# SUI GRUPPI IN CUI L'INTERSEZIONE DI DUE QUALUNQUE SOTTOGRUPPI NON CONFRONTABILI E' ABELIANA (parte prima) (*)

di FRANCESCO DE GIOVANNI (a Napoli) (**)

SOMMARIO. - *In* [1] *sono caratterizzati i gruppi semplici finiti in cui l'intersezione di due sottogruppi non confrontabili di ordine pari è abeliana. In questa nota è studiata la classe (P) dei gruppi nei quali l'intersezione di due sottogruppi non confrontabili è abeliana. Nella prima parte sono esaminati i gruppi supersolubili e localmente nilpotenti in (P).*

SUMMARY. - *Finite simple groups in which the intersection of incomparable subgroups of even order is abelian are characterized in* [1]. *The class (P) of groups in which the intersection of incomparable subgroups is abelian is studied in this paper. Supersoluble and locally nilpotent groups in (P) are examined in the first part.*

In [1] CHAADAEV ha considerato la classe (a') costituita dai gruppi finiti in cui l'intersezione di due qualunque sottogruppi non confrontabili di ordine pari è abeliana, caratterizzando i gruppi semplici appartenenti ad (a'). Prendendo spunto da tale ricerca, nel presente lavoro è considerata la classe *(P)* costituita dai gruppi nei quali l'intersezione di due qualunque sottogruppi non confrontabili è abeliana.

---

(*) Pervenuto in Redazione il 12 gennaio 1981. Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni del C.N.R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Via Mezzocannone, 8 - 80134 Napoli.

In questa prima parte sono esaminati i gruppi localmente nilpotenti ed i gruppi supersolubili finiti nella classe $(P)$. Nella seconda parte saranno invece studiati i gruppi localmente supersolubili e quelli localmente risolubili appartenenti a $(P)$, e si proverà tra l'altro che sono abeliani i gruppi localmente risolubili $G \in (P)$ che siano dodati di qualche elemento aperiodico oppure che siano periodici e con $|\omega(G)| \geqslant 4$.

Si segnala infine che i gruppi finiti non risolubili appartenenti a $(P)$ sono studiati in [2].

Notazioni e terminologia sono quelle usuali in teoria dei gruppi (cfr. [5], [6]). In particolare:

(1) Se $G$ è un gruppo periodico, $\omega(G)$ denota l'insieme dei numeri primi $p$ tali che $G$ sia dotato di qualche elemento di periodo $p$;

(2) qualunque sia l'intero positivo $n$, $Z_n$ denota un gruppo ciclico di ordine $n$;

(3) denotata con $(A_o)$ la classe dei gruppi abeliani, per induzione si definisce $(A_{n+1})$ come la classe dei gruppi minimali non appartenenti ad $(A_o) \cup \ldots \cup (A_n)$.

## N. 1 **Gruppi localmente nilpotenti appartenenti a** $(P)$.

Si inizierà con alcune proposizioni di carattere generale.

1.1. *Per un gruppo localmente finito G sono equivalenti:*

(i) $G \in (P)$;

(ii) *ogni sottogruppo finito di G appartiene a* $(P)$.

*Dimostrazione.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Evidentemente la proprietà $(P)$ si conserva per sottogruppi.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Siano $H$ e $K$ sottogruppi non confrontabili di $G$; esistono allora degli elementi $x \in H - K$ e $y \in K - H$. Qualunque siano gli elementi $a$ e $b$ di $H \wedge K$, il sottogruppo $\langle x, y, a, b \rangle$ è finito e quindi appartiene a $(P)$; d'altra parte i sottogruppi $\langle x, a, b \rangle$ e $\langle y, a, b \rangle$ sono non confrontabili e $\langle a, b \rangle \leq \langle x, a, b \rangle \wedge \langle y, a, b \rangle$ è abeliano, sicché l'arbitrarietà di $a$ e $b$ assicura che $H \wedge K$ è abeliano e quindi che $G \in (P)$.

1.2. *Sia G un gruppo localmente risolubile e periodico, con* $|\omega(G)| \geq 4$.

*Sono equivalenti:*

(i) $G \in (P)$;

(ii) *G è abeliano.*

*Dimostrazione.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Si supponga in primo luogo $G$ finito, e siano $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots, S_t\}$ un sistema di SYLOW di $G$ e $\Sigma' = \{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ il sistema di complementi associato a $\Sigma$. Qualunque siano gli elementi distinti $i$ e $j$ di $\{1, 2, \dots, t\}$, l'ipotesi $t \geq 4$ assicura l'esistenza in $\{1, 2, \dots, t\}$ di due elementi $u$ e $v$, distinti tra loro e da $i$ e $j$. Si ha ovviamente $S_i S_j \leq C_u \wedge C_v$, sicché la non confrontabilità di $C_u$ e di $C_v$ comporta l'abelianità di $S_i S_j$, e quindi quella di $G$. Dopo di ciò, supposto $G$ qualunque, qualunque siano gli elementi $x$ e $y$ di $G$, per la locale finitezza di $G$ e per l'ipotesi $|\omega(G)| \geq 4$, esiste un sottogruppo finito $H$ di $G$ contenente $x$ e $y$, e con $|\omega(H)| \geq 4$. Quanto già provato assicura l'abelianità di $H$ e quindi anche quella di $G$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ovvia.

1.3. *Sia $G$ un gruppo localmente risolubile periodico con $|\omega(G)| \geq 3$. Se $G \in (P)$, i sottogruppi di* SYLOW *di $G$ sono abeliani.*

*Dimostrazione.* Sostanzialmente analoga a quella della 1.2.

1.4. *Sia $G$ un p-gruppo finito appartenente a $(P)$ e con $|G : \phi(G)| \geq p^3$. Se $M$ è un sottogruppo massimale non abeliano di $G$, $M/Z(M)$ è abeliano elementare di ordine $p^2$ e $Z(M) = \phi(G)$.*
*Dimostrazione.* L'ipotesi $|G : \phi(G)| \geq p^3$ assicura l'esistenza di due sottogruppi massimali $M_1$ e $M_2$ di $G$, distinti da $M$, tali che $M \wedge M_1 \neq M \wedge M_2$, e quindi $M = (M \wedge M_1)(M \wedge M_2)$; d'altra parte $M \wedge M_1$ e $M \wedge M_2$ sono abeliani e quindi $M \wedge M_1 \wedge M_2$ è centrale in $M$ e, poiché $M$ non è abeliano, è chiaro che $M/Z(M)$ è abeliano elementare di ordine $p^2$.

Per assurdo esista in $G$ un sottogruppo massimale $L$ non contenente $Z(M)$; si ha allora $M = (M \wedge L)Z(M)$, per cui, essendo $M \wedge L$ abeliano, tale risulta anche $M$ contro l'ipotesi. Pertanto $Z(M)$ è contenuto in ogni sottogruppo massimale di $G$ e quindi in $\phi(G)$. Poiché $|G : Z(M)| = p^3$, si ha chiaramente $Z(M) = \phi(G)$.

1.5. *Sia $G$ un p-gruppo finito con $|G : \phi(G)| \geq p^3$. Sono equivalenti:*

(i) *$G \in (P)$;*

(ii) *qualunque sia il sottogruppo proprio non abeliano $H$ di $G$, $H/Z(H)$ è abeliano elementare di ordine $p^2$, e inoltre $Z(H) \leq \phi(K)$ ogni volta che $H < K \leq G$.*

*Dimostrazione.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Si supponga per assurdo il teorema falso e sia $G$ un controesempio di ordine minimo. La 1.4. assicura allora l'esistenza di un sottogruppo proprio e non massimale $H$ di $G$ che non sia abeliano né verifichi la condizione (ii). Denotato con $M$ un sottogruppo massimale di $G$ contenente $H$, chiaramente $M$ non è abeliano e quindi, se $|M : \phi(M)| = p^2$, dalla 1.4. segue $\phi(M) = Z(M)$

e, per i risultati di MILLER - MORENO ([3]) e RÈDEI ([4]), $M$ è minimale non abeliano, il che è assurdo.

Risulta pertanto $|M : \phi(M)| \geq p^3$ e, per l'ipotesi di minimo fatta su $|G|$, $H/Z(H)$ è abeliano elementare di ordine $p^2$ e si ha $Z(H) \leq \phi(K)$ ogni volta che $H < K \leq M$. D'altra parte ogni sottogruppo proprio di $G$ contenente propriamente $H$ è contenuto in un sottogruppo massimale di $G$, sicché, per quanto provato, risulta $Z(H) \leq \phi(K)$ ogni volta che $H < K < G$. Poiché $H$ non verifica la (ii), si ha $Z(H) \nleq \phi(G)$, e ciò è manifestamente assurdo giacché $\phi(K) \leq \phi(G)$ per ogni sottogruppo $K$ di $G$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Per assurdo il teorema non sia vero e sia $G$ un controesempio di ordine minimo. Esistono allora dei sottogruppi non confrontabili $H$ e $K$ di $G$ tali che $H \wedge K$ non sia abeliano. In primo luogo $H$ e $K$ siano contenuti nel medesimo sottogruppo massimale $M$ di $G$; $M$ non è abeliano e quindi, se $|M : \phi(M)| = p^2$, risulta $Z(M) = \phi(M)$ e $M$ è minimale non abeliano, il che è assurdo giacché $H \wedge K < M$. Se invece $|M : \phi(M)| \geq p^3$, per l'ipoesi di minimo fatta su $|G|$, $M \in (P)$, contro il fatto che $H \wedge K$ è non abeliano. Pertanto $H$ e $K$ non sono contenuti in uno stesso sottogruppo massimale di $G$, ed esistono quindi dei sottogruppi massimali distinti $M_1$ e $M_2$ di $G$ contenenti rispettivamente $H$ e $K$; poiché $M_1$ è non abeliano, si ha $Z(M_1) \leq \phi(G) \leq M_1 \wedge M_2$, ed avendo $M_1 / Z(M_1)$ ordine $p^2$, $(M_1 \wedge M_2) / Z(M_1)$ ha ordine $p$, per cui $M_1 \wedge M_2$ è abeliano, contro il fatto che $H \wedge K \leq M_1 \wedge M_2$ non è abeliano. Dall'assurdo segue che $G \in (P)$.

TEOREMA 1.6. *Per un p-gruppo finito G sono equivalenti:*

(i) $G \in (P)$;

(ii) *$\phi(G)$ è abeliano e inoltre ogni sottogruppo $H$ di $G$ tale che $|H : \phi(H)| \geq p^3$ verifica la seguente condizione: qualunque sia il sottogruppo proprio non abeliano $X$ di $H$, $X/Z(X)$ è abeliano elementare di ordine $p^2$, e da $X < Y \leq H$ segue $Z(X) \leq \phi(Y)$.*

*Dimostrazione.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Chiaramente $\phi(G)$ è abeliano; se poi $H$ è un sottogruppo di $G$ tale che $|H : \phi(H)| \geq p^3$, poiché $H \in (P)$, l'asserto segue dalla 1.5.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Siano $H$ e $K$ sottogruppi non confrontabili di $G$; se $H$ e $K$ sono contenuti in un medesimo sottogruppo massimale $M$ di $G$, poiché $\phi(M) \leq \phi(G)$ è abeliano, per induzione $M \in (P)$ e $H \wedge K$ è abeliano. Se invece $H$ e $K$ non sono contenuti in un medesimo sottogruppo massimale di $G$, esistono in $G$ due sottogruppi massimali distinti $M_1$ e $M_2$ tali che $H \leq M_1$ e $K \leq M_2$. Si può supporre $|G : \phi(G)| = p^2$, giacché se $|G : \phi(G)| \geq p^3$ la 1.5 assicura che

$G \in (P)$. Si ha allora $H \wedge K \leq M_1 \wedge M_2 = \phi(G)$, e $H \wedge K$ è abeliano, al pari di $\phi(G)$, per cui $G \in (P)$.

TEOREMA 1.7. *Per un p-gruppo localmente finito G sono equivalenti:*

(i) $G \in (P)$;

(ii) *ogni sottogruppo finito di G ha il sottogruppo di* FRATTINI *abeliano e inoltre ogni sottogruppo finito H di G tale che* $|H : \phi(H)| \geq p^3$ *verifica la seguente condizione: qualunque sia il sottogruppo proprio non abeliano X di H,* $X/Z(X)$ *è abeliano elementare di ordine* $p^2$ *e da* $X < Y \leq H$ *segue* $Z(X) \leq \phi(Y)$.

*Dimostrazione.* Segue dal TEOREMA 1.6 e dalla 1.1.

OSSERVAZIONE 1.8. I teoremi 1.6 e 1.7 potrebbero far pensare che i $p$-gruppi localmente finiti appartenenti a $(P)$ siano almeno biminimali non abeliani; ciò è ben lungi dall'essere vero, come mostra l'esempio seguente:

Sia $G = \langle Z(2^\infty), x \mid x^2 = 1, a^x = a^{-1}, \forall a \in Z(2^\infty) \rangle$ il 2-gruppo localmente diedrale. Siano $H$ e $K$ sottogruppi non confrontabili di $G$, e in primo luogo si supponga $x \in H \wedge K$; dalla relazione di DEDEKIND segue allora $H = \langle x \rangle (Z(2^\infty) \wedge H)$ e $K = \langle x \rangle (Z(2^\infty) \wedge K)$, sicché dalla non confrontabilità di $H$ e $K$ seguirebbe quella di $Z(2^\infty) \wedge H$ e $Z(2^\infty) \wedge K$, il che è assurdo. Deve pertanto risultare $x \notin H \wedge K$, e quindi, giacché ogni elemento di $G$ che non appartiene a $Z(2^\infty)$ è un elemento di periodo 2 che agisce come $x$, si ha $H \wedge K \leq Z(2^\infty)$, per cui $H \wedge K$ è abeliano e $G \in (P)$. Qualunque sia il numero naturale $n$, si denoti con $P_n$ il sottogruppo di ordine $2^n$ di $Z(2^\infty)$, e sia $B_n = P_n \langle x \rangle$; si verifica facilmente che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, $B_n$ è un sottogruppo di $G$ che appartiene alla classe $(A_{n-1})$. Pertanto, $\forall n \in \mathbf{N}$, $B_n$ è un 2-gruppo finito appartenente a $(P) \cap (A_{n-1})$.

TEOREMA 1.9. *Per un gruppo localmente nilpotente periodico non primario G sono equivalenti:*

(i) $G \in (P)$;

(ii) *G è abeliano oppure risulta* $G = S_p \times S_q$ *con* $S_p \simeq Z(p^k)$ $(0 < k \leq \infty)$ *e* $S_q$ *q-gruppo finito minimale non abeliano con* $p \neq q$.

*Dimostrazione.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Sia $G$ non abeliano e quindi, per la 1.3, risulti $|\omega(G)| = 2$, per cui $G = S_p \times S_q$ con almeno uno dei sottogruppi di SYLOW non abeliano. Supposto per fissare le idee $S_q$ non abeliano, il gruppo $S_p$, in quanto isomorfo a $G/S_q$, è privo di sottogruppi non confrontabili, e quindi $S_p \simeq Z(p^k)$ con $O < k \leq \infty$. Qualunque sia il sottogruppo proprio $H$ di $S_q$, i sottogruppi $S_pH$ e $S_q$ sono non confrontabili, per cui $H \leq S_pH \wedge S_q$ è abeliano e $S_q$ è minimale non abeliano. Dopo di ciò $S_q$ è generabile con due elementi e quindi è finito.

(ii) $\Rightarrow$ (i) L'asserto è ovvio se $G$ è abeliano. Supposto $G$ non abeliano, siano $H$ e $K$ sottogruppi non confrontabili di $G$; poiché $G/S_q \simeq S_p$ è privo di sottogruppi non confrontabili, non può risultare $S_q \leq H \wedge K$, per cui $H \wedge K \wedge S_q$ è un sottogruppo proprio di $S_q$ ed è quindi abeliano. Dopo di ciò $H \wedge K = (H \wedge K \wedge S_p) \times (H \wedge K \wedge S_q)$ è abeliano e $G \in (P)$.

1.10. *Sia $G = \langle x, y \rangle$ un gruppo nilpotente appartenente a $(P)$ e dotato di qualche elemento aperiodico; allora $G$ è abeliano.*

*Dimostrazione.* In primo luogo sia $G$ senza torsione e, supposto per assurdo il teorema non vero, si scelga $G$ controesempio di classe minima. L'aperiodicità di $G$ ed un noto teorema di McLain (cfr. [5] pag. 53) assicurano che $G/Z(G)$ è senza torsione, ed è quindi abeliano per l'ipotesi di minimo fatta sulla classe di $G$. D'altra parte, poiché $G$ non è abeliano, si ha $G/Z(G) = (\langle x \rangle Z(G)/Z(G)) \times \times (\langle y \rangle Z(G)/Z(G))$ con ambedue i fattori ciclici infiniti, e quindi $\langle x \rangle \wedge Z(G) = \langle y \rangle \wedge Z(G) = 1$, per cui $X = \langle x \rangle Z(G) = \langle x \rangle \times Z(G)$ e $Y = \langle y \rangle Z(G) = \langle y \rangle \times Z(G)$. Siano $M_1$ e $M_2$ sottogruppi massimali rispettivamente di $\langle x \rangle$ e $\langle y \rangle$; allora $L_1 = M_1 \times Z(G)$ e $L_2 = M_2 \times Z(G)$ sono sottogruppi massimali rispettivamente di $X$ e di $Y$. I sottogruppi $L_1Y$ e $L_2X$ sono non confrontabili (da $L_1Y \leq L_2X$ seguirebbe $Y = L_2X \wedge Y = L_2 (X \wedge Y) = L_2$, il che è assurdo), per cui $L_1 L_2 \leq L_1Y \wedge L_2X$ è abeliano. Detto poi $M_2^*$ un sottogruppo massimale di $\langle y \rangle$ distinto da $M_2$, come prima si prova che $L_2^* = M_2^* \times Z(G)$ è centralizzato da $L_1$, sicché $L_1$ centralizza $L_2 L_2^* = Y$. Denotato con $M_1^*$ un sottogruppo massimale di $\langle x \rangle$ distinto da $M_1$, si prova in modo analogo che $L_1^* = M_1^* \times Z(G)$ centralizza $Y$, per cui $X = L_1 L_1^*$ centralizza $Y$ e, per l'abelianità di $X$ e $Y$, abeliano risulta anche $G = XY$, il che è assurdo. Sia invece $G$ misto, e si denoti con $T$ il massimo sottogruppo di torsione di $G$; poiché $G/T$ è dotato di sottogruppi non confrontabili, $T$ è abeliano. Sia in primo luogo $G/T$ ciclico, e sia $xT$ un generatore di $G/T$; qualunque sia il sottogruppo massimale $M_1$ di $\langle x \rangle$, esistono dei sottogruppi massimali $M_2$ e $M_3$ di $\langle x \rangle$, distinti tra loro e da $M_1$, tali che $M_1 \wedge M_2 \neq M_1 \wedge M_3$. Poiché chiaramente $T \wedge \langle x \rangle = 1$, i sottogruppi $M_1 T$ e $M_2 T$ sono non confrontabili, per cui $(M_1 \wedge M_2) T \leq M_1T \wedge M_2T$ è abeliano; similmente abeliano risulta il gruppo $(M_1 \wedge M_3) T$, per cui $T$ centralizza $M_1 = (M_1 \wedge M_2) (M_1 \wedge M_3)$. L'arbitrarietà di $M_1$ tra i sottogruppi massimali di $\langle x \rangle$ assicura che $T$ centralizza $\langle x \rangle$, per cui $G = \langle x \rangle \times T$ è abeliano. Sia invece $G/T$ generabile con due elementi; per quanto già provato, essendo $G/T$ aperiodico e verificando le ipotesi del teorema, $G/T$ è abeliano, e si ha $G/T = (\langle x \rangle T/T)(\langle y \rangle T/T)$ con i fattori diretti ciclici infiniti. Ragionando come nel caso aperiodico (sul sottogruppo di torsione anziché sul centro), si deduce dall'abelianità di $T$ quella di $G$.

TEOREMA 1.11. *Per un gruppo localmente nilpotente $G$ dotato di qualche elemento aperiodico sono equivalenti:*

(i) $G \in (P)$;

(ii) *$G$ è abeliano.*

*Dimostrazione.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Siano $x$ e $y$ due qualunque elementi di $G$; se $\langle x, y \rangle$ è dotato di qualche elemento aperiodico, dalla 1.10 segue che $\langle x, y \rangle$ è abeliano. In caso contrario $\langle x, y \rangle$ è contenuto nel massimo sottogruppo di torsione di $G$, ed è quindi ancora abeliano.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ovvia.

## N. 2 Gruppi supersolubili finiti appartenenti a $(P)$.

Nel caratterizzare i gruppi supersolubili finiti appartenenti a $(P)$ ci si limiterà, in virtù della 1.2, ai gruppi $G$ con $|\omega(G)| \leq 3$.

TEOREMA 2.1. *Per un gruppo supersolubile finito $G$ di ordine $p^\alpha q^\beta r^\gamma$ $(\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0)$, dotato di qualche sottogruppo di* SYLOW *non ciclico, sono equivalenti:*

(i) $G \in (P)$;

(ii) *$G$ è abeliano.*

*Dimostrazione.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Si suppongano per fissare le idee i $p$-sottogruppi di SYLOW di $G$ non ciclici. Si distinguono tre casi:

(1) *$p$ massimo divisore primo dell'ordine di $G$.*

$G$ è dotato di un unico $p$-sottogruppo di SYLOW $S_p$ e, per la supersolubilità di $G$, esiste un sottogruppo massimale $M$ di $S_p$ normale in $G$. Il gruppo $S_p / \phi(S_p)$ si spezza sul sottogruppo non identico $M / \phi(S_p)$ e, per il teorema di MASCHKE, esiste un sottogruppo normale $K$ di $G$ con $S_p = MK$ e $M \wedge K = \phi(S_p)$. Sia $\Sigma = \{ S_p, S_q, S_r \}$ un sistema di SYLOW di $G$; i sottogruppi $S_pS_q$ e $MS_qS_r$ sono non confrontabili, per cui $MS_q \leq S_pS_q \wedge MS_qS_r$ è abeliano. Poiché similmente $KS_q$ è abeliano, si ha $S_p = MK \leq Z_G(S_q)$, e analogamente $S_p \leq Z_G(S_r)$. Infine i sottogruppi $MS_qS_r$ e $KS_qS_r$ sono non confrontabili, per cui $S_qS_r$ è abeliano. Dopo di ciò i sottogruppi di SYLOW di $G$ sono normali e $G$ è abeliano per la 1.3.

(2) *$p$ minimo divisore primo dell'ordine di $G$.*

Sia $\Sigma = \{ S_p, S_q, S_r \}$ un sistema di SYLOW di $G$; poiché $G$ è supersolubile, esiste in $G$ un unico $p$-complemento, sicché $S_q S_r$ è normale in $G$. Detti $M_1$ e $M_2$ due sottogruppi massimali distinti di $S_p$, i sottogruppi $M_1 S_q S_r$ e $M_2 S_q S_r$ sono non confrontabili, per cui $S_q S_r$ è abeliano. I sottogruppi $S_p S_q$ e $M_i S_q S_r$ sono non confrontabili, e quindi $M_i S_q \leq S_p S_q \wedge M_i S_q S_r$ è abeliano (per $i = 1{,}2$), sicché $S_p = M_1 M_2 \leq Z_G(S_q)$. Similmente $S_p \leq Z_G(S_r)$, per cui i sottogruppi di SYLOW di $G$ sono normali e, per la 1.3, $G$ è abeliano.

(3) $q < p < r$.

Sia $\Sigma = \{ S_p, S_q, S_r \}$ un sistema di SYLOW di $G$. Il gruppo $S_p S_q$ è supersolubile e $p$ è il massimo divisore primo del suo ordine, sicché $S_p \lhd S_p S_q$ e, come nel caso (1), esistono dei sottogruppi non banali $M$ e $K$ di $S_p$, normali in $S_p S_q$ e con $S_p = MK$. I sottogruppi $MS_q S_r$ e $KS_q S_r$ sono non confrontabili, per cui $S_q S_r$ è abeliano. Inoltre $S_p S_q$ e $MS_q S_r$ sono non confrontabili, per cui $MS_q$ è abeliano e $M \leq Z_G(S_q)$; similmente $K \leq Z_G(S_q)$ e quindi $S_p = MK \leq Z_G(S_q)$. Poiché analogamente risulta $S_p \leq Z_G(S_r)$, i sottogruppi di SYLOW di $G$ sono normali, e $G$ è abeliano per la 1.3.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ovvia.

TEOREMA 2.2. *Sia $G$ un gruppo finito di ordine $p^\alpha q^\beta r^\gamma$ $(\alpha > 1, \beta > 1, \gamma > 1)$ a sottogruppi di* SYLOW *ciclici. Sono equivalenti:*

(i) *$G \in (P)$;*

(ii) *$G$ è abeliano.*

*Dimostrazione.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Sia $p > q > r$, e sia $\Sigma = \{S_p, S_q, S_r\}$ un sistema di SYLOW di $G$; la supersolubilità di $G$ assicura che i sottogruppi $S_p$ e $S_p S_q$ sono normali in $G$. Detto $M$ un sottogruppo massimale di $S_q S_r$, i sottogruppi $S_p M$ e $S_q S_r$ sono non confrontabili, per cui $M$ è abeliano e $S_q S_r$ è abeliano oppure minimale non abeliano; d'altra parte $S_q S_r$ è privo di sottogruppi di SYLOW di esponente primo e quindi, per la caratterizzazione di RÉDEI, non è minimale non abeliano, ed è perciò abeliano. Sia $V$ un qualunque sottogruppo massimale di $S_p S_r$, e in primo luogo risulti $| S_p S_r : V | = r$; poiché $q > r$, $S_q$ è normale in $S_q S_r$, sicché l'unico sottogruppo massimale $H$ di $S_q$ è normalizzato da $S_r$. I sottogruppi [(1)] $VS_q$ e $HS_r S_p$ sono non confrontabili, per cui $V$ è abeliano. Sia invece $| S_p S_r : V | = p$; il $p$-sottogruppo di SYLOW $V_p$ di $V$ coincide evidentemente con l'unico sottogruppo massimale di $S_p$, ed è quindi caratteristico in $G$. Detto

(1) Il sottogruppo $V$ è normale in $G$, in quanto contiene $S_p$ e $G/S_p \simeq S_q S_r$ è abeliano.

$V_r$ un $r$-sottogruppo di SYLOW di $V$, si ha $V = V_p V_r$ e $V_r$ è anche un $r$-sottogruppo di SYLOW di $G$. I sottogruppi $S_pS_r$ e $V_pS_qS_r$ sono non confrontrabili, per cui $U = V_pS_r$ è abeliano; d'altra parte $S_r$ e $V_r$ sono coniugati in $G$, e quindi tali risultano anche $U = V_pS_r$ e $V = V_pV_r$, sicché $V$ è abeliano, e $S_pS_r$ è abeliano oppure minimale non abeliano. Come sopra, la caratterizzazione di RÉDEI assicura che $S_pS_r$ è abeliano. Dopo di ciò, l'abelianità dei sottogruppi $S_pS_r$ e $S_qS_r$ assicura che $S_r$ è normale in $G$. Qualunque sia il sottogruppo massimale $L$ di $S_pS_q$, i sottogruppi $S_pS_q$ e $LS_r$ sono non confrontabili, per cui $L$ è abeliano, e come prima $S_pS_q$ risulta abeliano. Da ciò segue l'abelianità di $G$. (ii) $\Rightarrow$ (i) Ovvia.

TEOREMA 2.3. *Sia $G$ un gruppo finito di ordine $p^\alpha q^\beta r$ $(p > q > r$, $\alpha > 1, \beta > 1)$ a sottogruppi di* SYLOW *ciclici. Sono equivalenti:*

(i) *$G \in (P)$;*

(ii) *$G$ è abeliano.*

*Dimostrazione.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Sia $\Sigma = \{S_p, S_q, S_r\}$ un sistema di SYLOW di $G$. Qualunque sia il sottogruppo massimale $M$ di $S_q S_r$, i sottogruppi $S_pM$ e $S_q S_r$ sono non confrontabili, sicché $M$ è abeliano e $S_q S_r$ è abeliano oppure minimale non abeliano. D'altra parte $S_q$ è normale in $S_q S_r$ e non ha esponente primo, sicché dalla caratterizzazione di RÉDEI segue che $S_q S_r$ è abeliano. Sia $M$ un sottogruppo massimale di $S_p S_r$; se $| S_p S_r : M | = r$, $M = S_p$ è chiaramente abeliano. Sia invece $| S_p S_r : M | = p$, e si denoti con $M_p$ l'unico $p$-sottogruppo di SYLOW di $M$, e con $M_r$ un $r$-sottogruppo di SYLOW di $M$; $M_p$ è caratteristico in $S_p$ e quindi in $G$. I sottogruppi $S_p S_r$ e $M_p S_q S_r$ non sono confrontabili, per cui $U = M_p S_r$ è abeliano; d'altra parte $S_r$ e $M_r$ sono coniugati in $G$, per cui tali risultano anche $U$ e $M = M_p M_r$ e $M$ è abeliano, sicché $S_p S_r$ è abeliano o minimale non abeliano. Come sopra si ha allora che $S_p S_r$ è abeliano. Sia poi $M$ un sottogruppo massimale di $S_p S_q$; se $| S_p S_q : M | = p$, come nel caso precedente si prova che $M$ è abeliano. Supposto invece $| S_p S_q : M | = q$, poiché $S_p S_q / S_p$ è ciclico, $M$ è l'unico sottogruppo massimale di indice $q$ di $S_p S_q$, ed è perciò caratteristico in $S_p S_q$ e quindi in $G$. I sottogruppi $S_p S_q$ e $MS_r$ sono non confrontabili, sicché $M$ è abeliano e, come nei casi precedenti, tale è anche $S_p S_q$. Da ciò segue che $G$ è abeliano. (ii) $\Rightarrow$ (i) Ovvia.

TEOREMA 2.4. *Sia $G$ un gruppo finito di ordine $p^\alpha q r^\gamma$ $(p > q > r, \alpha > 1)$ a sottogruppi di* SYLOW *ciclici. Sono equivalenti:*

(i) *$G \in (P)$;*

(ii) *$G$ è abeliano oppure i $p$-complementi di $G$ sono minimali non abeliani e gli altri complementi di $G$ sono abeliani.*

*Dimostrazione.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Sia $\Sigma = \{S_p, S_q, S_r\}$ un sistema di SYLOW di $G$, e sia $M$ un sottogruppo massimale di $S_p S_r$; se $|S_p S_r : M| = p$, come nel TEOREMA 2.3 si prova che $M$ è abeliano. Sia $|S_p S_r : M| = r$, e quindi $S_p \leq M$; poiché $S_p S_q \lhd G$, ha senso considerare i sottogruppi $MS_q = M(S_p S_q)$ e $S_p S_r$, che sono non confrontabili, per cui $M$ è abeliano e $S_p S_r$ è abeliano oppure minimale non abeliano. D'altra parte $S_p$ è normale in $S_p S_r$ e non ha esponente primo, sicché dal teorema di RÉDEI segue che $S_p S_r$ è abeliano. Sia poi $M$ un sottogruppo massimale di $S_p S_q$; se $|S_p S_q : M| = q$, $M = S_p$ è abeliano. Se invece $|S_p S_q : M| = p$, si prova, come nel TEOREMA 2.3, che $M$ è abeliano, sicché come prima dal teorema di RÉDEI si deduce l'abelianità di $S_p S_q$. Infine, se $M$ è un sottogruppo massimale di $S_q S_r$, i sottogruppi $S_p M$ e $S_q S_r$ sono non confrontabili, sicché $M$ è abeliano e $S_q S_r$ è abeliano oppure minimale non abeliano.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposto $G$ non abeliano, sia $\Sigma = \{S_p, S_q, S_r\}$ un sistema di SYLOW di $G$. Per ipotesi risulta $S_p \leq Z(G)$ e quindi $S_q S_r$, in quanto normale, è l'unico $p$-complemento di $G$. La supersolubilità di $G$ assicura che $S_q$ è caratteristico in $S_q S_r$ e quindi in $G$. Siano $H$ e $K$ sottogruppi non confrontabili di $G$; se $S_q \nleq H$, si ha $S_q \wedge H = 1$ e quindi, essendo $S_q$ l'unico $q$-sottogruppo di SYLOW di $G$, $H$ è un $q'$-gruppo e quindi, essendo contenuto in un $q$-complemento di $G$, è abeliano, sicché tale è anche $H \wedge K$. Si procede in modo analogo se $S_q \nleq K$, sicché si può ritenere $S_q \leq H \wedge K$. Se $p$ non dividesse $|G : H \wedge K|$, si avrebbe $S_p \leq H \wedge K$ e quindi $S_p S_q \leq H \wedge K$, contro il fatto che $G/S_p S_q$ è ciclico primario. Pertanto $p$ divide $|G : H \wedge K|$. Similmente, se $r$ non dividesse $|G : H \wedge K|$, $H \wedge K$ conterrebbe l'unico $p$-complemento $S_q S_r$ di $G$, contro il fatto che $G/S_q S_r$ è ciclico primario. Pertanto $|G : H \wedge K|$ è divisibile per $p$ e per $r$, e $|H \wedge K| = p^\sigma q r^\tau$ con $\sigma < \alpha$ e $\tau < \gamma$. Detto $\Sigma_1 = \{L_p, L_q, L_r\}$ un sistema di SYLOW di $H \wedge K$, il sottogruppo $L_q L_r$ è abeliano, in quanto contenuto propriamente nel $p$-complemento $S_q S_r$ di $G$. Poiché i $q$-complementi e gli $r$-complementi di $G$ sono abeliani, $L_p L_q$ e $L_p L_r$ sono abeliani, sicché tale è anche $H \wedge K$ e $G \in (P)$.

OSSERVAZIONE 2.5. Esistono gruppi non abeliani appartenenti a $(P)$ verificanti le condizioni del TEOREMA 2.4; tale è ad esempio il gruppo $G = Z_{25} \times S_3$ dove $S_3$ è il gruppo simmetrico su 3 oggetti.

TEOREMA 2.6. *Sia $G$ un gruppo finito di ordine $pq^\beta r^\gamma$ ($p > q > r$, $\beta > 1$) a sottogruppi di* SYLOW *ciclici. Sono equivalenti:*

(i) $G \in (P)$;

(ii) *i $p$-complementi di $G$ sono abeliani e gli altri complementi di $G$ sono abeliani o minimali non abeliani.*

*Dimostrazione.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Sia $\Sigma = \{S_p, S_q, S_r\}$ un sistema di SYLOW di $G$, e sia $M$ un sottogruppo massimale di $S_q S_r$; i sottogruppi $S_p M$ e $S_q S_r$ sono non confrontabili, per cui $M$ è abeliano, e $S_q S_r$ è abeliano o minimale non abeliano. Daltra parte $S_q$ è normale in $S_q S_r$ e non ha esponente primo, sicché dal teorema di RÉDEI segue che $S_q S_r$ è abeliano. Sia poi $M$ un sottogruppo massimale di $S_p S_r$; se $|S_p S_r : M| = p$, $M$ è un $r$-sottogruppo di $G$ ed è quindi abeliano. Sia invece $|S_p S_r : M| = r$ e quindi $S_p \leq M$; allora $M$ è normale in $G$, giacché $G/S_p \simeq S_q S_r$. I sottogruppi $S_p S_r$ e $MS_q$ sono non confrontabili, sicché $M$ è abeliano e $S_p S_r$ è abeliano o minimale non abeliano. Similmente si prova che $S_p S_q$ è abeliano o minimale non abeliano.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sia $\Sigma = \{S_p, S_q, S_r\}$ un sistema di SYLOW di $G$, e siano $H$ e $K$ sottogruppi non confrontabili di $G$. Se $S_p \nleq H$, si ha $H \wedge S_p = 1$, per cui $H$ è abeliano, giacché contenuto in un $p$-complemento di $G$, e tale è $H \wedge K$. Si può ragionare analogamente se $S_p \nleq K$, sicché si può ritenere $S_p \leq H \wedge K$. Se $q$ non dividesse $|G : H \wedge K|$, $H \wedge K$ conterrebbe l'unico $r$-complemento $S_p S_q$ di $G$, contro il fatto che $G/S_p S_q \simeq S_r$ è ciclico primario. Analogamente si prova che $r$ divide $|G : H \wedge K|$ ($S_p S_r$ è l'unico $q$-complemento di $G$, in quanto $G/S_p$ è abeliano). Pertanto si ha $|H \wedge K| = pq^\sigma r^\tau$ con $\sigma < \beta$ e $\tau < \gamma$. Detto $\Sigma_1 = \{S_p, L_q, L_r\}$ un sistema di SYLOW di $H \wedge K$, i sottogruppi $S_p L_q$ e $S_p L_r$, essendo contenuti propriamente rispettivamente in un $r$-complemento e in un $q$-complemento di $G$, sono abeliani; poiché $L_q L_r$ è abeliano, abeliano risulta anche $H \wedge K$, e $G \in (P)$.

OSSERVAZIONE 2.7. Esistono gruppi appartenenti a *(P)* e verificanti le ipotesi del TEOREMA 2.6, di uno qualunque dei tipi descritti dalla (ii), come illustrano gli esempi seguenti:

(1) Sia $\vartheta : Z_{18} \to \mathrm{Aut}\,(Z_7)$ un epimorfismo. Il gruppo $G = [Z_7]_\vartheta \cdot Z_{18}$ ha ordine $7 \cdot 3^2 \cdot 2$, i sottogruppi di SYLOW ciclici, i 7-complementi abeliani e gli altri complementi minimali non abeliani.

(2) Sia $\vartheta : Z_9 \to \mathrm{Aut}\,(Z_{19})$ un omomorfismo di nucleo il sottogruppo di ordine 3 di $Z_9$, e sia $H = [Z_{19}]_\vartheta \cdot Z_9$. Il gruppo $G = H \times Z_2$ ha ordine $19 \cdot 3^2 \cdot 2$, i sottogruppi di SYLOW ciclici, i 19-complementi abeliani, i 3-complementi abeliani e i 2-complementi minimali non abeliani.

(3) Sia $\alpha$ l'automorfismo di periodo 2 di $Z_5$, e sia $H = [Z_5] \langle \alpha \rangle$. Il gruppo $G = H \times Z_9$ ha ordine $5 \cdot 3^2 \cdot 2$, i sottogruppi di SYLOW ciclici, i 5-complementi abeliani, i 3-complementi minimali non abeliani e i 2-complementi abeliani.

TEOREMA 2.8. *Sia G un gruppo finito di ordine* $pqr^\gamma$ $(p > q > r,$ $\gamma > 1)$ *a sottogruppi di* SYLOW *ciclici. Sono equivalenti:*

(i) $G \in (P)$;

(ii) *i complementi di* $G$ *sono abeliani o minimali non abeliani.*

*Dimostrazione.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Sia $\Sigma = \{S_p, S_q, S_r\}$ un sistema di SYLOW di $G$; qualunque sia il sottogruppo massimale $M$ di $S_q S_r$, i sottogruppi $MS_p$ e $S_q S_r$ sono non confrontabili, per cui $M$ è abeliano e $S_q S_r$ è abeliano o minimale non abeliano. Sia poi $M$ un sottogruppo massimale di $S_p S_r$; se $|S_p S_r : M| = p$, $M$ è un $r$-sottogruppo di SYLOW di $G$ ed è quindi abeliano. Se invece $|S_p S_r : M| = r$, si ha $S_p \leq M$ e i sottogruppi $M(S_p S_q) = MS_q$ e $S_p S_r$ sono non confrontabili, per cui $M$ è abeliano e $S_p S_r$ è abeliano o minimale non abeliano. E' chiaro infine che $S_p S_q$ è abeliano o minimale non abeliano. (ii) $\Rightarrow$ (i) Sia $\Sigma = \{S_p, S_q, S_r\}$ un sistema di SYLOW di $G$, e siano $H$ e $K$ sottogruppi non confrontabili di $G$. Se $S_p \nleq H$, si ha $S_p \wedge H = 1$, e quindi $H$ è contenuto in un $p$-complemento di $G$ e $H \wedge K < H$ è abeliano. Si può ragionare analogamente se $S_p \nleq K$, sicché si può ritenere $S_p \leq H \wedge K$. Poiché $H$ e $K$ sono non confrontabili e $G/S_pS_q \simeq S_r$ è ciclico primario, non può risultare $S_pS_q \leq H \wedge K$, e quindi si può supporre, per fissare le idee, $S_p S_q \nleq H$. Poiché $S_p S_q$ è l'unico $r$-complemento di $G$ e $S_p \leq H$, $q$ non divide $|H|$, e perciò $H$ è contenuto in un $q$-complemento di $G$ e $H \wedge K < H$ è abeliano, sicché $G \in (P)$.

OSSERVAZIONE 2.9. Nelle ipotesi del TEOREMA 2.8 non può accadere che i $p$-complementi e gli $r$-complementi siano simultaneamente minimali non abeliani. Infatti, supposto per assurdo che ciò accada, si denoti con $\Sigma = \{S_p, S_q, S_r\}$ un sistema di SYLOW di $G$; poiché $S_p S_q$ non è abeliano, $S_q$ induce su $S_p$ un gruppo non identico di automorfismi, e perciò $S_q \nleq Z_{S_q S_r}(S_p)$, sicché $S_q \wedge Z_{S_q S_r}(S_p) = 1$. Dopo di ciò, l'abelianità dei gruppi $S_q S_r / S_q$ e $S_q S_r / Z_{S_q S_r}(S_p)$ comporta quella di $S_q S_r$, il che è assurdo. Si può però osservare che possono verificarsi tutti gli altri casi descritti dalla (ii) del TEOREMA 2.8, come mostrano gli esempi seguenti:

(1) Sia $\alpha$ un automorfismo di ordine 3 di $Z_7$, e sia $H = [Z_7]\langle\alpha\rangle$. Il gruppo $G = H \times Z_4$ ha ordine $7 \cdot 3 \cdot 2^2$, i sottogruppi di SYLOW ciclici, i 2-complementi minimali non abeliani e gli altri complementi abeliani.

(2) Sia $\vartheta : Z_4 \to \mathrm{Aut}(Z_{13})$ un omomorfismo di nucleo il sottogruppo di ordine 2 di $Z_4$, e sia $H = [Z_{13}]_\vartheta \cdot Z_4$. Il gruppo $G = H \times Z_3$ ha ordine $13 \cdot 3 \cdot 2^2$, i sottogruppi di SYLOW ciclici, i 3-complementi minimali non abeliani e gli altri complementi abeliani.

(3) Sia $\vartheta : Z_4 \to \mathrm{Aut}(Z_3)$ un epimorfismo, e sia $H = [Z_3]_\vartheta \cdot Z_4$. Il gruppo $G = Z_5 \times H$ ha ordine $5 \cdot 3 \cdot 2^2$, i sottogruppi di SYLOW ciclici, i 5-complementi minimali non abeliani e gli altri complementi abeliani.

(4) Sia $\vartheta : Z_{12} \to \mathrm{Aut}\,(Z_7)$ un epimorfismo; il gruppo $G = [Z_7]_\vartheta \cdot Z_{12}$ ha ordine $7 \cdot 3 \cdot 2^2$, i sottogruppi di SYLOW ciclici, i 7-complementi abeliani e gli altri complementi minimali non abeliani.

(5) Sia $\vartheta : Z_4 \to \mathrm{Aut}\,(Z_5)$ un omomorfismo di nucleo il sottogruppo di ordine 2 di $Z_4$, e sia $H = [Z_5]_\vartheta \cdot Z_4$. Sia poi $\sigma : H \to \mathrm{Aut}\,(Z_3)$ un epimorfismo; il gruppo $G = [Z_3]_\sigma \cdot H$ ha ordine $5 \cdot 3 \cdot 2^2$, i sottogruppi di SYLOW ciclici, i 2-complementi abeliani e gli altri complementi minimali non abeliani.

Dai TEOREMI 2.1 - 2.8 discende la seguente caratterizzazione dei gruppi supersolubili finiti $G \in (P)$ e con $|\,\omega\,(G)\,| = 3$ [(2)]:

TEOREMA 2.10. *Sia $G$ un gruppo supersolubile finito di ordine $p^\alpha q^\beta r^\gamma$ $(p > q > r)$. Sono equivalenti:*

(i) $G \in (P)$;

(ii) *$G$ è un gruppo di uno dei tipi seguenti:*
  (a) *$G$ è abeliano;*
  (b) *$G$ ha ordine $pqr$;*
  (c) *$G$ ha ordine $p^\alpha q r^\gamma$ $(\alpha > 1$ oppure $\gamma > 1)$, a sottogruppi di* SYLOW *ciclici, con i $p$-complementi minimali non abeliani e gli altri complementi abeliani;*
  (d) *$G$ ha ordine $pq^\beta r^\gamma$ $(\beta > 1$ oppure $\gamma > 1)$, a sottogruppi di* SYLOW *ciclici, con i $p$-complementi abeliani e gli altri complementi minimali non abeliani;*
  (e) *$G$ ha ordine $pq^\beta r^\gamma$ $(\beta > 1$ oppure $\gamma > 1)$, a sottogruppi di* SYLOW *ciclici, con i $q$-complementi minimali non abeliani e gli altri complementi abeliani;*
  (f) *$G$ ha ordine $pq^\beta r^\gamma$ $(\beta > 1$ oppure $\gamma > 1)$, a sottogruppi di* SYLOW *ciclici, con gli $r$-complementi minimali non abeliani e gli altri complementi abeliani;*
  (g) *$G$ ha ordine $pqr^\gamma$ $(\gamma > 1)$, a sottogruppi di* SYLOW *ciclici, con gli $r$-complementi abeliani e gli altri complementi minimali non abeliani.*

*Dimostrazione.* Segue dai teoremi precedenti e dal fatto che ogni gruppo di ordine $pqr$ appartiene a $(P)$.

Si caratterizzeranno ora i gruppi supersolubili finiti $G \in (P)$ e con $|\,\omega\,(G)\,| = 2$.

---

(2) Non è possibile invertire la 1.3 neppure nel caso di un gruppo supersolubile finito $G$ con $|\,\omega\,(G)\,| = 3$; detto $\alpha$ un automorfismo di ordine 2 di $S_3$, il gruppo $G = Z_5 \times ([S_3]\langle\alpha\rangle)$ ha ordine $5 \cdot 3 \cdot 2^2$, ha i sottogruppi di SYLOW abeliani, è supersolubile, ma non appartiene a $(P)$.

TEOREMA 2.11. *Sia $G$ un gruppo supersolubile finito di ordine $p^\alpha q^\beta$ privo di sottogruppi di* SYLOW *ciclici. Sono equivalenti:*

(i) $G \in (P)$;

(ii) *$G$ è abeliano.*

*Dimostrazione.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Sia per fissare le idee $p > q$, e quindi esista in $G$ un unico $p$-sottogruppo di SYLOW $S_p$. Detto $S_q$ un $q$-sottogruppo di SYLOW di $G$, poiché $S_q$ non è ciclico $G/S_p \simeq S_q$ è dotato di sottogruppi non confrontabili e $S_p$ è abeliano. Poiché $S_p$ non è cicilico, $|S_p : \Phi(S_p)| > p$ sicché dalla supersolubilità di $G$ e dal teorema di MASCHKE segue l'esistenza di due sottogruppi propri $K_1$ e $K_2$ di $S_p$ normali in $G$ e tali che $S_p = K_1 K_2$ e $K_1 \wedge K_2 = \Phi(S_p)$. Detti $L_1$ e $L_2$ due sottogruppi massimali distinti di $S_q$, i sottogruppi $K_i S_q$ e $S_p L_j$ $(i = 1, 2,\ j = 1,2)$ sono non confrontabili e quindi $K_i L_j$ è abeliano. Da ciò segue l'abelianità di $G$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ovvia.

TEOREMA 2.12. *Sia $G$ un gruppo supersolubile finito di ordine $p^\alpha q^\beta$ $(p > q)$ appartenente a $(P)$. Si ha allora:*

(i) *se i $q$-sottogruppi di* SYLOW *sono ciclici, l'unico $p$-sottogruppo di* SYLOW *di $G$ è abeliano oppure minimale non abeliano;*

(ii) *se i $q$-sottogruppi di* SYLOW *sono non ciclici, essi sono abeliani o minimali non abeliani, e l'unico $p$-sottogruppo di* SYLOW *di $G$ è abeliano.*

*Dimostrazione.* (i) Sia $S_p$ l'unico $p$-sottogruppo di SYLOW di $G$, e sia $p^n = |S_p : \Phi(S_p)|$. Se $n = 1$, $S_p$ è ciclico. Sia dunque $n > 1$; la supersolubilità di $G$ ed il teorema di MASCHKE comportano $S_p / \Phi(S_p) = K_1 / \Phi(S_p) \times \ldots \times K_n / \Phi(S_p)$ con i fattori di ordine $p$ e normali in $G / \Phi(S_p)$. Posto $H_i = K_1 \ldots K_{i-1} K_{i+1} \ldots K_n$ per ogni $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, si denoti con $S_q$ un $q$-sottogruppo di SYLOW di $G$. I sottogruppi $H_i S_q$ e $S_p$ sono non confrontabili, per cui $H_i$ è abeliano. Se esiste $i \in \{1,2, \ldots, n\}$ tale che $Z(S_p) \nleq H_i$ si ha, per la massimalità di $H_i$ in $S_p$, $S_p = H_i Z(S_p)$ e $S_p$ è abeliano. Sia invece $Z(S_p) \leq \bigwedge_{i=1}^{n} H_i = \Phi(S_p)$; qualunque siano gli elementi distinti $i$ e $j$ di $\{1, 2, \ldots, n\}$, $H_i \wedge H_j$, essendo centralizzato da $H_i$ e da $H_j$, è centrale in $S_p = H_i H_j$, per cui $\Phi(S_p) \leq H_i \wedge H_j \leq Z(S_p)$ e quindi $Z(S_p) = \Phi(S_p)$ e $|S_p : Z(S_p)| = p^2$, sicché $S_p$ è minimale non abeliano.

(ii) Poiché $G/S_p \simeq S_q$ è non ciclico, $S_p$ è abeliano. Qualunque sia il sottogruppo proprio $H$ di $S_q$, i sottogruppi $S_p H$ e $S_q$ sono non confrontabili, per cui $H$ è abeliano e $S_q$ è abeliano o minimale non abeliano.

TEOREMA 2.13. *Sia $G$ un gruppo finito di ordine $p^\alpha q$ $(p \neq q)$ a sottogruppi di* SYLOW *ciclici. Allora $G \in (P)$.*

*Dimostrazione.* In primo luogo sia $p > q$, e si proceda per induzione su $\alpha$, essendo l'asserto ovvio se $\alpha = 1$. Supposto $\alpha > 1$, sia $S_p$ l'unico $p$-sottogruppo di SYLOW di $G$, e siano $H$ e $K$ sottogruppi non confrontabili di $G$. Se $q$ non divide $|H \wedge K|$, $H \wedge K$ è un $p$-gruppo ed è quindi abeliano. Sia invece $|H \wedge K|$ divisibile per $q$ e siano $M_1$ e $M_2$ sottogruppi massimali di $G$ contenenti rispettivamente $H$ e $K$; si ha allora $|G : M_1| = |G : M_2| = p$ e $G = S_p M_1 = S_p M_2$. Si ha quindi $|S_p : S_p \wedge M_1| = |G : M_1| = |G : M_2| = |S_p : S_p \wedge M_2|$, sicché $S_p \wedge M_1 = S_p \wedge M_2$. D'altra parte $q$ divide $|M_1 \wedge M_2|$, per cui $|G : M_1 \wedge M_2|$ è una potenza di $p$ e $G = S_p (M_1 \wedge M_2)$; allora risulta $|G : M_1 \wedge M_2| = |S_p : S_p \wedge M_1 \wedge M_2| = |S_p : S_p \wedge M_1| = |G : M_1| = p$, sicché $M_1 = M_2$. Il gruppo $M_1$ ha ordine $p^{\alpha-1} q$ e quindi, per induzione, appartiene a $(P)$, sicché $H \wedge K$ è abeliano e $G \in (P)$. Sia invece $p < q$, e siano $H$ e $K$ sottogruppi non confrontabili di $G$; denotato con $S_q$ l unico $q$-sottogruppo di SYLOW di $G$, poiché $G/S_q \simeq S_p$ è ciclico primario, non può risultare $S_q \leq H \wedge K$. Pertanto $H \wedge K$ è un $p$-gruppo ed è quindi abeliano, sicché $G \in (P)$.

TEOREMA 2.14. *Sia $G$ un gruppo finito di ordine $p^\alpha q^\beta$ $(p > q$, $\alpha > 1)$ a sottogruppi di* SYLOW *ciclici. Sono equivalenti:*

(i) $G \in (P)$;

(ii) *il sottogruppo $M$ di indice $q$ di $G$ è abeliano.*

*Dimostrazione.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Denotato con $S_p$ l'unico $p$-sottogruppo di SYLOW di $G$, si procede per induzione su $\beta$, giacché, se $\beta = 1$, $M = S_p$ è abeliano. Supposto $\beta > 1$, sia $L$ un sottogruppo massimale di $M$; se $|M : L| = q$, l'ipotesi induttiva applicata a $M$ assicura che $L$ è abeliano. Sia invece $|M : L| = p$, e siano $M_p$ l'unico sottogruppo massimale di $S_p$,$L_q$ un $q$-sottogruppo di SYLOW di $L$ e $S_q$ un $q$-sottogruppo di SYLOW di $G$ contenente $L_q$; poiché $S_p$ è ciclico e normale in $G$, $M_p$ è l'unico sottogruppo di ordine $p^{\alpha-1}$ di $G$, sicché, risultando $|L| = p^{\alpha-1} q^{\beta-1}$, $M_p$ è il $p$-sottogruppo di SYLOW di $L$, e si ha quindi $L = M_p L_q$. I sottogruppi $M_p S_q$ e $S_p L_q$ sono non confrontabili, per cui $L$ è abeliano. Pertanto $M$ è abeliano oppure minimale non abeliano; d'altra parte $S_p$ è normale in $M$ e non ha esponente $p$, sicché dal teorema di RÉDEI segue che $M$ è abeliano.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si procede per induzione su $\alpha + \beta$, giacché se $\alpha + \beta = 3$ si ha $|G| = p^2 q$ e l'asserto segue dal TEOREMA 2.13. Sia dunque $\alpha + \beta > 3$, e siano $H$ e $K$ sottogruppi non confrontabili di $G$. Si supponga in primo luogo $H$ e $K$ contenuti in un medesimo sottogruppo massimale $V$ di $G$; se $V$ ha indice $q$ in $G$, $V = M$ è abeliano e quindi tale è $H \wedge K$. Sia dunque $|G : V| = p$, e sia $L$ un sottogruppo massimale di indice $q$ di $V$; *si* ha allora $|G : L| = pq$ e quindi, denotato con $S_p$ l'unico $p$-sottogruppo di SYLOW di $G$, $S_p L$ è il sottogruppo di indice $q$ di $G$ ed è quindi abeliano, sicché tale è anche $L$. Dopo di ciò, se $\alpha = 2$, $V$ ha ordine $pq^\beta$ e, per il TEOREMA 2.13, $V \in (P)$, per cui $H \wedge K$ è abeliano; se invece $\alpha > 2$, poiché $|V| = p^{\alpha-1} q^\beta$, per induzione $V \in (P)$ e $H \wedge K$ è abeliano. Si suppongano invece $H$ e $K$ non contenuti in un medesimo sottogruppo massimale di $G$, e siano $M_1$ e $M_2$ sottogruppi massimali di $G$ contenenti rispettivamente $H$ e $K$; se uno dei sottogruppi $M_1$ e $M_2$ ha indice $q$ in $G$, $H \wedge K$ è evidentemente abeliano. Sia pertanto $|G : M_1| = |G : M_2| = p$. Se $q$ divide $|G : H \wedge K|$, $S_p (H \wedge K)$ è un sottogruppo proprio di $G$ il cui indice è una potenza di $q$, per cui $S_p (H \wedge K) \leq M$ e $H \wedge K$ è abeliano. Sia dunque $|G : H \wedge K|$ potenza di $p$, e quindi tale sia anche $|G : M_1 \wedge M_2|$; si ha allora $M_1 \wedge M_2 \nleq M$ e $G = M (M_1 \wedge M_2)$. Il gruppo $M$ è ciclico, sicché dalle eguaglianze $|M : M \wedge M_1| = |G : M_1| = p = |G : M_2| = |M : M \wedge M_2|$ segue $M \wedge M_1 = M \wedge M_2$; dopo di ciò si ha $|G : M_1 \wedge M_2| = |M : M \wedge M_1 \wedge M_2| = |M : M \wedge M_1| = p$, il che è assurdo, giacché $M_1 \neq M_2$.

OSSERVAZIONE 2.15. Esistono gruppi non abeliani di ordine $p^\alpha q^\beta$ $(p > q, \alpha > 1)$ verificanti le condizioni del TEOREMA 2.14, come illustra la situazione seguente. Siano $p$ un primo dispari, $q$ un divisore primo di $p$-1, $\alpha$ e $\beta$ interi $> 1$, $S_p$ e $S_q$ gruppi ciclici di ordini rispettivamente $p^\alpha$ e $q^\beta$. Esiste un omomorfismo $\vartheta : S_q \rightarrow \mathrm{Aut}\,(S_p)$ il cui nucleo ha ordine $q^{\beta-1}$; il gruppo $G = [S_p]_\vartheta \cdot S_q$ è non abeliano e appartiene a $(P)$.

TEOREMA 2.16. *Sia $G$ un gruppo supersolubile finito di ordine $p^\alpha q^\beta$ $(p > q, \alpha > 1)$ il cui $p$-sottogruppo di* SYLOW *$S_p$ sia ciclico e i cui $q$-sottogruppi di* SYLOW *siano non ciclici. Sono equivalenti:*

(i) *$G \in (P)$;*

(ii) *$G$ è abeliano oppure prodotto diretto di un $p$-gruppo ciclico per un $q$-gruppo minimale non abeliano.*

*Dimostrazione.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Poiché $G/S_p$ è non ciclico, esistono due sottogruppi massimali distinti $M_1$ e $M_2$ di $G$ contenenti $S_p$ e si ha $|G : M_1| = |G : M_2| = q$. Procedendo come nel TEOREMA 2.14 si prova che $M_1$ e $M_2$ sono abeliani, per cui $S_p \leq M_1 \wedge M_2 \leq Z(G)$. Dopo di ciò $G$ è nilpotente e l'asserto segue dal TEOREMA 1.9. (ii) $\Rightarrow$ (i) Segue dal TEOREMA 1.9.

TEOREMA 2.17. *Sia $G$ un gruppo supersolubile finito di ordine $pq^\beta$ $(p > q)$ con i $q$-sottogruppi di* SYLOW *abeliani non ciclici. Sono equivalenti:*

(i) *$G \in (P)$;*

(ii) *l intersezione di due qualunque sottogruppi distinti di indice $q$ di $G$ è abeliana.*

*Dimostrazione.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Ovvia.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si procede per induzione su $\beta$, essendo l'asserto ovvio se $\beta = 2$. Supposto $\beta > 2$, sia $S_p$ l'unico $p$-sottogruppo di Sylow di $G$, e siano $H$ e $K$ sottogruppi non confrontabili di $G$. Se $S_p \nleq H$, $H$ è un $q$-gruppo, ed è quindi abeliano, sicché tale è $H \wedge K$; si procede analogamente se $S_p \nleq K$, sicché si può ritenere $S_p \leq H \wedge K$. In primo luogo esistano in $G$ due sottogruppi massimali distinti $M_1$ e $M_2$ tali che $H \leq M_1$ e $K \leq M_2$; poiché $|G : M_1| = |G : M_2| = q$, per ipotesi $M_1 \wedge M_2$ è abeliano, e quindi tale è $H \wedge K$. Siano invece $H$ e $K$ contenuti in un medesimo (unico) sottogruppo massimale $M$ di $G$, e sia $M_q$ un $q$-sottogruppo di Sylow di $M$; si ha allora $M = S_p M_q$, sicché $M_q$ è non ciclico giacché dotato, al pari di $M/S_p$, di due sottogruppi non confrontabili. Se $A$ e $B$ sono sottogruppi distinti di indice $q$ di $M$, si ha $S_p \leq A \wedge B$ e quindi, per l abelianità di $G/S_p$, $A \wedge B$ è normale in $G$. Il gruppo $G/A \wedge B$ è un $q$-gruppo non ciclico, e quindi esistono due sottogruppi massimali distinti $L_1$ e $L_2$ di $G$ contenenti $A \wedge B$ e perciò di indice $q$ in $G$; per ipotesi $L_1 \wedge L_2$ è abeliano e quindi tale è $A \wedge B$. Dopo di ciò, per induzione, $M \in (P)$ e $H \wedge K$ è abeliano, per cui $G \in (P)$.

Osservazione 2.18. Esistono gruppi supersolubili di ordine $pq^\beta$ $(p > q)$ con i $q$-sottogruppi di Sylow abeliani non ciclici, appartenenti a $(P)$ e dotati di sottogruppi non abeliani di indice $q^2$. Infatti sia $H = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$ con $x^4 = y^4 = 1$, e sia $\vartheta : H \rightarrow \mathrm{Aut}\,(Z_3)$ un omomorfismo di nucleo $\langle x^2 \rangle \times \langle y \rangle$; il gruppo $G = [Z_3]_\vartheta \cdot H$ è supersolubile di ordine $3 \cdot 2^4$ con i 2-sottogruppi di Sylow abeliani non ciclici, col sottogruppo $Z_3 \langle x \rangle$ non abeliano e di indice 4, e appartiene a $(P)$.

Osservazione 2.19. Il teorema 2.17 non si estende ai gruppi supersolubili finiti di ordine $pq^\beta$ $(p > q)$ con i $q$-sottogruppi di Sylow minimali non abeliani, come mostra la situazione seguente. Il gruppo $H = \langle x, y, z \,/\, x^4 = y^2 = z^2 = 1, [x, y] = z, [x, z] = [y, z] = 1 \rangle$ è minimale non abeliano e ha ordine 16; poiché $y \notin Z\,(H) = \Phi\,(H)$, esiste un sottogruppo massimale $M$ di $H$ con $y \notin M$. Considerato un omomorfismo $\vartheta : H \rightarrow \mathrm{Aut}\,(Z_3)$ di nucleo $M$, il gruppo $G = [Z_3]_\vartheta \cdot H$ è supersolubile di ordine $3 \cdot 2^4$ con i 2-sottogruppi di Sylow minimali non abeliani. Inoltre l'intersezione di due qualunque sottogruppi di indice 2 di $G$ è abeliana. D'altra parte il sottogruppo non abeliano $Z_3 \langle y \rangle$ è contenuto nei sottogruppi non confrontabili $Z_3\,(\langle x^2 \rangle \times \langle y \rangle)$ e $Z_3\,(\langle z \rangle \times \langle y \rangle)$, e quindi $G \notin (P)$.
Si ha però il seguente

TEOREMA 2.20. *Sia $G$ un gruppo supersolubile finito di ordine $pq^\beta$ $(p > q)$ con i $q$-sottogruppi di* SYLOW *minimali non abeliani. Sono equivalenti:*

(i) $G \in (P)$;

(ii) *qualunque sia il $q$-sottogruppo di* SYLOW *$S_q$ di $G$, l'intersezione di due qualunque sottogruppi massimali distinti di $S_q$ è centrale in $G$, e l'intersezione di due qualunque sottogruppi distinti di indice $q^2$ di $S_q$ centralizza il $p$-sottogruppo di* SYLOW *$S_p$ di $G$.*

*Dimostrazione.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Siano $M_1$ e $M_2$ sottogruppi massimali distinti di un $q$-sottogruppo di SYLOW $S_q$ di $G$; i sottogruppi $S_p M_1$ e $S_p M_2$ sono non confrontabili per cui $S_p (M_1 \wedge M_2)$ è abeliano; d'altra parte, per il teorema di RÉDEI, $M_1 \wedge M_2 = Z(S_q)$, e quindi $M_1 \wedge M_2 \leq Z(G)$. In modo analogo si prova che l'intersezione di due qualunque sottogruppi distinti di indice $q^2$ di $S_q$ centralizza $S_p$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Siano $H$ e $K$ sottogruppi non confrontabili di $G$. Se $S_p \nleq H$, $H$ è un $q$-gruppo e quindi $H \wedge K < H$ è abeliano; similmente si procede se $S_p \nleq K$, sicché si può ritenere $S_p \leq H \wedge K$. In primo luogo esistano in $G$ due sottogruppi massimali distinti $M_1$ e $M_2$ tali che $H \leq M_1$ e $K \leq M_2$; si ha $|G : M_1| = |G : M_2| = q$ e quindi, per la normalità di $S_p$ in $G$, $M_1$ e $M_2$ sono normali in $G$. Denotato con $S_q$ un $q$-sottogruppo di SYLOW di $G$, risulta $(i = 1, 2)$ $G = M_i S_q$ e quindi $q = |G : M_i| = |S_q : S_q \wedge M_i|$, per cui $S_q \wedge M_1$ e $S_q \wedge M_2$ sono sottogruppi massimali di $S_q$ che, per la relazione di DEDEKIND, risultano distinti, al pari di $M_1$ e $M_2$; l'ipotesi assicura allora che $S_q \wedge M_1 \wedge M_2 \leq Z(G)$. D'altra parte si ha $M_1 \wedge M_2 = (S_p S_q) \wedge M_1 \wedge M_2 = S_p (S_q \wedge M_1 \wedge M_2)$, sicché $M_1 \wedge M_2$ è abeliano, e tale è $H \wedge K$. Siano invece $H$ e $K$ contenuti in un medesimo (unico) sottogruppo massimale $M$ di $G$; poiché $G/S_p$ è minimale non abeliano, $M/S_p$ è abeliano e da $S_p \leq H \wedge K \leq M$ segue che $H \wedge K \triangleleft M$. Il $q$-gruppo $M/H \wedge K$ è non ciclico e quindi esistono due sottogruppi massimali distinti $L_1$ e $L_2$ di $M$ contenenti $H \wedge K$; poiché $S_p \leq L_1 \wedge L_2$, si ha $|M : L_1| = |M : L_2| = q$ e quindi $|G : L_1| = |G : L_2| = q^2$. Detto $S_q$ un $q$-sottogruppo di SYLOW di $G$ risulta $(i = 1, 2)$ $G = L_i S_q$ e quindi $q^2 = |G : L_i| = |S_q : S_q \wedge L_i|$. Poiché $L_1 \neq L_2$, l'identità di DEDEKIND comporta $S_q \wedge L_1 \neq S_q \wedge L_2$, sicché per ipotesi $S_q \wedge L_1 \wedge L_2$ centralizza $S_p$; inoltre $S_q \wedge L_1 \wedge L_2 < S_q$ è abeliano. Dopo di ciò $L_1 \wedge L_2 = (S_p S_q) \wedge L_1 \wedge L_2 = S_p (S_q \wedge L_1 \wedge L_2)$ è abeliano, sicché tale è $H \wedge K$ e $G \in (P)$.

TEOREMA 2.21. *Sia $G$ un gruppo supersolubile finito di ordine $p^\alpha q^\beta$ $(p > q)$ con i $q$-sottogruppi di* SYLOW *ciclici e il $p$-sottogruppo di* SYLOW *$S_p$ abeliano non ciclico. Sono equivalenti:*

(i) $G \in (P)$;

(ii) *$G$ verifica le seguenti condizioni:*

(a) *l'intersezione di due qualunque sottogruppi massimali distinti di $S_p$ normali in $G$ è centrale in $G$;*

(b) *$G$ è dotato di un unico sottogruppo $V$ di ordine $q^{\beta-1}$.*

*Dimostrazione.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Siano $K_1$ e $K_2$ sottogruppi massimali distinti di $S_p$ che risultino normali in $G$, e sia $S_q$ un $q$-sottogruppo di SYLOW di $G$; i sottogruppi $K_1 S_q$ e $K_2 S_q$ sono non confrontabili, per cui $(K_1 \wedge K_2) S_q$ è abeliano e $K_1 \wedge K_2$, centralizzando $S_q$, è centrale in $G$. Poiché $G$ è supersolubile e $S_p$ non è ciclico, dal teorema di MASCHKE segue $S_p / \Phi(S_p) = H_1 / \Phi(S_p) \dots H_n / \Phi(S_p)$, con i fattori normali in $G / \Phi(S_p)$ e di ordine $p$, e $n > 1$; esistono allora in $S_p$ due sottogruppi massimali distinti $U_1$ e $U_2$ normali in $G$. Sia $L$ un sottogruppo di ordine $q^{\beta-1}$ di $G$, e sia $S_q$ un $q$-sottogruppo di SYLOW di $G$ contenente $L$; i sottogruppi $U_i S_q$ $(i = 1, 2)$ e $S_p L$ sono non confrontabili, per cui $U_i L$ è abeliano e $L$ centralizza $U_1 U_2 = S_p$, ed è quindi centrale in $G$. Ciò assicura che $L$ è l'unico sottogruppo di ordine $q^{\beta-1}$ di $G$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si procede per induzione su $\alpha + \beta$, essendo l'asserto ovvio se $\alpha + \beta = 3$, cioè se $|G| = p^2 q$. Supposto $\alpha + \beta > 3$, siano $H$ e $K$ sottogruppi non confrontabili di $G$. Se $q$ divide $|G : H \wedge K|$, un qualunque $q$-sottogruppo di SYLOW di $H \wedge K$ è contenuto in $V$, per cui $H \wedge K$ è contenuto nel gruppo abeliano $S_p \times V$ ed è quindi abeliano. Sia quindi $|G : H \wedge K|$ una potenza di $p$. In primo luogo esistano due sottogruppi massimali distinti $M_1$ e $M_2$ di $G$ tali che $H \leq M_1$ e $K \leq M_2$; $|G : M_1 \wedge M_2|$ è una potenza di $p$, sicché $M_1 \wedge M_2$ contiene un $q$-sottogruppo di SYLOW $S_q$ di $G$. Si ha allora $(i = 1, 2)$ $M_i = S_p S_q \wedge M_i = S_q (S_p \wedge M_i)$, sicché da $M_1 \neq M_2$ segue $S_p \wedge M_1 \neq S_p \wedge M_2$. Inoltre, poiché $S_p \wedge M_i$ è normale in $S_p$ e in $M_i$, $S_p \wedge M_i$ risulta normale in $G$; l'ipotesi assicura allora che $S_p \wedge M_1 \wedge M_2 \leq Z(G)$. D'altra parte $|M_1 \wedge M_2 : S_p \wedge M_1 \wedge M_2| = |G : S_p| = q$ e quindi $M_1 \wedge M_2$ è nilpotente e perciò abeliano sicché tale è $H \wedge K$. Siano invece $H$ e $K$ contenuti in un medesimo (unico) sottogruppo massimale $M$ di $G$; poiché $|G : H \wedge K|$ è potenza di $p$, si ha $|G : M| = p$, e quindi $|M| = p^{\alpha-1} q^{\beta}$. Se il $p$-sottogruppo di SYLOW di $M$ è ciclico, dai TEOREMI 2.13 e 2.14 (se $\alpha = 2$ o se $\alpha > 2$ rispettivamente) segue che $M \in (P)$, sicché in tal caso $H \wedge K$ è abeliano. Sia invece il $p$-sottogruppo di SYLOW $S_p \wedge M$ di $M$ non ciclico, e siano $K_1$ e $K_2$ sottogruppi massimali distinti di $S_p \wedge M$ che risultino normali in $M$; poiché $S_p$ è abeliano e $K_1$ e $K_2$ sono normali in $M$, $K_1$ e $K_2$ sono normali in $G$, per cui tale è anche $K_1 \wedge K_2$. Il gruppo $S_p / K_1 \wedge K_2$ è un sottogruppo normale non ciclico di $G/K_1 \wedge K_2$; detto $F/K_1 \wedge K_2$ il sottogruppo di FRATTINI di $S_p/K_1 \wedge K_2$, il teorema di MASCHKE applicato al $p$-gruppo abeliano elementare $S_p/F$ assicura l'esistenza in $S_p$ di due sottogruppi massimali distinti

$L_1$ e $L_2$ normali in $G$ e contenenti $F$, e quindi anche $K_1 \wedge K_2$. Per ipotesi $L_1 \wedge L_2 \leq Z(G)$ e quindi $K_1 \wedge K_2 \leq Z(M)$. Dopo di ciò, per induzione $M \in (P)$ e $H \wedge K$ è abeliano, sicché $G \in (P)$.

TEOREMA 2.22. *Sia $G$ un gruppo supersolubile finito di ordine $p^\alpha q^\beta$ $(p > q)$ con i $q$-sottogruppi di* SYLOW *ciclici e il $p$-sottogruppo di* SYLOW *$S_p$ minimale non abeliano. Sono equivalenti:*

(i) *$G \in (P)$;*

(ii) *$G$ verifica le seguenti condizioni:*

(a) *$Z(S_p) \leq Z(G)$;*

(b) *$G$ è dotato di un unico sottogruppo $V$ di ordine $q^{\beta-1}$;*

(c) *l'intersezione di due qualunque sottogruppi distinti di indice $p^2$ in $S_p$, normalizzati da un $q$-sottogruppo di* SYLOW *$S_q$ di $G$, centralizza $S_q$.*

*Dimostrazione.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Poiché $S_p$ è minimale non abeliano, $S_p/Z(S_p)$ è abeliano elementare di ordine $p^2$ e quindi, per la supersolubilità di $G$, dal teorema di MASCHKE segue $S_p/Z(S_p) = H_1/Z(S_p) \times H_2/Z(S_p)$, con i fattori di ordine $p$ e normali in $G/Z(S_p)$. Denotato con $S_q$ un $q$-sottogruppo di SYLOW di $G$, i sottogruppi $H_1 S_q$ e $H_2 S_q$ sono non confrontabili, per cui $Z(S_p) S_q$ è abeliano e $Z(S_p) \leq Z(G)$. Sia $V$ un sottogruppo di ordine $q^{\beta-1}$ di $G$, e sia $S_q$ un $q$-sottogruppo di SYLOW di $G$ contenente $V$; i sottogruppi $S_pV$ e $H_i S_q$ sono non confrontabili $(i = 1, 2)$, per cui $H_iV$ è abeliano e $V$, essendo centralizzato da $S_p = H_1 H_2$, è centrale in $G$. Da ciò segue l'unicità di $V$. Siano poi $K_1$ e $K_2$ sottogruppi distinti di indice $p^2$ in $S_p$ che siano normalizzati da un $q$-sottogruppo di SYLOW $S_q$ di $G$; i sottogruppi $K_1 S_q$ e $K_2 S_q$ sono non confrontabili, per cui $(K_1 \wedge K_2) S_q$ è abeliano e $K_1 \wedge K_2 \leq Z_G(S_q)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Poiché $S_p \lhd G$ e $G/S_p$ è ciclico, esiste in $G$ un unico sottogruppo $M$ di indice $q$ e, essendo $V$ l'unico $q$-sottogruppo di SYLOW di $M$, $M$ è nilpotente e, per il TEOREMA 1.9, $M \in (P)$. Siano $H$ e $K$ sottogruppi non confrontabili di $G$, e in primo luogo esistano due sottogruppi massimali distinti $M_1$ e $M_2$ di $G$ tali che $H \leq M_1$ e $K \leq M_2$. Se uno dei sottogruppi $M_1$ e $M_2$ ha indice $q$ in $G$, l'altro vi ha indice $p$, e quindi, per la normalità del sottogruppo di indice $q$, $|G : M_1 \wedge M_2| = pq$. D'altra parte $M_1 \wedge M_2 \leq M$ è nilpotente e quindi, avendo ordine $p^{\alpha-1} q^{\beta-1}$, è abeliano, sicché tale è $H \wedge K$. Sia dunque $|G : M_1| = |G : M_2| = p$; poiché $V \leq M_1 \wedge M_2$, si ha $M = S_p \times V \leq S_p(M_1 \wedge M_2)$, e quindi $S_p(M_1 \wedge M_2) = M$ oppure $S_p(M_1 \wedge M_2) = G$. Nel primo caso si ha $M_1 \wedge M_2 = (S_p \wedge M_1 \wedge M_2) \times V$ e da $S_p \wedge M_1 \wedge M_2 < S_p$ segue l'abelianità di $M_1 \wedge M_2$ e quindi quella di $H \wedge K$. Nel secondo caso si ha invece $|G : M_1 \wedge M_2| = |S_p : S_p \wedge M_1 \wedge M_2|$, per cui $q^\beta$ divide $|M_1 \wedge M_2|$ e $M_1 \wedge M_2$ contiene un $q$-sottogruppo di SYLOW $S_q$ di $G$; si ha allora $M_i =$

$= S_p S_q \wedge M_i = S_q (S_p \wedge M_i)$ $(i = 1, 2)$, per cui da $M_1 \neq M_2$ segue $S_p \wedge M_1 \neq S_p \wedge M_2$, e per ipotesi $S_p \wedge M_1 \wedge M_2 = Z(S_p) \leq Z(G)$. Dopo di ciò risulta $M_1 \wedge M_2 = (S_p \wedge M_1 \wedge M_2) \times S_q$ e $M_1 \wedge M_2$ è abeliano, sicché tale è $H \wedge K$. Siano invece $H$ e $K$ contenuti in un medesimo (unico) sottogruppo massimale $M_1$ di $G$; se $M_1 = M$, $H \wedge K$ è abeliano perché $M \in (P)$. Sia $|G : M_1| = p$ e quindi $|M_1| = p^{\alpha-1} q^{\beta}$; se il $p$-sottogruppo di SYLOW di $M_1$ è ciclico, dal TEOREMA 2.14 segue $M_1 \in (P)$ e quindi $H \wedge K$ è abeliano. Se infine il $p$-sottogruppo di SYLOW di $M_1$ non è ciclico, segue dal TEOREMA 2.21 che $M_1 \in (P)$ per cui $H \wedge K$ è abeliano e $G \in (P)$.

Dai TEOREMI 2.11 - 2.22 discende la seguente caratterizzazione dei gruppi supersolubili finiti $G \in (P)$ con $|\omega(G)| = 2$:

TEOREMA 2.23. *Per un gruppo supersolubile finito $G$ di ordine $p^{\alpha} q^{\beta}$ $(p > q)$ sono equivalenti:*

(i) $G \in (P)$;

(ii) *$G$ è un gruppo di uno dei tipi seguenti:*

(a) *$G$ è abeliano;*

(b) *$G$ è prodotto diretto di un $p$-gruppo ciclico per un $q$-gruppo minimale non abeliano;*

(c) *$G$ ha ordine $p^{\alpha} q$ oppure $pq^{\beta}$ ed è a sottogruppi di* SYLOW *ciclici;*

(d) *$G$ ha ordine $p^{\alpha} q^{\beta}$ $(\alpha > 1)$ con i sottogruppi di* SYLOW *ciclici e i sottogruppi di indice $q$ abeliani;*

(e) *$G$ ha ordine $pq^{\beta}$, con i $q$-sottogruppi di* SYLOW *abeliani non ciclici e l'intersezione di due qualunque sottogruppi distinti di indice $q$ abeliani;*

(f) *$G$ ha ordine $pq^{\beta}$, con i $q$-sottogruppi di* SYLOW *minimali non abeliani, l'intersezione di due qualunque sottogruppi massimali distinti di un $q$-sottogruppo di* SYLOW *è centrale in $G$, e l'intersezione di due qualunque sottogruppi distinti di indice $q^2$ di un medesimo $q$-sottogruppo di* SYLOW *di $G$ centralizza il $p$-sottogruppo di* SYLOW *di $G$;*

(g) *i $q$-sottogruppi di* SYLOW *di $G$ sono ciclici, il $p$-sottogruppo di* SYLOW *$S_p$ di $G$ è abeliano non ciclico, esiste in $G$ un unico sottogruppo di ordine $q^{\beta-1}$ e l'intersezione di due qualunque sottogruppi massimali distinti di $S_p$ normali in $G$ è centrale in $G$;*

(h) *i $q$-sottogruppi di* SYLOW *di $G$ sono ciclici, l'unico $p$-sottogruppo di* SYLOW *$S_p$ di $G$ è minimale non abeliano, esiste in $G$ un unico sottogruppo di ordine $q^{\beta-1}$, l'intersezione di due qualunque sottogruppi distinti di indice $p^2$ di $S_p$, normalizzati da un $q$-sottogruppo di* SYLOW *$S_q$ di $G$, centralizza $S_q$, e inoltre $Z(S_p) \leq Z(G)$.*

## BIBLIOGRAFIA

[1] V. I. CHAADAEV, *Finite simple non abelian* (a)-*groups*, Siber. Math. J. 12 (1971) 148-153.

[2] V. I. CHAADAEV, *Finite unsolvable non simple* (A)-*groups*, Math. Notes 10 (1971) 521-523.

[3] G. MILLER, H. MORENO, *Non abelian groups in which every subgroup is abelian*, Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903) 398-404.

[4] L. RÉDEI, *Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen*, Publ. Math. Debrecen 4 (1956) 303-324.

[5] D. J. S. ROBINSON, *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, Part 1, Springer 1972.

[6] E. SCHENKMAN, *Group theory*, Van Nostrand Company 1965.