ZUR DARSTELLUNG VON LÖSUNGEN EINER KLASSE LINEARER PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN (*)

von JÜRGEN PÜNGEL (in Graz) (**)

SOMMARIO. - *Questa nota riguarda la costruzione di operatori differenziali lineari*

$$T = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} a_{ik}(z, \zeta) \frac{\partial^{i+k}}{\partial z^i \partial \zeta^k},$$

$(z, \zeta) \in \mathbf{D} \subset \mathbf{C}^2$, *che trasformano tutte le soluzioni* $u(z, \zeta)$ *di equazioni* $u_{z\zeta} + a(z, \zeta) u_\zeta + b(z, \zeta) u_z = o$ *in soluzioni* $\tilde{u} = Tu$ *di equazioni* $\tilde{u}_{z\zeta} + \tilde{a}(z, \zeta) \tilde{u}_\zeta + \tilde{b}(z, \zeta) \tilde{u}_z = o$.

SUMMARY. - *This paper deals with the construction of linear differential operators*

$$T = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} a_{ik}(z, \zeta) \frac{\partial^{i+k}}{\partial z^i \partial \zeta^k},$$

$(z, \zeta) \in \mathbf{D} \subset \mathbf{C}^2$, *which map all solutions* $u(z, \zeta)$ *of equations* $u_{z\zeta} + a(z, \zeta) u_\zeta + b(z, \zeta) u_z = o$ *into solutions* $\tilde{u} = Tu$ *of equations* $\tilde{u}_{z\zeta} + \tilde{a}(z, \zeta) \tilde{u}_\zeta + \tilde{b}(z, \zeta) \tilde{u}_z = o$.

1. Einleitung, Voraussetzungen

Betrachtet wird eine Klasse $\mathfrak{C}$ von linearen partiellen Differentialoperatoren zweiter Ordnung in zwei komplexen Variablen. Jedem Operator $L \in \mathfrak{C}$ wird eine Schar von Operatoren der selben Klasse zugeordnet. Zu jedem Operator $\tilde{L}$ dieser Schar gibt es einen

(*) Pervenuto in Redazione il 7 gennaio 1981.
(**) Indirizzo dell'Autore: Institut für Mathematik - Technische Universität Graz - Steyrergasse 17 - A 8010 Graz (Austria).

linearen Differentialoperator (Darstellungsoperator) T derart, daß für alle Lösungen u von $Lu = o$ die Funktionen $\tilde{u} = Tu$ Lösungen von $\tilde{L}\tilde{u} = o$ sind $(T[\mathrm{kern}\, L] \subset \mathrm{kern}\, \tilde{L})$.

Die Koeffizienten der Differentialoperatoren aus $\mathfrak{G}$ sowie der Darstellungsoperatoren T werden dabei als (in einem gemeinsamen Gebiet des $\mathbf{C}^2$) holomorphe Funktionen vorausgesetzt. Dazu bezeichne

$$H := \{f \mid f : \mathbf{D} \to \mathbf{C} \text{ holomorph}\} \tag{1.1}$$

den (kommutativen) Ring der in einem Gebiet $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}^2$ holomorphen Funktionen von zwei komplexen Variablen,

$$E := \{e^g \mid g \in H\} \tag{1.2}$$

die Einheitengruppe und $1 := \mathrm{id}\,|_{\mathbf{D}}$ die Eins im Ring H.

Die Menge

$$\mathfrak{L} := \{L \mid L : H \to H \text{ linear}\} \tag{1.3}$$

aller linearen Abbildungen von H in sich ist in natürlicher Weise H-Linksmodul sowie (nichtkommutativer) Ring mit Eins $\partial_0 := id\,|_H$. Wie üblich sei mit $\mathrm{kern}\, L := \{u \mid u \in H \wedge Lu = o\}$ das Urbild der Nullfunktion $o \in H$ unter $L \in \mathfrak{L}$ und mit $L[G] := \{Lu \mid u \in G\}$ das Bild von $G \subset H$ unter $L \in \mathfrak{L}$ notiert. Die Potenzen von $L \in \mathfrak{L}$ seien durch $L^0 := \partial_0$ und $L^{n+1} := L \circ L^n$ für alle $n \in \mathbf{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ erklärt.

Für $j \in \{1, 2\}$ bezeichne $\partial_j \in \mathfrak{L}$ die Operatoren der komplexen partiellen Ableitungen bezüglich der j-ten Komponente in $\mathbf{D}$ und es sei abkürzend $f_{\underline{j}} := \partial_j f$ für $f \in H$ vereinbart. Für alle Operatoren $M := \partial_1 \partial_2 + a_{\underline{1}} \partial_2 + b_{\underline{2}} \partial_1 + c_{\underline{12}} \partial_0$, mit $a, b, c \in H$, und für alle $\omega \in E$ sind die Koeffizienten von

$$L := \left(\frac{1}{\omega} M\right) \circ \left(\omega \partial_0\right) = \partial_1 \partial_2 + (a + \ln \omega)_{\underline{1}} \partial_2 + (b + \ln \omega)_{\underline{2}} \partial_1 + \frac{M\omega}{\omega} \partial_0$$

holomorph. Ist zudem $\omega \in \mathrm{kern}\, M$, dann ist L ein Operator der Klasse

$$\mathfrak{G} := \{\partial_1 \partial_2 + a\, \partial_2 + b\, \partial_1 \mid a, b \in H\} \tag{1.4}$$

und es gilt $\omega \cdot \mathrm{kern}\, L = \mathrm{kern}\, M$. Wie z.B. in [7] ausgeführt, stehen die hier betrachteten Differentialgleichungen $u_{\underline{12}} + a\, u_{\underline{2}} + b\, u_{\underline{1}} + c\, u = o$ mit holomorphen Koeffizienten $a, b, c \in H$ in enger Beziehung zu reellen elliptischen Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten (vgl. auch [12]).

Für $n, m \in \mathbf{N}$ *sei mit*

$$\mathfrak{D}^{n,m} := \left\{ \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} a_{ik} \partial_1^i \partial_2^k \;\middle|\; a_{ik} \in H \text{ für } 0 \le i \le n, 0 \le k \le m \right\} \tag{1.5}$$

die Menge der linearen Differentialoperatoren von höchstens n-ter Ordnung in ∂_1 und höchstens m-ter Ordnung in ∂_2 notiert. Die Menge

$$\mathfrak{D} := \bigcup_{n,m \in \mathbf{N}} \mathfrak{D}^{n,m} \tag{1.6}$$

der linearen Differentialoperatoren beliebiger Ordnung ist Teilmodul und Teilring von $\mathfrak{L}$. Zu jedem im folgenden konstruierten Darstellungsoperator $T \in \mathfrak{D}$, der gemäß

$$T\,[\ker L] \subset \ker \tilde{L} \qquad \text{für } L, \tilde{L} \in \mathfrak{S} \tag{1.7}$$

alle Lösungen $u \in \ker L$ in Lösungen $Tu \in \ker \tilde{L}$ transformiert, gibt es einen Operator $\tilde{T} \in \mathfrak{D}$ mit $\tilde{L} \circ T = \tilde{T} \circ L$. Für den Fall $L = \partial_1 \partial_2$ werden Lösungsdarstellungen der Form (1.7) u.a. in [3] und [9] behandelt.

Lemma 1. *Es sei* $L := \partial_1 \partial_2 - a_{\underline{1}} \partial_2 - b_{\underline{2}} \partial_1$ *mit* $a, b \in H$, *also* $L \in \mathfrak{S}$. *Dann gilt:*

(a) Für alle $\alpha, \beta \in \ker L$ *ist*

$$\alpha_{\underline{1}}\,(b - \ln \alpha_{\underline{1}})_{\underline{2}} = -\,a_{\underline{1}}\,\alpha_{\underline{2}}, \quad \alpha_{\underline{2}}\,(a - \ln \alpha_{\underline{2}})_{\underline{1}} = -\,b_{\underline{2}}\,\alpha_{\underline{1}} \tag{1.8}$$

$$\alpha_{\underline{1}}^2\,(\beta_{\underline{1}} / \alpha_{\underline{1}})_{\underline{2}} = a_{\underline{1}}\,(\alpha_{\underline{1}}\,\beta_{\underline{2}} - \alpha_{\underline{2}}\,\beta_{\underline{1}}), \quad \alpha_{\underline{2}}^2\,(\beta_{\underline{2}} / \alpha_{\underline{2}})_{\underline{1}} = b_{\underline{2}}\,(\alpha_{\underline{1}}\,\beta_{\underline{2}} - \alpha_{\underline{2}}\,\beta_{\underline{1}}). \tag{1.9}$$

(b) Zu jedem $k \in \mathbf{N}^+ := \mathbf{N}\backslash\{0\}$ *gibt es* $2k+2$ *Funktionen* $p^{ko}, \ldots p^{kk}, q^{ko}, \ldots q^{kk} \in H$ *derart, daß für alle* $\alpha \in \ker L$

$$\partial_1 \partial_2^k\,\alpha = p^{ko}\,\partial_1\,\alpha + \sum_{i=1}^{k} p^{ki}\,\partial_2^i\,\alpha, \quad \partial_1^k\,\partial_2\,\alpha = q^{ko}\,\partial_2\,\alpha + \sum_{i=1}^{k} q^{ki}\,\partial_1^i\,\alpha \tag{1.10}$$

gilt. Insbesondere ist dabei

$$p^{kk} = a_{\underline{1}}, \; q^{kk} = b_{\underline{2}}; \quad p^{ko} = e^{-b}\,\partial_2^k\,e^b, \; q^{ko} = e^{-a}\,\partial_1^k\,e^a. \tag{1.11}$$

(c) Zu jedem Operator $T \in \mathfrak{D}^{n,m}$ *gibt es ein Paar von Operatoren* $(T_1, T_2) \in \mathfrak{D}^{n,o} \times \mathfrak{D}^{o,m}$ *mit* $T\,|_{\ker L} = (T_1 + T_2)\,|_{\ker L}$.

Beweis. (a) ist evident, (b) kann durch vollständige Induktion über $k \in \mathbf{N}^+$ gezeigt werden und (c) folgt unmittelbar aus (b). ■

2. Multilineare Differentialoperatoren, Transformationen 1. Ordnung

Für $L_1, \ldots L_k \in \mathfrak{L}$ und $f_1, \ldots f_k \in H$ $(k \in \mathbf{N}^+)$ sei

$$[L_1,\dots L_k\,/\,f_1,\dots f_k] := \begin{vmatrix} L_1 f_1 \dots L_1 f_k \\ \vdots \qquad \vdots \\ L_k f_1 \dots L_k f_k \end{vmatrix} \tag{2.1}$$

Ersichtlich ist die durch die Determinanten (2.1) definierte Abbildung $[\,\cdot\,/\,\cdot\,] : \mathfrak{L}^k \times H^k \to H$ Multilinearform, d.h. H-linear in den Operatoren $L_1,\dots L_k$ und $\mathbf{C}$-linear in den Funktionen $f_1,\dots f_k$. Speziell ist $[L_1,\dots L_k\,/\,f_1,\dots f_k] = o$, wenn $L_i = L_j$ für ein Paar (i,j) mit $i \neq j$. Insbesondere sind durch

$$D^{n,m}(f_1,\dots f_{n+m}) := \begin{cases} [\partial_1^{1},\dots \partial_1^{n}, \partial_2^{1},\dots \partial_2^{m}\,/\,f_1,\dots f_{n+m}] \text{ für } n,m \in \mathbf{N}^+ \\ [\partial_1^{1},\dots \partial_1^{n}\,/\,f_1,\dots f_n] \text{ für } n \in \mathbf{N}^+, m = 0 \\ [\partial_2^{1},\dots \partial_2^{m}\,/\,f_1,\dots f_m] \text{ für } n = 0, m \in \mathbf{N}^+ \\ 1 \text{ für } n = m = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

mit $f_1,\dots f_{n+m} \in H$ multilineare Differentialoperatoren $D^{n,m} : H^{n+m} \to H$ definiert. Im folgenden erweisen sich (für k-Tupel aus $\mathfrak{L}^k$ bzw. H^k) die Vereinbarungen

$$(x_1,\dots x_{i-1}, x, x_{i+1},\dots x_k) := \begin{cases} (x, x_2,\dots x_k) \text{ für } i = 1 \\ (x_1,\dots x_{k-1}, x) \text{ für } i = k \\ x \text{ für } i = k = 1 \end{cases}$$

als zweckmäßig. Differentiation von (2.1) ergibt für $j \in \{1,2\}$

$$\partial_j [L_1,\dots L_k\,/\,f_1,\dots f_k] = \sum_{i=1}^{k} [L_1,\dots L_{i-1}, \partial_j L_i, L_{i+1},\dots L_k\,/\,f_1,\dots f_k] \tag{2.3}$$

Die Beweise der Sätze 1 und 2 stützen sich im wesentlichen auf den Sylvester'schen Satz für Determinanten (vgl. [8]) in der Form von

LEMMA 2. *Für beliebige $k, l \in \mathbf{N}^+$ sei $L_1,\dots L_{k+l} \in \mathfrak{L}$ und $f_1,\dots f_{k+l} \in H$, sowie $P := [L_1,\dots L_{k+l}\,/\,f_1,\dots f_{k+l}]$, $A := [L_1,\dots L_k\,/\,f_1,\dots f_k]$ und $Q_{\mu\nu} := [L_1,\dots L_k, L_{k+\mu}\,/\,f_1,\dots f_k, f_{k+\nu}]$ mit $1 \le \mu \le l$, $1 \le \nu \le l$. Dann gilt*

$$\begin{vmatrix} Q_{11} & \dots & Q_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{l1} & \dots & Q_{ll} \end{vmatrix} = A^{l-1} P. \tag{2.4}$$

Einige der im weiteren verwendeten Eigenschaften der Operatoren $D^{n,m}$ nach (2.2) seien zusammengestellt in

LEMMA 3. *Es sei $f_1, f_2,\dots g \in H$ und $\alpha_1, \alpha_2,\dots \beta \in \operatorname{kern} L$ mit*

$L := \partial_1 \partial_2 - a_{\underline{1}} \partial_2 - b_{\underline{2}} \partial_1$ *und* $a, b \in H$, *sowie* $P^{k,l} := D^{k,l}(f_1, \dots f_{k+l})$ *und* $Q^{k,l} := D^{k,l}(\alpha_1, \dots \alpha_{k+l})$ *für* $k, l \in \mathbf{N}$. *Dann gilt*

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_1 P^{n,o} = [\partial_1^1, \dots \partial_1^{n-1}, \partial_1^{n+1} / f_1, \dots f_n] & \text{für } n \in \mathbf{N}^+ \\ \partial_2 P^{o,m} = [\partial_2^1, \dots \partial_2^{m-1}, \partial_2^{m+1} / f_1, \dots f_m] & \text{für } m \in \mathbf{N}^+ \end{array}\right\} \quad (2.5)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_1 Q^{o,m} = (b + ma)_{\underline{1}} Q^{o,m} - e^{-b} D^{1,m}(e^b, \alpha_1, \dots \alpha_m) & \text{für } m \in \mathbf{N} \\ \partial_2 Q^{n,o} = (a + nb)_{\underline{2}} Q^{n,o} - e^{-a} D^{n,1}(e^a, \alpha_1, \dots \alpha_n) & \text{für } n \in \mathbf{N} \end{array}\right\} \quad (2.6)$$

$$\left.\begin{array}{l} \partial_1 Q^{n,m} = [\partial_1^1, \dots \partial_1^{n-1}, \partial_1^{n+1}, \partial_2^1, \dots \partial_2^m / \alpha_1, \dots \alpha_{n+m}] + m\, a_{\underline{1}} Q^{n,m} \\ \qquad\qquad \text{für } n \in \mathbf{N}^+,\ m \in \mathbf{N} \\ \partial_2 Q^{n,m} = [\partial_1^1, \dots \partial_1^n, \partial_2^1, \dots \partial_2^{m-1}, \partial_2^{m+1} / \alpha_1, \dots \alpha_{n+m}] + n\, b_{\underline{2}} Q^{n,m} \\ \qquad\qquad \text{für } n \in \mathbf{N},\ m \in \mathbf{N}^+ \end{array}\right\} \quad (2.7)$$

$$\left.\begin{array}{ll} (P^{n,o})^2\, \partial_1 \left(D^{n,o}(f_1, \dots f_{n-1}, g) / P^{n,o}\right) = & \\ = P^{n-1,o} D^{n+1,o}(f_1, \dots f_n, g) & \text{für } n \in \mathbf{N}^+ \\ (P^{o,m})^2\, \partial_2 \left(D^{o,m}(f_1, \dots f_{m-1}, g) / P^{o,m}\right) = & \\ = P^{o,m-1} D^{o,m+1}(f_1, \dots f_m, g) & \text{für } m \in \mathbf{N}^+ \end{array}\right\} \quad (2.8)$$

$$\left.\begin{array}{ll} (Q^{n,m})^2\, \partial_1 \left(D^{n,m}(\alpha_1, \dots \alpha_{n+m-1}, \beta) / Q^{n,m}\right) = & \\ = Q^{n-1,m} D^{n+1,m}(\alpha_1, \dots \alpha_{n+m}, \beta) & \text{für } n \in \mathbf{N}^+,\ m \in \mathbf{N} \\ (Q^{n,m})^2\, \partial_2 \left(D^{n,m}(\alpha_1, \dots \alpha_{n+m-1}, \beta) / Q^{n,m}\right) = & \\ = Q^{n,m-1} D^{n,m+1}(\alpha_1, \dots \alpha_{n+m}, \beta) & \text{für } n \in \mathbf{N},\ m \in \mathbf{N}^+ \end{array}\right\} \quad (2.9)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \qquad (Q^{n,m})^2\, \partial_1 \left(Q^{n,m-1} / Q^{n,m}\right) = & \\ = Q^{n-1,m} Q^{n+1,m-1} - a_{\underline{1}} Q^{n,m-1} Q^{n,m} & \text{für } n, m \in \mathbf{N}^+ \\ \qquad (Q^{n,m})^2\, \partial_2 \left(Q^{n-1,m} / Q^{n,m}\right) = & \\ = Q^{n,m-1} Q^{n-1,m+1} - b_{\underline{2}} Q^{n-1,m} Q^{n,m} & \text{für } n, m \in \mathbf{N}^+ \end{array}\right\} \quad (2.10)$$

Beweis. (2.5) folgt aus (2.3). Gezeigt wird jeweils die erste der Formeln (2.6) bis (2.10), die zweite ergibt sich analog.

Zu (2.6): Entwicklung nach der ersten Spalte ergibt

$$D^{1,m}(e^b, \alpha_1, \dots \alpha_m) = (\partial_1 e^b)\, Q^{o,m} + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \; (\partial_2^k e^b)\, S_k \qquad \text{(i)}$$

mit

$S_k := [\partial_1^1, \partial_2^1, \ldots \partial_2^{k-1}, \partial_2^{k+1}, \ldots \partial_2^m / \alpha_1, \ldots \alpha_m]$. Nach (2.3) und (1.10) ist

$\partial_1 Q^{o,m} = \sum_{k=1}^{m} \left(p^{ko} (-1)^{k-1} S_k + \sum_{i=1}^{k} p^{ki} s_{ik} \right)$ mit $s_{ik} = o$ für $1 \le i \le k-1$

und $s_{kk} = Q^{o,m}$, woraus mit p^{ko} und p^{kk} nach (1.11)

$$\partial_1 Q^{o,m} = -e^{-b} \sum_{k=1}^{m} (-1)^k (\partial_2^k e^b) S_k + m\, a_{\underline{1}} Q^{o,m} \tag{ii}$$

folgt. Aus (i) und (ii) ergibt sich (2.6).

Zu (2.7): Aus (2.3) folgt $\partial_1 Q^{n,m} = \sum_{k=1}^{n} S'_k + \sum_{k=1}^{m} S''_k$ mit $S'_k = o$ für $1 \le k \le n-1$ und $S'_n = [\partial_1^1, \ldots \partial_1^{n-1}, \partial_1^{n+1}, \partial_2^1, \ldots \partial_2^m / \alpha_1, \ldots \alpha_{n+m}]$, sowie (wegen (1.10)) $S''_k = \sum_{i=1}^{k} p^{ki} s_{ik}$ mit $s_{ik} = o$ für $1 \le i \le k-1$ und $s_{kk} = Q^{n,m}$. Wegen (1.11) ist $S''_k = a_{\underline{1}} Q^{n,m}$ für alle $1 \le k \le m$ und somit $\partial_1 Q^{n,m} = S'_n + m\, a_{\underline{1}} Q^{n,m}$, d.h. (2.7).

Mit Lemma 2 folgt (2.8) aus (2.5) sowie (2.9) aus (2.7). Zu (2.10): Entwicklung von $Q^{n,m}$ nach der letzten Zeile führt zu

$Q^{n,m} = \sum_{i=1}^{n+m} A_i Q_i$ mit $A_i := \partial_2^m \alpha_i$ und

$Q_i := (-1)^{n+m+i} [\partial_1^1, \ldots \partial_1^n, \partial_2^1, \ldots \partial_2^{m-1} / \alpha_1, \ldots \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_{n+m}]$.

Es gilt dann $(Q^{n,m})^2 (Q^{n,m-1} / Q^{n,m})_{\underline{1}} = \sum_{i=1}^{n+m} A_i \Theta_i - Q^{n,m-1} \Sigma$ mit

$\Sigma := \sum_{i=1}^{n+m} A_{i\underline{1}} Q_i$ und $\Theta_i := \begin{vmatrix} Q_i & Q^{n,m-1} \\ Q_{i\underline{1}} & Q_{\underline{1}}^{n,m-1} \end{vmatrix}$, d.h. nach Lemma 2

$\Theta_i = (-1)^{n+m+i-1} Q^{n+1,m-1} [\partial_1^1, \ldots \partial_1^{n-1}, \partial_2^1, \ldots \partial_2^{m-1} / \alpha_1, \ldots \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_{n+m-1}]$.

Somit ist $\sum_{i=1}^{n+m} A_i \Theta_i = Q^{n+1,m+1} Q^{n-1,m}$. Wegen (1.10) ist $\Sigma = \sum_{j=1}^{m} p^{mj} S_j$ mit $S_j = o$ für $1 \le j \le m-1$ und $S_m = Q^{n,m}$, d.h. (wegen (1.11)) $\Sigma = a_{\underline{1}} Q^{n,m}$, womit (2.10) gezeigt ist. ■

Es werden zunächst Darstellungsoperatoren 1. Ordnung angegeben; d.h. Operatoren $T \in \mathfrak{D}^{1,1}$ mit der Eigenschaft, daß für (weitgehend) beliebiges $L \in \mathfrak{L}$ stets ein $\bar{L} \in \mathfrak{L}$ mit (1.7) existiert. Weitere solche Darstellungsoperatoren werden in [11], [2], [10] betrachtet (vgl. auch [1], [3], [9]). Die in Abschnitt 3 konstruierten Darstellungsoperatoren höherer Ordnung stellen dann im wesentlichen Kompositionen dieser Operatoren 1. Ordnung dar.

LEMMA 4 i. *Es sei* $L := \partial_1 \partial_2 - a_{\underline{1}} \partial_2 - b_{\underline{2}} \partial_1$ *mit* $a, b \in H$ *und* $a_{\underline{1}} \in E$. *Dann gilt für alle* $\alpha \in \operatorname{kern} L$ *mit* $\alpha_{\underline{1}} \in E$

$$u \in \operatorname{kern} L \;\Rightarrow\; u_{\underline{1}} / \alpha_{\underline{1}} \in \operatorname{kern} \tilde{L}, \tag{2.11 i}$$

wobei $\tilde{L} := \partial_1 \partial_2 - \tilde{a}_{\underline{1}} \partial_2 - \tilde{b}_{\underline{2}} \partial_1$, $\tilde{L} \in \mathfrak{S}$, *mit*

$$\left.\begin{aligned} \tilde{a} &:= a + \ln (a_{\underline{1}} / \alpha_{\underline{1}}) \\ \tilde{b} &:= b - \ln \alpha_{\underline{1}}. \end{aligned}\right\} \tag{2.12 i}$$

LEMMA 4 ii. *Es sei* $L := \partial_1 \partial_2 - a_{\underline{1}} \partial_2 - b_{\underline{2}} \partial_1$ *mit* $a, b \in H$ *und* $b_{\underline{2}} \in E$. *Dann gilt für alle* $\alpha \in \operatorname{kern} L$ *mit* $\alpha_{\underline{2}} \in E$

$$u \in \operatorname{kern} L \;\Rightarrow\; u_{\underline{2}} / \alpha_{\underline{2}} \in \operatorname{kern} \tilde{L}, \tag{2.11 ii}$$

wobei $\tilde{L} := \partial_1 \partial_2 - \tilde{a}_{\underline{1}} \partial_2 - \tilde{b}_{\underline{2}} \partial_1$, $\tilde{L} \in \mathfrak{S}$, *mit*

$$\left.\begin{aligned} \tilde{a} &:= a - \ln \alpha_{\underline{2}} \\ \tilde{b} &:= b + \ln (b_{\underline{2}} / \alpha_{\underline{2}}). \end{aligned}\right\} \tag{2.12 ii}$$

BEWEIS von Lemma 4i (4ii analog). Für $\alpha_{\underline{1}} \in E$ ist $\tilde{u} := u_{\underline{1}} / \alpha_{\underline{1}} \in H$ und mit (1.8), (1.9) folgt

$$\tilde{u}_{\underline{2}\,\underline{1}} - \left(a + \ln \frac{a_{\underline{1}}}{\alpha_{\underline{1}}} \right)_{\underline{1}} \tilde{u}_{\underline{2}} - \left(b - \ln \alpha_{\underline{1}} \right)_{\underline{2}} \tilde{u}_{\underline{1}} = o. \quad \blacksquare$$

LEMMA 5. *Es sei* $L := \partial_1 \partial_2 - a_{\underline{1}} \partial_2 - b_{\underline{2}} \partial_1$ *mit* $a, b \in H$. *Dann gilt für alle* $\alpha, \beta \in \operatorname{kern} L$ *mit* $\alpha_{\underline{1}} \alpha_{\underline{2}} D^{1,1}(\alpha, \beta) \in E$

$$u \in \operatorname{kern} L \;\Rightarrow\; D^{1,1}(\alpha, u) / D^{1,1}(\alpha, \beta) \in \operatorname{kern} \tilde{L} \tag{2.11}$$

wobei $\tilde{L} := \partial_1 \partial_2 - \tilde{a}_{\underline{1}} \partial_2 - \tilde{b}_{\underline{2}} \partial_1$, $\tilde{L} \in \mathfrak{S}$, *mit*

$$\left.\begin{aligned} \tilde{a} &:= a + \ln (\alpha_{\underline{1}} / D^{1,1}(\alpha, \beta)) \\ \tilde{b} &:= b + \ln (\alpha_{\underline{2}} / D^{1,1}(\alpha, \beta)). \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

BEWEIS. Direkt oder durch Verknüpfung der beiden Transformationen von Lemma 4 i und 4 ii (vgl. auch [2]). $\blacksquare$

3. Transformationen Höherer Ordnung

Gilt mit geeigneten Operatoren $T_1, .. T_N \in \mathfrak{D}$ stets $T_i [\operatorname{kern} L_{i-1}] \subset \operatorname{kern} L_i$ für $1 \leq i \leq N$ und $L_o, .. L_N \in \mathfrak{L}$, so folgt für $T := T_N \circ T_{N-1} \circ \ldots \circ T_1$ die Inklusion $T [\operatorname{kern} L_o] \subset \operatorname{kern} L_N$. Insbesondere können durch Iteration der in Lemma 4 i und 4 ii angegebenen Darstellungsoperatoren 1. Ordnung vom Typ $T_i = \frac{1}{\alpha_{i\underline{i}}} \partial_j$, $j \in \{1,2\}$, Darstellungsoperatoren beliebiger Ordnung konstruiert werden. Jede der dabei verwendeten Lösungen $\alpha_i \in \operatorname{kern} L_{i-1}$ wird dazu durch eine geeignete (endliche) Menge $M \subset \operatorname{kern} L_o$ von partikulären Lösungen der Ausgangsgleichung $L_o u = o$ erzeugt.

Alle auf diese Weise gewonnenen Transformationen höherer Ordnung werden im folgenden mit Hilfe der Operatoren (2.2) $D^{n,m}: H^{n+m} \to H$ in geschlossener Form dargestellt. So folgt durch n-malige Anwendung von Lemma 4 i der

SATZ 1 i. *Es sei* $L := \partial_1 \partial_2 - a_{\underline{1}} \partial_2 - b_{\underline{2}} \partial_1$ *mit* $a, b \in H$. *Dann gilt für alle* $n \in \mathbf{N}^+$ *und alle* $\alpha_1, .. \alpha_n \in \operatorname{kern} L$ *mit* $D^{n-1,o}(\alpha_1, .. \alpha_{n-1})\, D^{n,o}(e^a, \alpha_1, .. \alpha_{n-1})\, D^{n,o}(\alpha_1, .. \alpha_n) \in E$ *die Beziehung*

$$u \in \operatorname{kern} L \;\Rightarrow\; u^{n,o} \in \operatorname{kern} L^{n,o}; \tag{3.1 i}$$

dabei ist

$$u^{n,o} := D^{n,o}(\alpha_1, .. \alpha_{n-1}, u) \,/\, D^{n,o}(\alpha_1, .. \alpha_n) \tag{3.2 i}$$

und $L^{n,o} := \partial_1 \partial_2 - a_{\underline{1}}^{n,o} \partial_2 - b_{\underline{2}}^{n,o} \partial_1,\ L^{n,o} \in \mathfrak{S}$, *mit*

$$\left.\begin{aligned} a^{n,o} &:= \ln\left(D^{n,o}(e^a, \alpha_1, .. \alpha_{n-1}) \,/\, D^{n,o}(\alpha_1, .. \alpha_n)\right) \\ b^{n,o} &:= b + \ln\left(D^{n-1,o}(\alpha_1, .. \alpha_{n-1}) \,/\, D^{n,o}(\alpha_1, .. \alpha_n)\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.3 i}$$

Entsprechend liefert m-malige Iteration von Lemma 4 ii den

SATZ 1 ii. *Es sei* $L := \partial_1 \partial_2 - a_{\underline{1}} \partial_2 - b_{\underline{2}} \partial_1$ *mit* $a, b \in H$. *Dann gilt für alle* $m \in \mathbf{N}^+$ *und alle* $\alpha_1, .. \alpha_m \in \operatorname{kern} L$ *mit*

$D^{o,m-1}(\alpha_1, .. \alpha_{m-1})\, D^{o,m}(e^b, \alpha_1, .. \alpha_{m-1})\, D^{o,m}(\alpha_1, .. \alpha_m) \in E$ *die Beziehung*

$$u \in \operatorname{kern} L \;\Rightarrow\; u^{o,m} \in \operatorname{kern} L^{o,m}: \tag{3.1 ii}$$

dabei ist

$$u^{o,m} := D^{o,m}(\alpha_1, .. \alpha_{m-1}, u) \,/\, D^{o,m}(\alpha_1, .. \alpha_m) \tag{3.2 ii}$$

und $L^{o,m} := \partial_1 \partial_2 - a_{\underline{1}}^{o,m} \partial_2 - b_{\underline{2}}^{o,m} \partial_1,\ L^{o,m} \in \mathfrak{S}$, *mit*

$$\left.\begin{aligned} a^{o,m} &:= a + \ln\left(D^{o,m-1}(\alpha_1, .. \alpha_{m-1}) \,/\, D^{o,m}(\alpha_1, .. \alpha_m)\right) \\ b^{o,m} &:= \ln\left(D^{o,m}(e^b, \alpha_1, .. \alpha_{m-1}) \,/\, D^{o,m}(\alpha_1, .. \alpha_m)\right). \end{aligned}\right\} \tag{3.3 ii}$$

BEWEIS von Satz 1 i (1 ii analog) durch Induktion über $n \in \mathbf{N}^+$: Lemma 4 i ergibt den Fall $n = 1$. Ist $\alpha_{n+1} \in \operatorname{kern} L$, so ist nach Induktionsvoraussetung $\alpha := P_n / Q_n \in \operatorname{kern} L^{n,o}$ mit

$P_n := D^{n,o}(\alpha_1, .. \alpha_{n-1}, \alpha_{n+1})$, $Q_n := D^{n,o}(\alpha_1, .. \alpha_n)$. Nach Lemma 4 i ist dann $\tilde{u} := u_{\underline{1}}^{n,o} / \alpha_{\underline{1}} \in \text{kern}\, \tilde{L}$ mit $\tilde{L} = \partial_1 \partial_2 - \tilde{a}_{\underline{1}} \partial_2 - \tilde{b}_{\underline{2}} \partial_1$ und $\tilde{a} = a^{n,o} + \ln (a_{\underline{1}}^{n,o} / \alpha_{\underline{1}})$, $\tilde{b} = b^{n,o} - \ln \alpha_{\underline{1}}$. *Gezeigt wird*

(A) $\tilde{u} = u^{n+1,o}$ und

(B) $\tilde{a} = a^{n+1,o}$, $\tilde{b} = b^{n+1,o}$; d.h. $\tilde{L} = L^{n+1,o}$.

Zu (A): Mit (2.9) ist $Q_n^2 \alpha_{\underline{1}} = Q_{n-1} Q_{n+1}$ und

$$Q_n^2 u_{\underline{1}}^{n,o} = Q_{n-1} D^{n+1,o} (\alpha_1, .. \alpha_n, u), \text{ also } \tilde{u} = u^{n+1,o}.$$

Zu (B): Mit $\hat{P}_n := D^{n,o} (e^a, \alpha_1, .. \alpha_{n-1})$ ist $\exp (a^{n,o}) = \hat{P}_n / Q_n$.

(2.8) ergibt $Q_n^2 (\hat{P}_n / Q_n)_{\underline{1}} = Q_{n-1} \hat{P}_{n+1}$. Somit ist

$\tilde{a} = \ln (\exp a^{n,o})_{\underline{1}} - \ln \alpha_{\underline{1}} = \ln (\hat{P}_{n+1} / Q_{n+1}) = a^{n+1,o}$ und

$\tilde{b} = b + \ln (Q_n / Q_{n+1}) = b^{n+1,o}$. ■

Iteration von Lemma 4 i und 4 ii führt schließlich zu

SATZ 2. *Es sei* $L := \partial_1 \partial_2 - a_{\underline{1}} \partial_2 - b_{\underline{2}} \partial_1$ *mit* $a, b \in H$. *Dann gilt für alle* $n, m \in \mathbf{N}^+$ *und alle* $\alpha_1, .. \alpha_{n+m} \in \text{kern}\, L$ *mit* $D^{n-1,m} (\alpha_1, .. \alpha_{n+m-1}) D^{n,m-1} (\alpha_1, .. \alpha_{n+m-1}) D^{n,m} (\alpha_1, .. \alpha_{n+m}) \in E$ *die Beziehung*

$$u \in \text{kern}\, L \Rightarrow u^{n,m} \in \text{kern}\, L^{n,m} \tag{3.4}$$

dabei ist

$$u^{n,m} := D^{n,m} (\alpha_1, .. \alpha_{n+m-1}, u) / D^{n,m} (\alpha_1, .. \alpha_{n+m}) \tag{3.5}$$

und $L^{n,m} := \partial_1 \partial_2 - a_{\underline{1}}^{n,m} \partial_2 - b_{\underline{2}}^{n,m} \partial_1$, $L^{n,m} \in \mathcal{G}$, *mit*

$$\left.\begin{aligned} a^{n,m} &:= a + \ln \left(D^{n,m-1} (\alpha_1, .. \alpha_{n+m-1}) / D^{n,m} (\alpha_1, .. \alpha_{n+m})\right) \\ b^{n,m} &:= b + \ln \left(D^{n-1,m} (\alpha_1, .. \alpha_{n+m-1}) / D^{n,m} (\alpha_1, .. \alpha_{n+m})\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

BEWEIS durch Induktion über $(n, m) \in (\mathbf{N}^+)^2$: Lemma 5 ergibt den Fall $n = m = 1$. Für den Schluß von (n, m) auf $(n+1, m)$ sei $\alpha_{n+m+1} \in \text{kern}\, L^{n,m}$. Damit ist nach Induktionsvoraussetzung $\alpha := P/Q_{n,m} \in \text{kern}\, L^{n,m}$ mit

$P := D^{n,m} (\alpha_1, .. \alpha_{n+m-1}, \alpha_{n+m+1})$, $Q_{n,m} := D^{n,m} (\alpha_1, .. \alpha_{n+m})$.

Nach Lemma 4 i ist dann $\tilde{u} := u_{\underline{1}}^{n,m} / \alpha_{\underline{1}} \in \text{kern}\, \tilde{L}$ mit

$\tilde{L} = \partial_1 \partial_2 - \tilde{a}_{\underline{1}} \partial_2 - \tilde{b}_{\underline{2}} \partial_1$ und $\tilde{a} = a^{n,m} + \ln (a_{\underline{1}}^{n,m} / \alpha_{\underline{1}})$,

$\tilde{b} = b^{n,m} - \ln \alpha_{\underline{1}}$. Gezeigt wird

(A) $\tilde{u} = u^{n+1,m}$ und

(B) $\tilde{a} = a^{n+1,m}$, $\tilde{b} = b^{n+1,m}$; d.h. $\tilde{L} = L^{n+1,m}$.

Zu (A): Mit (2.9) ist $Q^2_{n,m}\,\alpha_{\underline{1}} = Q_{n-1,m}\,Q_{n+1,m}$ und

$Q^2_{n,m}\,u^{n,m}_{\underline{1}} = Q_{n-1,m}\,D^{n+1,m}(\alpha_1, \dots \alpha_{n+m}, u)$, also $\tilde{u} = u^{n+1,m}$.

Zu (B): Es ist $\exp\,(a^{n,m} - a) = Q_{n,m-1}\,/\,Q_{n,m}$. (2.10) ergibt

$Q^2_{n,m}\,(Q_{n,m-1}\,/\,Q_{n,m})_{\underline{1}} = Q_{n-1,m}\,Q_{n+1,m-1} - a_{\underline{1}}\,Q_{n,m-1}\,Q_{n,m}$. Somit

ist $a^{n,m}_{\underline{1}} = Q_{n+1,m-1}\,Q_{n-1,m}\,/\,(Q_{n,m-1}\,Q_{n,m})$ und

$\tilde{a} = a + \ln\,(Q_{n+1,m-1}\,/\,Q_{n+1,m}) = a^{n+1,m}$.

$\tilde{b} = b^{n+1,m}$ folgt analog mit (2.10). Entsprechend wird von (n, m) auf $(n, m+1)$ geschlossen. ■

BEMERKUNG 1. Unter Verwendung von (2.6) ergibt Satz 1 i mit Lemma 4 ii den Fall $m = 1$ in Satz 2, sowie Satz 1 ii mit Lemma 4 i den Fall $n = 1$ in Satz 2.

BEMERKUNG 2. Anwendung des *Sylvester*'schen Satzes (Lemma 2) liefert die Kommutativität der «Diagramme»

$$\begin{tikzcd}
L^{n,m} \arrow[rr, "{(0,1)}"] \arrow[d, "{(k,0)}"'] \arrow[drr, "{(k,1)}"] & & L^{n,m+1} \arrow[d, "{(k,0)}"] \\
L^{n+k,m} \arrow[rr, "{(0,1)}"'] & & L^{n+k,m+1}
\end{tikzcd}$$

wenn abkürzend $L \xrightarrow{(k,l)} \tilde{L}$ für «es gibt $\alpha_1, \dots \alpha_{k+l} \in \ker L$ mit $\tilde{L} = L^{k,l}$» (unter den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Satz 2) notiert wird.

Eine Verallgemeinerung der Sätze 1 und 2 ergibt sich durch «Vorschalten» einer Transformation 0-ter Ordnung. Ersichtlich ist für jedes $\alpha_0 \in E \cap \ker L$, mit $L := \partial_1\partial_2 - a_{\underline{1}}\partial_2 - b_{\underline{2}}\partial_1$ $(a, b \in H)$, $u\,/\,\alpha_0 \in \ker \tilde{L}$, mit $\tilde{L} := \partial_1\partial_2 - (a - \ln\alpha_0)_{\underline{1}}\partial_2 - (b - \ln\alpha_0)_{\underline{2}}\partial_1$, falls $u \in \ker L$. Für die durch

$$\hat{D}^{n,m}(f_0, f_1, \dots f_{n+m}) := [\partial_0, \partial_1^1, \dots \partial_1^n, \partial_2^1, \dots \partial_2^m \,/\, f_0, f_1, \dots f_{n+m}] \tag{3.7}$$

für $n, m \in \mathbf{N}$ und $f_0, f_1, .. f_{n+m} \in H$ definierten Operatoren $\hat{D}^{n,m} : H^{n+m+1} \to H$ gilt insbesondere

$$\hat{D}^{n,m} (1, f_1, .. f_{n+m}) = D^{n,m} (f_1, .. f_{n+m}) \tag{3.8}$$

(mit $D^{n,m} : H^{n+m} \to H$ nach (2.2)), sowie das

LEMMA 6. *Es sei* $f_0, f_1, .. \in H$ *und* $\alpha_0, \alpha_1, .. \in \ker L$ *mit* $L := \partial_1 \partial_2 - a_{\underline{1}} \partial_2 - b_{\underline{2}} \partial_1$ $(a, b \in H)$. *Dann gilt*

$$\left.\begin{aligned} f_0^{n+1} D^{n,o} \left(\frac{f_1}{f_0}, .. \frac{f_n}{f_0}\right) &= \hat{D}^{n,o} (f_0, f_1, .. f_n) \qquad \text{für } n \in \mathbf{N} \\ f^{m+1} D^{o,m} \left(\frac{f_1}{f_0}, .. \frac{f_m}{f_0}\right) &= \hat{D}^{o,m} (f_0, f_1, .. f_m) \qquad \text{für } m \in \mathbf{N} \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

$$\alpha_0^{n+m+1} D^{n,m} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, .. \frac{\alpha_{n+m}}{\alpha_0}\right) = \hat{D}^{n,m} (\alpha_0, \alpha_1, .. \alpha_{n+m}) \quad \text{für } n, m \in \mathbf{N}. \tag{3.10}$$

BEWEIS. Vollständige Induktion unter Verwendung von (2.8), (2.9) und Lemma 2. ■

Werden nun in Satz 1 bzw. Satz 2 die $\alpha_i \in \ker L$ durch $\alpha_i / \alpha_0 \in \ker (\partial_1 \partial_2 - (a - \ln \alpha_0)_{\underline{1}} \partial_2 - (b - \ln \alpha_0)_{\underline{2}} \partial_1)$ mit $\alpha_0 \in \ker L$ ersetzt, so folgt mit Lemma 6 der

SATZ 3. *Es sei* $L := \partial_1 \partial_2 - a_{\underline{1}} \partial_2 - b_{\underline{2}} \partial_1$ *mit* $a, b \in H$ *und*

$$A^{n,m} := \begin{cases} e^a \hat{D}^{n,m-1} (\alpha_0, .. \alpha_{n+m-1}) & \text{für } n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}^+ \\ \hat{D}^{n,o} (e^a, \alpha_0, .. \alpha_{n-1}) & \text{für } n \in \mathbf{N}, m = 0 \end{cases} \tag{3.11a}$$

$$B^{n,m} := \begin{cases} e^b \hat{D}^{n-1,m} (\alpha_0, .. \alpha_{n+m-1}) & \text{für } n \in \mathbf{N}^+, m \in \mathbf{N} \\ \hat{D}^{o,m} (e^b, \alpha_0, .. \alpha_{m-1}) & \text{für } n = 0, m \in \mathbf{N} \end{cases} \tag{3.11b}$$

$$Q^{n,m} := \hat{D}^{n,m} (\alpha_0, .. \alpha_{n+m}) \qquad \text{für } n, m \in \mathbf{N}. \tag{3.11c}$$

Dann gilt für alle $n, m \in \mathbf{N}$ *und alle* $\alpha_0, \alpha_1, .. \alpha_{n+m} \in \ker L$ *mit* $A^{n,m} B^{n,m} Q^{n,m} \in E$ *die Beziehung*

$$u \in \ker L \;\Rightarrow\; u^{n,m} \in \ker L^{n,m}; \tag{3.12}$$

dabei ist

$$u^{n,m} := \hat{D}^{n,m} (\alpha_0, .. \alpha_{n+m-1}, u) / Q^{n,m} \tag{3.13}$$

und $L^{n,m} := \partial_1 \partial_2 - a_{\underline{1}}^{n,m} \partial_2 - b_{\underline{2}}^{n,m} \partial_1$, $L^{n,m} \in \mathcal{G}$, *mit*

$$a^{n,m} := \ln (A^{n,m} / Q^{n,m}), \quad b^{n,m} := \ln (B^{n,m} / Q^{n,m}). \tag{3.14}$$

BEMERKUNG 3. Wird in Satz 3 speziell $\alpha_0 = 1 \in \operatorname{kern} L$ gewählt, so folgen (wegen (3.8)) wieder die Sätze 1 und 2.

4. Anwendungen

Satz 3 eignet sich insbesondere zur Konstruktion von BAUER-Operatoren (nach K. W. BAUER, vgl. [6] sowie [3]). Dazu sei $\mathbf{D} = \mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2$ mit einfach zusammenhängenden Gebieten $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2 \subset \mathbf{C}$. Für $j \in \{1, 2\}$ sei

$$H_j := \{f \mid f \in H \text{ und } f_{3-j} = o\}. \tag{4.1}$$

Sei weiters (mit (1.5))

$$\mathfrak{D}_1 = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathfrak{D}^{n,o}, \quad \mathfrak{D}_2 = \bigcup_{m \in \mathbf{N}} \mathfrak{D}^{o,m}. \tag{4.2}$$

Nach [6] heißt $T \in \mathfrak{D}_j$ BAUER-Operator zu $L = \partial_1 \partial_2 + a\,\partial_2 + b\partial_1 + c\,\partial_0$ (mit $a, b, c \in H$), wenn $T[H_j] \subset \operatorname{kern} L$.

Ist in Satz 3 speziell $a = b = o$, also $L = \partial_1 \partial_2$ und $\operatorname{kern} L = H_1 + H_2 := \{f + g \mid f \in H_1 \text{ und } g \in H_2\}$, so folgt

KOROLLAR 1. *Für $n, m \in \mathbf{N}$ und $0 \leq k \leq n + m$ sei $\alpha_k = \varphi_k + \psi_k$ mit $\varphi_k \in H_1$, $\psi_k \in H_2$ derart, daß $A\,B\,Q \in E$, wobei*

$$A := \begin{cases} \hat{D}^{n,m-1} (\alpha_0, .. \alpha_{n+m-1}) & \text{für } m \in \mathbf{N}^+ \\ D^{n,o} (\alpha_0, .. \alpha_{n-1}) & \text{für } m = 0, \end{cases} \tag{4.3a}$$

$$B := \begin{cases} \hat{D}^{n-1,m} (\alpha_0, .. \alpha_{n+m-1}) & \text{für } n \in \mathbf{N}^+ \\ D^{o,m} (\alpha_0, .. \alpha_{m-1}) & \text{für } n = 0, \end{cases} \tag{4.3b}$$

$$Q := \hat{D}^{n,m} (\alpha_0, .. \alpha_{n+m}). \tag{4.3c}$$

Sei weiters $T_j : H_j \rightarrow H$ definiert durch

$$T_1 := Q^{-1} \sum_{k=0}^{n} \psi_{k,o}\, \partial_1^k, \quad T_2 := Q^{-1} \sum_{k=0}^{m} \Psi_{o,k}\, \partial_2^k \tag{4.4}$$

mit $\Psi_{o,o} := D^{n,m} (\alpha_0, .. \alpha_{n+m-1})$,

$\Psi_{k,o} := (-1)^k [\partial_0, \partial_1^1, .. \partial_1^{k-1}, \partial_1^{k+1}, .. \partial_1^n, \partial_2^1, .. \partial_2^m / \alpha_0, .. \alpha_{n+m-1}]$,

$\Psi_{o,k} := (-1)^k [\partial_0, \partial_1^1, .. \partial_1^n, \partial_2^1, .. \partial_2^{k-1}, \partial_2^{k+1}, .. \partial_2^m / \alpha_0, .. \alpha_{n+m-1}]$

und $L := \partial_1 \partial_2 - (ln(A/Q))_{\underline{1}} \partial_2 - (ln(B/Q))_{\underline{2}} \partial_1$. *Dann sind* T_1 *und* T_2 BAUER-*Operatoren zu* $L \in \mathfrak{L}$ *und es gilt*

$$T_1 [H_1] + T_2 [H_2] = \text{kern}\, L. \tag{4.5}$$

BEWEIS. Daß T_1 und T_2 BAUER-Operatoren sind, also $T_1 [H_1] + T_2 [H_2] \subset \text{kern}\, L$ gilt, folgt unmittelbar aus Satz 3. Das Gleichheitszeichen in (4.5) ergibt sich aus einem von W. WATZLAWEK [13] und R. HEERSINK [6] angegebenen hinreichenden Kriterium. Dazu genügt es, daß die Koeffizienten $Q^{-1}\Psi_{n,o}$ und $Q^{-1}\Psi_{o,m}$ der höchsten Ableitungen in T_1 und T_2 nullstellenfrei in $\mathbf{D}$ sind. Dies ist laut Voraussetzung wegen $Q \in E$ und $\Psi_{n,o} = (-1)^n B \in E$, $\Psi_{o,m} = (-1)^m A \in E$ gesichert. ■

Für geeignete $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}^2$ ergibt eine weitere Anwendung von Satz 3 Lösungsdarstellungen für verallgemeinerte EULER-Gleichungen mit gewissen rationalen Koeffizienten (vgl. [2]). Ausgehend von der EULER-Gleichung $u_{\underline{12}} - \frac{\mu}{\eta} u_{\underline{2}} - \frac{\nu}{\eta} u_{\underline{1}} = o$, d.h.

$$L = \partial_1 \partial_2 - \frac{\mu}{\eta} \partial_2 - \frac{\nu}{\eta} \partial_1$$

mit $\eta(z_1, z_2) := z_1 + z_2$ ($\eta \in E$, sodaß $L \in \mathfrak{L}$) und $\mu, \nu \in \mathbf{C}$, werden dazu die partikulären Lösungen $\alpha_k \in \text{kern}\, L$ aus der Menge der homogenen Polynome der Form

$$\beta_l(z_1, z_2) := \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{\mu}{l-k} \binom{\nu}{k} z_1^{l-k} z_2^k,$$

(für $(z_1, z_2) \in \mathbf{D}$) gewählt.

In analoger Weise lassen sich Verallgemeinerungen der in [5] erzielten Ergebnisse gewinnen. Die dort betrachtete Klasse von Differentialgleichungen wird dazu auf die Form $Lu = o$ mit $L \in \mathfrak{L}$ gemäß

$$L := \partial_1 \partial_2 + \frac{n+1}{\Phi + \psi} (\Phi' \partial_1 + \psi' \partial_2)$$

transformiert. Dabei sei $n \in \mathbf{N}$ und $\Phi \in H_1$, $\psi \in H_2$ mit

$(\Phi + \psi)\, \Phi' \psi' \in E$.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß jedem in Satz 3 angegebenen Darstellungsoperator $T^{n,m} : H \to H$ mit $u^{n,m} = T^{n,m} u$ nach (3.13) ein Integrodifferentialoperator zugeordnet werden kann, der die (komplexe) RIEMANN-Funktion (vgl. [12]) von L in die RIEMANN Funktion von $L^{n,m}$ transformiert. (Die RIEMANN-Funktion von L ermöglicht die Lösungsdarstellung $J[\mathbf{C} \times H_1 \times H_2] = \text{kern}\, L$ mit einem Integral-Operator J). Vgl. dazu [11], [10]. Es ist zu vermuten, daß sich ähnliche Ergebnisse wie für RIEMANN-Funktionen auch für die «erzeugenden Funktionen» (Kerne) anderer Integraloperatoren — etwa für die, in [4] behandelten — erzielen lassen.

LITERATUR

[1] BAUER, K. W., *Differentialoperatoren bei partiellen Differentialgleichungen.* Ber. d. Gesellsch. f. Math. u. Datenv., Bonn, Nr. 77, 7-17 (1973).

[2] BAUER, K. W., *Differentialoperatoren bei verallgemeinerten Euler-Gleichungen.* Ber. d. Math.-Statist. Sektion im Forschungszentrum Graz, Nr. *121*, 1-17 (1979).

[3] BAUER, K. W. and ST. RUSCHEWEYH, *Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications.* Lecture Notes in Math. Nr. *791*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1980.

[4] FLORIAN, H., *Normale Integraloperatoren.* Monatsh. f. Math., *69*, 18-29 (1965).

[5] FLORIAN, H. und G. JANK, *Polynomerzeugende bei einer Klasse von Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variablen.* Monatsh. f. Math., *75*, 31-37 (1971).

[6] HEERSINK, R., *Characterisation of Certain Differential Operators in the Solution of Linear Differential Equations.* Glasgow Math. Journ., Vol. *17*, Part 2, 83-88 (1976).

[7] HEERSINK, R., *Über Lösungsdarstellungen und funktionentheoretische Methoden bei elliptischen Differentialgleichungen.* Ber. d. Math.-Statist. Sektion im Forschungszentrum Graz, Nr. *67*, 1-79 (1976).

[8] KOWALEWSKI, G., *Einführung in die Determinantentheorie.* 4. Aufl. Verlag Walter de Gruyter, Berlin 1954.

[9] PÜNGEL, J., *Lineare Abbildungen zwischen Lösungsmengen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung im Komplexen.* Ber. d. Math.-Statist. Sektion im Forschungszentrum Graz, Nr. *91*, 1-81 (1978).

[10] PÜNGEL, J., *Zur Darstellung von Riemannfunktionen durch Integrodifferentialoperatoren.* (Erscheint in: Sitzungsber. d. Österr. Akad. d. Wissensch., math.-naturw. Klasse, 1981).

[11] PÜNGEL, J., *Riemann Functions for Associated Operators.* (Erscheint in: Mathematikertreffen Graz-Zagreb, Plitvice 13. - 15. Nov. 1980; Ber. d. Math.-Statist. Sektion im Forschungszentrum Graz, 1981).

[12] VEKUA, I. N., *New Methods for Solving Elliptic Equations.* North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1968.

[13] WATZLAWEK, W., *Über Zusammenhänge zwischen Fundamentalsystemen, Riemann-Funktion und Bergman-Operatoren.* Journ. f. d. Reine u. Angew. Math., *251*, 200-211 (1971).