PROBLEMI AL CONTORNO PER OPERATORI PARABOLICI CON NON LINEARITA' DISCONTINUA (*)

di RAFFAELE PISANI (a Bari) (**)

SOMMARIO. - *In questo lavoro l'autore estende alcuni risultati di C. Stuart su problemi al contorno per operatori ellittici con non linearità discontinua al caso di corrispondenti problemi parabolici.*

SUMMARY. - *In this paper the author extends some results of C. Stuart about elliptic boundary value problems with discontinuos non linearities to the case of the corresponding parabolic problems.*

Introduzione. Sia $Q_T = \Omega \times (0,T)$ un cilindro di $\mathbf{R}^{N+1}$ e, detta S_T la sua superficie laterale, sia $\Gamma = S_T \cup \{\Omega \times \{o\}\}$.

Si consideri il problema:

$$(\mathrm{o}) \quad \begin{cases} L u(x,t) \in \tilde{f}(u(x,t)) + r(x,t) & \text{q.o. in } Q_T \\ u = 0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

dove L è un operatore differenziale lineare parabolico del secondo ordine ed f è una funzione multivoca.

Nel teorema 3 della presente nota si prova che se $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ è

(*) Pervenuto in Redazione il 19 febbraio 1981. Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Analisi Matematica - Università degli Studi - Palazzo Ateneo - 70121 Bari.

una funzione non crescente, allora per ogni $r \in L^p(Q_T)$ con $p > N + 2$, il problema (o) ammette una ed una sola soluzione in $W_p^2(Q_T)$.

Nel teorema 5 si prova che se f è a variazione limitata su intervalli compatti di $\mathbf{R}$ e se

$$\limsup_{s \to \pm\infty} \frac{f(s)}{s} < +\infty$$

allora per ogni $r \in L^p(Q_T)$, il problema (o) ha soluzione in $W_p^2(Q_T)$. Tali teoremi estendono certi risultati di C. Stuart (Cfr. [6]) relativi al problema:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) - \lambda u(x) - r(x) &\in \bar{f}(u(x)) && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{su } \partial\Omega \end{aligned}$$

dove si prova che se $\lambda < \lambda_0$ (dove λ_0 è l'autovalore principale di $-\Delta$) ed f è a variazione limitata su intervalli compatti ed è tale che $\limsup_{s \to \pm\infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_0$, allora c'è soluzione in $W_p^2(\Omega)$ per ogni $r \in L^p(\Omega)$ con $p > \max(2, \frac{N}{2})$.

Nel n. 1 di questo lavoro viene introdotto l'operatore che si studia e sono riportati, per comodità, alcuni noti risultati. Viene anche provata una variante del principio di massimo che sarà utilizzata nel seguito.

Nel n. 2 sono dimostrati i teoremi sopra menzionati.

1. Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, $N \geq 2$, Ω dominio limitato di classe C^2 e per $T \in \mathbf{R}$ sia $Q_T = \Omega \times (0, T)$ in $\mathbf{R}^{N+1}$ e S_T la sua superficie laterale e $\Gamma = S_T \cup (\Omega \times \{0\})$.

Si consideri l'operatore differenziale del secondo ordine a coefficienti reali n Q_T definito da:

$$L = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t) D_i D_j + a(x,t) + D_t$$

dove $a_{ij} : Q_T \to \mathbf{R}$ sono lipschitziane con $a_{ij} = a_{ji}$ per $1 \leq i \leq N$ $1 \leq j \leq N$ ed $a : Q_T \to \mathbf{R}$ è limitata e misurabile, ed esista inoltre una costante $K > 0$ tale che per ogni

$$(x,t) \in Q_T \text{ e } \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N) \in \mathbf{R}^N$$

risulti:

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\, \xi_i \xi_j \geq K |\xi|^2$$

PROP. 1 (Principio di massimo): *Se* $u \in W_p^2(Q_T)$ (1) *con* $p > N + 2$ *verifica le condizioni:*

$$\begin{array}{ll} Lu(x,t) \geqslant 0 & \text{q.o. in } Q_T \\ u(x,t) \geqslant 0 & \text{su } \Gamma \end{array}$$

allora risulta $u \geqslant 0$ *q.o. in* Q_T (2).

PROP. 2: *Sia* $p > N + 2$. *Allora per* $u \in W_p^2(Q_T)$ *tale che* $u = 0$ *su* Γ, *si ha:*

$$mis\{(x,t) \in Q_T \mid u(x,t) > 0\} \neq 0 \Rightarrow mis\{(x,t) \in Q_T \mid u(x,t) > 0,$$
$$Lu(x,t) > 0\} \neq 0.$$

DIM.: Sia $\omega = \{(x,t) \in Q_T \mid u(x,t) > 0\}$ ed $u^+(x,t) = max\{u(x,t), 0\}$ per ogni $(x,t) \in Q_T$. Poiché $p > N + 2$, $W_p^2(Q_T)$ è immerso in $W_2^2(Q_T)$ e per un risultato di Ladyzhenskaya e Ural'tseva (3) si ha che:

$u^+ \in W_2^1(Q_T)$ ed inoltre:

$$D_i u^+ = \begin{cases} D_i u & \text{in } \omega \\ 0 & \text{in } Q_T - \omega \end{cases}$$

$$D_t u^+ = \begin{cases} D_t u & \text{in } \omega \\ 0 & \text{in } Q_T - \omega \end{cases}$$

Quindi se mis $\omega \neq 0$, si ha che:

$$\int_\omega u\, Lu\, dxdt = \int_{Q_T} u^+ Lu\, dxdt = -\int \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i u^+ D_j u^+ dxdt +$$
$$+ \int_{Q_T} au^{+2} dxdt + \int_{Q_T} u^+ D_t u^+ dxdt \geqslant K \sum_{i=1}^N \int_{Q_T} (D_i u^+)^2 dxdt +$$
$$+ \int_{Q_T} au^{+2} dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega [u^+(T)]^2 dx > 0$$

Perciò se per assurdo mis $\omega \neq 0$ e mis$\{(x,t) \in Q_T \mid u(x,t) > 0$ e

---

(1) Per $k \in N$ e $1 < p < \infty$ denotiamo

$W_p^k(Q_T) = \{f \in L^p(Q_T) \mid D^\alpha D^\beta f \in L^p(Q_T)$ per $|\alpha| + 2|\beta| \leq k\}$.

(2) Cfr. [4], lemma 4.3.

(3) Cfr. [3], pag. 52.

$L\,u(x,t) > 0\} = 0$, si avrebbe:

$u(x,t)\,L\,u(x,t) \leqslant 0$ q.o. in ω e quindi $\int_{\omega} u\,Lu\,dxdt \leqslant 0$

e ciò è in contraddizione con quanto detto sopra.

PROP. 3: *Se $f \in L^p(Q_T)$, $1 < p < \infty$, il problema*

$$Lu = f \text{ q.o. in } Q_T,\ u = 0 \text{ su } \Gamma$$

ammette una ed una sola soluzione $u \in W^2_p(Q_T)$ ed inoltre risulta:

$$\| u \|_{W^2_p(Q_T)} \leq c \, \| f \|_{L^p(Q_T)} \text{ (4)}$$

PROP. 4: *Sia X uno spazio di Banach ordinato da un cono K e siano $\underline{x}$, $\bar{x} \in X$ con $\underline{x} \leqslant \bar{x}$ e sia $F : [\underline{x}, \bar{x}] \to X$ crescente e tale che:*

1) $\underline{x} \leqslant F(\underline{x})$, $\bar{x} \geqslant F(\bar{x})$

2) *$F([\underline{x}, \bar{x}])$ compatto in X.*

Allora l'insieme $\mathfrak{J} = \{x \in X \mid x = F(x)\} \neq \phi$ ed $\mathfrak{J}$ contiene il più piccolo ed il più grande elemento (5).

2. Consideriamo il problema di Dirichlet:

$$\begin{aligned} L\,u(x,t) &= f(u(x,t)) + r(x,t) \quad \text{in } Q_T \\ u(x,t) &= 0 \quad \text{su } \Gamma \end{aligned} \tag{1.1}$$

dove $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $r : Q_T \to \mathbf{R}$ sono funzioni assegnate.

Indichiamo con

$B = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ f a variazione limitata su intervalli compatti$\}$
e per ogni $s \in \mathbf{R}$

$$f(s^+) = \lim_{\varepsilon \to o^+} f(s + \varepsilon)$$

$$f(s^-) = \lim_{\varepsilon \to o^-} f(s - \varepsilon)$$

Sia inoltre

$$\bar{f}(s) = \begin{cases} \{f(s)\} & \text{se } f(s^+) \geqslant f(s^-) \\ [f(s^+), f(s^-)] & \text{se } f(s^-) > f(s^+) \end{cases}$$

(4) Cfr. [2], teorema 9.1 pag. 341.
(5) Cfr. [1].

e

$$BN = \{f \in B \mid \forall\, s \in \mathbf{R} \quad f(s) \in C_o\{f(s^+), f(s^-)\}\}$$

ove $C_o\{f(s^+), f(s^-)\}$ rappresenta l'inviluppo convesso di $\{f(s^+), f(s^-)\}$.

Si consideri ora per ogni $r \in L^p(Q_T), p > N+2$ il problema

$$\begin{aligned} &L\,u(x,t) \in \tilde{f}(u(x,t)) + r(x,t) && \text{q.o. in } Q_T \\ &u(x,t) = 0 && \text{su } \Gamma \end{aligned} \tag{1.2}$$

E' chiaro che, se $f(s^+) \geqslant f(s^-)$ $\forall\, s \in \mathbf{R}$, il problema (1.2) è equivalente al problema (1.1).

Diremo che $\Phi \in W^2_p(Q_T)$ è una sottosoluzione di (1.2) se

$$\begin{aligned} &L\,\Phi(x,t) \leqslant \max\{s : s \in \tilde{f}(\Phi(x,t))\} + r(x,t) && \text{q.o. in } Q_T \\ &\Phi\,(x,t) \leqslant 0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

Diremo che $\psi \in W^2_p(Q_T)$ è una soprasoluzione [6] di (1.2) se

$$\begin{aligned} &L\,\psi(x,t) \geqslant \min\{s : s \in \tilde{f}(\psi(x,t))\} + r(x,t) && \text{q.o. in } Q_T \\ &\psi(x,t) \geqslant 0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

Teorema 1: *Supponiamo che $r \in L^p(Q_T)$ con $p > N+2$ e f sia differenziabile con continuità. Se esiste una sottosoluzione Φ ed una soprasoluzione ψ di (1.1) con $\Phi(x,t) \leq \psi(x,t)\,\forall\,(x,t) \in Q_T$, allora esiste la più piccola e la più grande soluzione $\underline{u}$ e $\bar{u}$ di (1.1) in* $[\Phi, \psi]$ [7].

Dim.: Indichiamo con

$$\gamma = max\{-f'(s), \quad s \in [min\,\Phi, max\,\psi]\}$$

Il problema (1.1) equivale al problema (1.2) essendo f differenziabile e quindi il problema (1.2) può pertanto scriversi:

$$\begin{aligned} &Lu + \gamma u = f(u) + \gamma u + r && \text{q.o. in } Q_T \\ &u = 0 && \text{su } \Gamma \end{aligned} \tag{1.3}$$

Essendo $f'(s) + \gamma \geqslant 0$ $\forall\, s \in [\min\Phi, \max\psi]$, la funzione $f(s) + \gamma s$ è ivi non decrescente, e quindi, posto $F(u) = f(u) + \gamma u + r$ si ha che il problema (1.3) è equivalente a

$$u = (L + \gamma I)^{-1} F(u)$$

(6) Poiché $f \in BN$, una soluzione di (1.1) è una sottosoluzione e una soprasoluzione.

(7) $[\Phi, \psi] = \{u \in W^2_p(Q_T) \mid \Phi \leq u \leq \psi\}$.

Poniamo ora $X = C(\bar{Q}_T)$ e $K = \{u \in X \; u(x,t) \geqslant 0 \forall (x,t) \in \bar{Q}_T\}$
Definiamo $g : [\Phi, \psi] \to X$ mediante

$$g(u) = (L + \gamma I)^{-1} F(u)$$

Si osservi che $F : C(\bar{Q}_T) \to L^p(Q_T)$ è continua.

Consegue che $g : C(\bar{Q}_T) \to W_p^2(Q_T)$ è continua (cfr. prop. 3 del n. 1).

Proviamo ora che g è crescente; risulta infatti da:

$$\Phi(x,t) \leq u(x,t) \leq v(x,t) \leq \psi(x,t)$$

che

$$F(\Phi(x,t)) \leq F(u(x,t)) \leq F(v(x,t)) \leq F(\psi(x,t))$$

Quindi

$$g(v) - g(u) = (L + \gamma I)^{-1} F(v) - (L + \gamma I)^{-1} F(u) =$$
$$= (L + \gamma I)^{-1} [F(v) - F(u)] \geqslant 0$$

l'ultima diseguaglianza essendo vera per il principio di massimo (cfr. prop. 1) del n. 1).

Inoltre, poiché Φ è sottosoluzione risulta $\Phi \geqslant g(\Phi)$ e poiché ψ è una soprasoluzione si ha $\psi \geqslant g(\psi)$.

Dimostriamo quindi che $\overline{g([\Phi, \psi])}$ è compatto in X. Infatti:

$$\| g(u) \|_{W_p^2(Q_T)} = \| (L + \gamma I)^{-1} F(u) \|_{W_p^2(Q_T)} \leqslant$$
$$\leqslant C \| F(u) \|_{L^p(Q_T)} \leqslant C \| p \|_{L^p(Q_T)} + D.$$

Ne segue che $g([\Phi,\psi])$ è limitato in $W_p^2(Q_T)$ e poiché per $p > N + 2$ $W_p^2(Q_T) \in C(\bar{Q}_T)$ (8) e tale immersione è compatta, risulta che $g([\Phi, \psi])$ è compatto in X.

Risultano pertanto verificate tutte le ipotesi del teorema di H. Amann (cfr. pro. 4 del n. 1), si può quindi asserire la tesi.

Proviamo ora il seguente

TEOREMA 2: *Sia f differenziabile con continuità e supponiamo che*

$$\lim_{s \to \pm\infty} \sup \frac{f(s)}{s} < +\infty$$

(8) Per $p > N + 2$, $W_p^2(Q_T) \hookrightarrow C^{\mu}(Q_T) \hookrightarrow\hookrightarrow C(Q_T)$ con $0 \leqslant \mu \leqslant 1 - \dfrac{N+2}{p}$

Allora per ogni $r \in L^p(Q_T)$, $p > N + 2$, *esiste una soluzione* $u \in W^2_p(Q_T)$ *di* (1.2).

DIM. Poiché $\lim_{s\to+\infty} \sup \frac{f(s)}{s} < +\infty$, esiste $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tali che

$f(s) \leqslant \alpha s + \beta \ \forall\ s \geqslant 0$.

Sia quindi $\psi(x, t)$ una soluzione del problema

$$\begin{aligned} &Lu = \alpha u + \max\{0, r\} + \beta && \text{q.o. in } Q_T \\ &u = 0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

Una tale soluzione esiste ed è tale che $\psi(x, t) \geqslant 0 \ \forall\ (x, t) \in Q_T$ (cfr. prop. 1 del n. 1) e

$$\begin{aligned} &L\psi(x, t) \geqslant f(\psi(x, t)) + \max\{0, r(x, t)\} && \text{q.o. in } Q_T \\ &\psi(x, t) \geqslant 0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

quindi ψ è una soprasoluzione. Poiché inoltre $\lim_{s\to-\infty} \sup \frac{f(s)}{s} < +\infty$ esiste $\alpha' > 0$ e $\beta' < 0$ tale che $f(s) \geqslant \alpha' s + \gamma' \ \forall\ s \leqslant 0$.

Sia Φ una soluzione del roblema

$$\begin{aligned} &Lu = \alpha' u + \min\{0, r\} + \beta' && \text{q.o. in } Q_T \\ &u = 0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

Una tale soluzione esiste ed è tale che $\Phi(x, t) \leqslant 0 \ \forall\ (x, t) \in Q_T$ e

$$\begin{aligned} &L\Phi(x, t) \leqslant f(\Phi(x, t)) + \min\{0, r(x, t)\} && \text{q.o. in } Q_T \\ &\Phi(x, t) \leqslant 0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

quindi Φ è una sottosoluzione. Esiste allora una soluzione al problema (1.2).

Vediamo ora il caso in cui $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è noncrescente. Sia per $\varepsilon > 0$

$J_\varepsilon : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $J_\varepsilon \in C^\infty$ tale che

$J_\varepsilon(x) = 0$ per $|x| \geqslant \varepsilon$

$J_\varepsilon(x) \geqslant 0 \forall x \in \mathbf{R}, J_\varepsilon(x) = J_\varepsilon(-x)$ e $\int_{\mathbf{R}} J_\varepsilon(x)\, dx = 1$

Data $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ non crescente, sia $f_\varepsilon : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ così definita:

$$f_\varepsilon(s) = \int_{\mathbf{R}} f(r + s)\, J_\varepsilon(r)\, dr = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(r + s)\, J_\varepsilon(r)\, dr =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} f(t)\, J_\varepsilon(t-s)\, dt = \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} f(t)\, J_\varepsilon(t-s)\, dt$$

Risulta che $f_\varepsilon \in C^\infty$ e poiché per $s \leqslant s'$:

$$f_\varepsilon(s) - f_\varepsilon(s') = \int_{\mathbf{R}} [f(r-s) - f(r+s')]\, J_\varepsilon(r)\, dr \geqslant 0$$

si ha che f_ε è non crescente. Inoltre

$$f(s+\varepsilon) \leqslant \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} f(t)\, J(t-s)\, dt \leq f(s-\varepsilon)$$

$$f(s+\varepsilon) \leqslant f_\varepsilon(s) \leqslant f(s-\varepsilon) \qquad \forall\, s \in \mathbf{R} \quad \varepsilon > 0$$

LEMMA 1: *Se* $s_\varepsilon \to s_o$ *per* $\varepsilon \to 0_+$, *allora*

$$f(s_o+) \leq \varliminf_{\varepsilon \to 0_+} f_\varepsilon(s_\varepsilon) \leq \varlimsup_{\varepsilon \to 0_+} f_\varepsilon(s_\varepsilon) \leq f(s_o-)$$

DIM.: cfr. [6].

LEMMA 2: *Se* u_ε *converge ad* u *in* $C(\bar{Q}_T)$ *e* $f_\varepsilon(u_\varepsilon)$ *converge a* w *debolmente in* $L^2(Q_T)$ *per* $\varepsilon \to 0_+$, *allora* $w \in L^\infty(Q_T)$ *e* $w(x,t) \in \bar{f}(u(x,t))$ *per quasi tutti gli* $(x,t) \in Q_T$.

DIM.: Le funzioni $f_\varepsilon(u_\varepsilon)$ sono uniformemente limitate su $\bar{Q}_T$ per $\varepsilon \to 0_+$ e $f_\varepsilon(u_\varepsilon(x,t)) \geqslant -M \forall (x,t) \in Q_T$. Se $\Phi(L^p(Q_T)$ e $\Phi \geqslant 0$, allora

$$\int_0^T \int_\Omega w(x,t)\, \Phi(x,t)\, dx\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^T \int_\Omega f_\varepsilon(u_\varepsilon(x,t))\, \Phi(x,t)\, dx\, dt$$

Ora poiché risulta:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^T \int_\Omega (f_\varepsilon(u_\varepsilon) + M)\, \Phi(x,t)\, dx\, dt \geqslant \int_0^T \int_\Omega \varliminf_{\varepsilon \to 0^+} (f_\varepsilon(u_\varepsilon) + M)\, \Phi(x,t)\, dx\, dt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega \varliminf_{\varepsilon \to 0^+} (f_\varepsilon(u_\varepsilon) + M)\, \Phi(x,t)\, dx\, dt$$

si ha che

$$\int_0^T \int_\Omega \varliminf_{\varepsilon \to 0^+} f_\varepsilon(u_\varepsilon(x,t))\, \Phi(x,t)\, dx\, dt \geqslant \int_0^T \int_\Omega f(u(x,t)+)\, \Phi(x,t)\, dx\, dt$$

Quindi $w(x,t) \geqslant f(u(x,t)+)$ q.o in Q_T. Analogamente

$$\int_0^T \int_\Omega w(x,t) \Phi(x,t)\, dx dt \leqslant \int_0^T \int_\Omega \varlimsup_{\varepsilon \to 0^+} f_\varepsilon(u_\varepsilon(x,t))\, \Phi(x,t)\, dx\, dt$$

$$\leqslant \int_0^T \int_\Omega f(u(x,t)-)\,\Phi\,(x,t)\,dx\,dt$$

Quindi $w(x,t) \leqslant f(u(x,t)-)$ q.o. in Q_T. Segue allora che $w(x,t) \in \bar{f}(u(x,t))$. Essendo inoltre u limitata in $\bar{Q}_T$, segue che $w \in L^\infty(Q_T)$.

TEOREMA 3: *Supponiamo che f sia non crescente. Allora per ogni $r \in L^p(Q_T)$ esiste una ed una sola soluzione in $W_p^2(Q_T)$ di* (1.2).

DIM.: Poiché, per ipotesi, f è non crescente, esiste $\beta>0$ tale che

$$f(s) \leqslant \beta \qquad \forall\, s \geqslant -1.$$

Considerata, poi, per ogni $\varepsilon > 0\, f_\varepsilon$, si ha:

$$f_\varepsilon(s) = \int_{-\varepsilon}^{+\infty} f(r+s)\,J_\varepsilon(r)\,dr \leqslant \beta \int_{-\varepsilon}^{+\infty} J_\varepsilon(r)\,dr = \beta$$

per $s \geqslant 0,\ 0 < \epsilon \leqslant 1$.

Sia ψ una soluzione del problema:

$$\begin{aligned} L\psi(x,t) &= \beta + \max\{0, r(x,t)\} && \text{in } Q_T \\ \psi(x,t) &= 0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

Per il principio di massimo (cfr. prop. 1 del n. 1) si ha che $\psi \geqslant 0$ q.o. in Q_T e inoltre:

$$L\,\psi\,(x,t) \geqslant f_\varepsilon(\psi(x,t)) + r(x,t) \qquad 0 < \epsilon \leqslant 1$$

Per ipotesi si ha anche che eiste $\beta_1 > 0$

$$f\,(s) \geqslant -\beta_1 \qquad \forall\, s \leq 1$$

e perciò

$$f_\varepsilon(s) \geqslant -\beta_1 \qquad \forall\, s \leq 0, 0 < \epsilon \leq 1.$$

Detta quindi Φ una soluzione di

$$\begin{aligned} L\,\Phi(x,t) &= \beta_1 + \min\{0, r(x,t)\} && \text{q.o. in } Q_T \\ \Phi(x,t) &= 0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

si ha che $\Phi \leqslant 0$ q.o. in Q_T e

$$L\,\Phi(x,t) \leqslant f_\varepsilon(\Phi(x,t)) + r(x,t) \qquad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Quindi per ogni $\varepsilon \in [0,1]$ $\exists\ u_\varepsilon \in W_p^2(Q_T)$ tale che $u_\varepsilon \in [\Phi, \psi]$

$$Lu_\varepsilon(x,t) = f_\varepsilon(u_\varepsilon(x,t)) + r(x,t) \qquad \text{q.o. in } Q_T$$
$$u_\varepsilon(x,t) = 0 \qquad \text{su } \Gamma$$

e

$$\| u_\varepsilon \|_{W^2_p(Q_T)} \leqslant C \| f_\varepsilon(u_\varepsilon) + r \|_{L^p(Q_T)} \leqslant C [\| r \|_{L^p(Q_T)} + M | \Omega |^{1/p}]$$

dove M è tale che $| f_\varepsilon(u_\varepsilon(x,t)) | < M \; \forall \, (x,t) \in Q_T$ e $0 < \epsilon \leqslant 1$.

Quindi poiché $W^2_p(Q_T)$ è immerso $C(\bar{Q}_T)$ e tale immersione è compatta esiste una sequenza u_ε tale che $u_\varepsilon \to u_0$ per $\varepsilon \to 0$ in $C(\bar{Q}_T)$. Inoltre u_ε converge debolmente in $W^1_p(Q_T)$.

Per $\varphi \in C^\infty_0(Q_T)$, risulta che

$$\int_\Omega \int_0^T - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x,t) D_i D_j u_\epsilon(x,t) \varphi(x,t) \, dx \, dt =$$

$$\int_\Omega \int_0^T \sum_{i,j=1}^N D_j u_\epsilon(x,t) D_i [a_{ij}(x,t) \varphi(x,t)] \, dx \, dt$$

e quest'ultimo integrale poiché $D_i [a_{ij} \varphi] \in L^{p'}(Q_T)$ ove p' è tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, converge per $\varepsilon \to 0$ a

$$\int_\Omega \int_0^T \sum_{i,j=1}^N D_j u_0(x,t) D_i a_{ij}(x,t) \varphi(x,t) \, dx \, dt$$

Poi si ha che:

$$\int_{Q_T} a u_\varepsilon(x,t) \varphi(x,t) \, dx \, dt \text{ converge a } \int_{Q_T} a u_o(x,t) \varphi(x,t) \, dx\text{-}dt \text{ e}$$

$$\int_{Q_T} D_t u_\varepsilon \varphi(x,t) \, dx \, dt \text{ converge a } \int_{Q_T} D_t u_o \varphi(x,t) \, dx \, dt$$

e quindi

$$\int_{Q_T} Lu_\varepsilon(x,t) \varphi(x,t) \, dx \, dt \text{ converge a}$$

$$\int_{Q_T} \sum_{i,j=1}^N D_j u_o D_i [a_{ij} \varphi] + [a u_o + D_t u_o] \varphi \, dx \, dt \tag{1.4}$$

D'altra parte

$$\int_{Q_T} [f_\varepsilon(u_\varepsilon(x,t)) + r(x,t)]\, \varphi\, dx\, dt \text{ converge a}$$

$$\int_{Q_T} (w + r)\, \varphi\, dx\, dt \tag{1.5}$$

dove w è il limite debole di $f_\varepsilon(u_\varepsilon)$ in $L^p(Q_T)$. Quindi l'uguaglianza di (1.4) con (1.5).

Sia $v \in W^2_p(Q_T)$ una soluzione di

$$\sum_{i,j=1}^N D_i(a_{ij} D_j v) = z \qquad \text{in } Q_T$$

$$u = 0 \qquad \text{su } \Gamma$$

ove $z = w + r - \sum_{i,j} D_j u_o D_i a_{ij} - a u_o - D_t u_o$

Allora $\displaystyle\int_{Q_T} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_j v D_i \varphi\, dx\, dt = \int_{Q_T} z \varphi\, dx\, dt = \int_{Q_T} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_j u_o D_i \varphi\, dx\, dt$

$\forall \varphi \in C^\infty_0(Q_T)$

Risulta quindi

$$\int_{Q_T} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_j (u_o - v) D_i \varphi\, dx\, dt = 0 \qquad \forall \varphi \in W^2_1(Q_T)$$

Ma

$$\int_{Q_T} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_j(u_o - v)\, D_i(u_o - v) = 0$$

Questo implica che $u_o = v$ e quindi $u_o \in W^2_p(Q_T)$.

Quindi

$$Lu_o = w + r \in f(u_o(x,t)) + r(x,t)$$

e ciò segue dal fatto che $w(x,t) \in \tilde{f}(u(x,t))$ q.o. in Q_T per il lemma 2).

Dimostriamo l'unicità.

Siano u, v soluzioni. Sia

$$\omega = \{(x,t) \mid u(x,t) > v(x,t)\}$$

ω è un aperto e per $(x,t) \in \omega$ $f(u(x,t)^-) \leqslant f(v(x,t)^+)$

$$Lu(x,t) \leqslant f(u(x,t)^-) + r(x,t)$$

$$Lv(x,t) \geqslant f(v(x,t)^+) + r(x,t)$$

e

$$L(u-v) \leqslant f(u(x,t)^-) - f(v(x,t)^+) \leqslant 0 \text{ su } \omega$$

Quindi per la prop. 2 del n. 1 $u \leqslant v$ su ω e perciò $u = v$ q.o. in Q_T.

Vediamo ora il caso generale in cui $f \in BN$. Premettiamo i seguenti lemmi.

LEMMA 3: *Sia $f \in BN$. Allora esistono due funzioni non decrescenti $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che:*

1) $f(t) = g(t) - h(t) \; \forall \, t \in \mathbf{R}$

2) *g è continua su* $\{t \in \mathbf{R} \mid f(t^+) \leqslant f(t^-)\}$

3) *h è continua su* $\{t \in \mathbf{R} \mid f(t^+) \geqslant f(t^-)\}$

LEMMA 4: *Sia $f \in BN$ e $f = g - h$ (g e h del lemma 5)). Allora* $\tilde{f}(t) = g(t) + (-\tilde{h})(t) \quad \forall \, t \in \mathbf{R}$.

LEMMA 5: *Sia $u \in C(\bar{Q}_T)$ e $f \in BN$. Allora $fou: \bar{Q}_T \to \mathbf{R}$ è limitata e misurabile.*

(Per questi lemmi cfr. [6]).

TEOREMA 4: *Sia $f \in BN$ e $r \in L^p(Q_T)$. Se esiste una sottosoluzione e una soprasoluzione di (1.2) con $\Phi(x,t) \leqslant \psi(x,t) \, \forall (x,t) \in Q_T$, allora esiste la più piccola soluzione u e la più grande $\bar{u}$ in $[\Phi, \psi]$.*

DIM.: Sia $X = C(\bar{Q}_T)$, $K = \{u \in X \mid u(x,t) \geqslant 0 \, \forall (x,t) \in Q_T\}$. Per il lemma 3) esiste g e h tali che $f = g - h$ con g e h verificanti 1) 2) 3) del suddetto lemma.

Posto

$$\lambda > \max\{-a(x,t), (x,t) \in \bar{Q}_T\}$$

il problema (1.2) equivale a

$$(L + \lambda I)\, u \in \tilde{f}(u) + \lambda u + r$$

e quindi a

$$(L + \lambda I)\, u \in g(u) + [-h(u^+), -h(u^-)] + \lambda u + r$$

Sia Tu l'unica soluzione $u \in W^2_p(Q_T)$ del problema:

$$(L + \lambda I)\, v(x,t) \in (-\tilde{h})(v(x,t)) + g(u(x,t)) + \lambda u(x,t) + r(x,t) \quad \text{q.o. in } Q_T$$

$$v(x,t) = 0 \quad \text{su } \Gamma$$

Ciò è possibile per il teorema 3), perché $-h$ è non crescente.

Quindi il problema (1.2) equivale a trovare una u tale che $Tu = u$.

Cominciamo col mostrare che T è crescente.

Siano $\Phi \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \psi$ e sia $v_1 = Tu_1, v_2 = T_{u_2}$. Dobbiamo dimostrare che $v_1 \leqslant v_2$.

Poniamo

$$\omega = \{ (x, t) \mid v_1(x, t) > v_2(x, t) \}$$

Risulta

$$(L + \lambda I)\, v_1(x, t) \leqslant -h(v_1(x, t)^-) + g(u_1(x, t)) + \lambda u_1(x, t) + r(x, t)$$

$$(L + \lambda I)\, v_2(x, t) \geqslant -h(v_2(x, t)^+) + g(u_2(x, t)) + \lambda u_2(x, t) + r(x, t)$$

Quindi

$$(L + \lambda I)\, (v_2 - v_1)\, (x, t) \geqslant -h(v_2(x, t)^+) + h(v_1(x, t)^-) +$$
$$+ g(u(x, t)) - g(u_1(x, t)) + \lambda u_2(x, t) - \lambda u_1(x, t) \geqslant 0$$

Consegue per la proposizione 2 del n. 1 che $\omega = \phi$ e quindi $v_1 \leqslant v_2$.

Sia quindi $v = T\Phi$. Allora

$$(L + \lambda I)\, v\, [-h(\Phi(x, t)^+), -h(\Phi(x, t)^-)] + g(\Phi(x, t)) + \lambda\Phi(x, t) +$$
$$+ r(x, t) \geqslant -h(\Phi(x, t)^+) + g(\Phi(x, t)) + \lambda\Phi(x, t) + r(x, t)$$

Sia $\omega = \{ (x, t) \mid \Phi(x, t) > v(x, t) \}$

$$(L + \lambda I)\, \Phi(x, t) \leqslant \max\{ s \in \mathfrak{f}\, (\Phi(x, t)) \} + \lambda\Phi(x, t) + r(x, t) \leqslant$$
$$\leqslant g(\Phi(x, t)) - h(\Phi(x, t)^-) + \lambda\Phi + r$$

$$(L + \lambda I)\, (v - \Phi) \geqslant 0 \text{ per } (x, t) \in \omega$$

perché $-h(v^+) \geqslant -h(\Phi^-)$.

Quindi ω è l'insieme vuoto. Si ha allora che $\Phi \leqslant T\Phi$. Analogamente al caso C^1 (teorema 1) si prova che $\overline{T[\Phi, \psi]}$ è compatto su X. Per il teorema di H. Amann rimane provato l'asserto.

TEOREMA 5: *Sia $f \in BN$ e si supponga che*

$$\limsup_{s \pm\to \infty} \frac{f(s)}{s} < +\infty$$

Allora per ogni $r \in L^p(Q_T)$, il problema (1.2) ha soluzione in $W^2_p(Q_T)$.

DIM: Poiché, per ipotesi, risulta che $\limsup\limits_{s \pm\to \infty} \frac{f(s)}{s} < +\infty$, si ha che esiste $\alpha > 0, \beta > 0$ tale che:

$$f(s) < \alpha s + \beta \qquad \forall\, s \geqslant 0$$

ed esiste $\alpha_1 > 0, \beta_1 > 0$ tale che

$$f(s) > \alpha_1 s - \beta_1 \qquad \forall\, s \leq 0$$

Sia ψ una soluzione del problema:

$$\begin{aligned} L\psi(x,t) &= \alpha\psi(x,t) + \beta + \max\{0, r(x,t)\} && \text{in } Q_T \\ \psi(x,t) &= 0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

Per il principio di massimo si ha che $\psi \geqslant 0$ q.o. in Q_T e inoltre che

$$L\psi\,(x,t) \geqslant f(\psi(x,t)) + r(x,t)$$

Quindi ψ è una soprasoluzione di (1.2).

Analogamente detta Φ una soluzione del roblema

$$\begin{aligned} L\Phi(x,t) &= \alpha_1 \Phi(x,t) + \beta_1 + \min\{0, r(x,t)\} && \text{in } Q_T \\ \Phi(x,t) &= 0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

si ha che $\Phi \leq 0$ e che Φ è una sottosoluzione di (1.2). Quindi per il teorema 4), il problema (1.2) ha soluzione.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. AMANN, *Order structures and fixed points.* Atti del S.A.F.A. II, Cosenza (1977).

[2] LADYZENSKAJA, SOLONNIKOV, URAL'TSEVA, *Linear and quasi linear equations of parabolic type.*

[3] LADYZENSKAJA, URAL'TSEVA, *Linear and quantum elliptic equations.* Academic Press, New York and London (1968).

[4] NICOLOSI F., *Sottosoluzioni deboli delle equazioni paraboliche lineari del secondo ordine superiormente limitate.* Le Matematiche vol. XXVIII, Catania (1973).

[5] STUART C. A., *Maximal and minimal solutions of elliptic differential equations with discontinuous non-linearities.* Math. Zeitschrift by Springer Verlag (1978).

[6] STUART C. A., *Elliptic differential equations with discontinuous non-linearities,* (preprint).