW sono minimali non abeliani.*

Dimostrazione. Poiché G è risolubile deve risultare ⁽⁷⁾ $O_p(G) \neq 1$

(7) Se p è un divisore primo dell'ordine del gruppo finito G , col simbolo $O_p(G)$ si denota il massimo p -sottogruppo normale di G .

oppure $O_q(G) \neq 1$; sia per fissare le idee $O_p(G) \neq 1$, e sia S_q un q -sottogruppo di SYLOW di G . Qualunque sia il sottogruppo proprio H di S_q , i sottogruppi $O_p(G)H$ e S_q sono non confrontabili, per cui H è abeliano e S_q è minimale non abeliano. Se fosse $|O_p(G)| = p^\alpha$, dal TEOREMA 4.10 seguirebbe l'abelianità di G , contro le ipotesi; pertanto $|O_p(G)| < p^\alpha$. Siano $K/O_p(G)$ un sottogruppo normale minimale di $G/O_p(G)$ e K_q un q -sottogruppo di SYLOW di K , si ha $K_q \simeq K/O_p(G)$, per cui K_q è abeliano e quindi contenuto propriamente in un q -sottogruppo di SYLOW T_q di G . Dopo di ciò pq divide l'ordine di G/K , sicché G/K è dotato di sottogruppi non confrontabili e K è abeliano, per cui $K_q \triangleleft G$ e $O_q(G) \neq 1$. Come prima si prova allora che i p -sottogruppi di SYLOW di G sono minimali non abeliani.

BIBLIOGRAFIA

- [1] V. I. CHAADAEV, *Finite simple non abelian (a)-groups*, Siber. Math. J. 12 (1971) 148-153.
- [2] V. I. CHAADAEV, *Finite unsolvable non simple (A)-groups*, Math. Notes 10 (1971) 521-523.
- [3] F. DE GIOVANNI, *Sui gruppi in cui l'intersezione di due qualunque sottogruppi non confrontabili è abeliana (parte prima)*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, 14 (1982).
- [4] L. FUCHS, *Infinite abelian groups*, vol. 1, Academic Press 1970.
- [5] G. MILLER, H. MORENO, *Non abelian groups in which every subgroup is abelian*, Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903) 398-404.
- [6] L. RÉDEI, *Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen*, Publ. Math. Debrecen 4 (1956) 303-324.
- [7] D. J. S. ROBINSON, *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, Part 1, Springer 1972.
- [8] E. SCHENKMAN, *Group theory*, Van Nostrand Company 1965.