UNA PROPRIETA' DEL COMPORTAMENTO PER GLI AUTOMI COMPLETI (*)

di RENATO BETTI e STEFANO KASANGIAN (a Milano) (**)

SOMMARIO. - *Si dimostra che, considerando gli automi come categorie arricchite, il comportamento è una opfibrazione e la nota aggiunzione con la realizzazione vale anche in questo contesto più generale.*

SUMMARY. - *It is shown that, in the categorical approach by which automata are enriched categories, behaviour turns out to be an opfibration and its adjointness to realization still holds in this enriched framework.*

Introduzione

In un articolo recente ([1]) viene introdotta una nuova teoria categoriale degli automi, nella quale i singoli automi sono visti come categorie basate su opportune categorie monoidali bichiuse. Il caso trattato è quello dei «riconoscitori» e la categoria di base $\mathfrak{X}$ è il preordine delle parti del monoide X degli input.

Va rilevato come «basare» gli automi su $\mathfrak{X}$ corrisponda ad interpretarne gli oggetti quali valori di verità per una «logica generalizzata» (nel senso di Lawvere, [9]) degli automi.

Anche in questo contesto «relativo» si pone il classico problema della realizzazione minimale, trattato in ambito categoriale già

(*) Pervenuto in Redazione il 26 marzo 1980. Lavoro eseguito nell'ambito del GNSAGA.
(**) Indirizzo degli Autori: Istituto Matematico dell'Università - Via C. Saldini, 50 - 20133 Milano.

da Goguen ([7]), il quale dimostra che il funtore «realizzazione minimale» è aggiunto destro al funtore «comportamento». Il teorema, come ha osservato Trnková ([11], p. 341), vale solo sotto opportune ipotesi sulla natura degli automi (sostanzialmente, il determinismo). D'altra parte, esso rappresenta la più forte tra le varie formulazioni del problema della minimalità degli automi (cfr. Trnková, [10], p. 145).

La trattazione di formulazioni più deboli del problema (per automi non deterministici) in un ambito 2-categoriale, è l'oggetto di [3], dove si ottiene un risultato di quasi-universalità in termini di aggiunzioni locali.

Nel presente lavoro affrontiamo, invece, la formulazione forte del problema, necessariamente quindi per automi deterministici o completi, estendendo l'aggiunzione di Goguen all'ambito «arricchito» descritto in precedenza.

Questo conduce a definire adeguatamente le categorie degli automi e dei comportamenti e ad osservare che il «funtore comportamento» diviene allora una op-fibrazione tra le due categorie. La aggiunzione cercata è quindi un caso particolare di una proprietà generale relativa all'esistenza degli oggetti terminali delle fibre preservati da funtori indotti da un «cleavage» canonico.

Il riferimento generale per le categorie chiuse è dato da [6] e [9], per gli automi da [5] e per le fibrazioni da [8].

1 - Richiamiamo brevemente le definizioni e i concetti principali di [1] e diamo una caratterizzazione degli automi completi.

Sia X un monoide libero. Una X-dinamica (non necessariamente deterministica) può essere vista come una $\mathfrak{X}$-categoria Q, dove $\mathfrak{X}$ è la categoria monoidale bichiusa data dal preordine dei sottoinsiemi di X, dotata della struttura monoidale indotta dal prodotto e con i quozienti sinistri e destri come hom interni.

$$A \otimes B = A.B = \{x \in X \mid x = ab\,, a \in A\,, b \in B\}$$
$$\hom(A,B) = A^{-1}B = \{x \in X \mid A.x \subset B\}$$
$$\mathrm{moh}(A,B) = BA^{-1} = \{x \in X \mid x.A \subset B\}$$

L'identità del prodotto tensoriale è $k = \{e\}$, dove e è l'unità di X. Nel presente lavoro non useremo tuttavia la bichiusura di $\mathfrak{X}$ e ci basterà uno solo degli hom interni, il quoziente sinistro.

Nella $\mathfrak{X}$-categoria Q gli oggetti vanno interpretati come stati della corrispondente dinamica e la relazione di transizione dovuta all'input $x \in X$ induce frecce tra gli oggetti di Q ([1], Prop. 1).

Un automa è una dinamica Q con la precisazione degli stati iniziali e terminali, che si effettua assegnando un *bimodulo iniziale* (o di raggiungibilità) $\mathrm{I} : Q \relbar\joinrel\mapstochar\joinrel\rightarrow \underline{1}$ e un *bimodulo terminale* (o di osservabilità) $T : \underline{1} \relbar\joinrel\mapstochar\joinrel\rightarrow Q$ (dove $\underline{1}$ è la $\mathfrak{X}$-categoria con un solo oggetto e un solo morfismo: k).

Si definisce «raggiungibile» (osservabile) un automa tale che, per ogni q di Q, sia $I(q) \neq \phi$ $(T(q) \neq \phi)$. Tutti gli automi d'ora in avanti considerati si intendono raggiungibili.

Si ha dunque una categoria degli X-automi, i cui oggetti sono terne del tipo $\mathbf{Q} = (Q, I, T)$, mentre i morfismi tra $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{Q} = (Q', I', T')$ sono gli $\mathfrak{X}$-funtori $\varphi : Q \rightarrow Q'$ che verificano le inclusioni di bimoduli indicate nei seguenti diagrammi:

$$\begin{tikzcd}
 & Q \arrow[dd, "|" marking, "\varphi^*"] \\
\underline{1} \arrow[ur, "|" marking, "T"] \arrow[dr, "|" marking, "T'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \\
 & Q'
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, "|" marking, "I"] \arrow[dd, "|" marking, "\varphi_*"'] & \\
\arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \underline{1} \\
Q' \arrow[ur, "|" marking, "I'"'] &
\end{tikzcd}$$

dove φ^* e φ_* sono i bimoduli indotti dallo $\mathfrak{X}$-funtore φ, definiti canonicamente da $\varphi_*(q', q) = Q'(q', \varphi q)$ e $\varphi^*(q, q') = Q'(\varphi q, q')$ ([1], Prop. 4 e [9]).

Si definisce *comportamento* dell'automa $\mathbf{Q} = (Q, I, T)$ l'oggetto di $\mathfrak{X}$ corrispondente al bimodulo composto:

$$\underline{1} \overset{T}{\relbar\joinrel\mapstochar\joinrel\rightarrow} Q \overset{I}{\relbar\joinrel\mapstochar\joinrel\rightarrow} \underline{1}$$

Si noti che gli endobimoduli di $\underline{1}$ sono in corrispondenza biunivoca con gli oggetti di $\mathfrak{X}$.

Caratterizziamo ora la sottocategoria degli automi completi, che è l'ambiente del presente lavoro. Ricordiamo che un automa è deterministico se la relazione di transizione è una funzione parziale ed è completo se essa è una funzione.

In [1] viene trattato il caso in cui gli automi sono $\mathfrak{X}$-categorie tensorizzate. Tuttavia, anche in assenza della tensorizzazione, può essere rappresentabile il funtore $\mathfrak{X}(L, Q(q, -)) : Q \rightarrow \mathfrak{X}$, *per qualche* oggetto L di $\mathfrak{X}$. Come è noto ([4]), l'oggetto rappresentante è un caso particolare di *colimite indiciato* di due funtori, precisamente quando questi sono rispettivamente $q : \underline{1} \to Q$ e $L : \underline{1} \to \tilde{X}$.

Si ha allora, anche se Q non è tensorizzata, l'isomorfismo

$$Q(q * L, q') \cong \tilde{X}(L, Q(q, q'))$$

dove $q * L$ (o $q \otimes L$) denota il colimite di q indiciato da L.

Possiamo dare la seguente:

DEFINIZIONE 1.1.

La dinamica Q è *completa* se la categoria sottostante Q_o è discreta e se per ogni oggetto q di Q e *per ogni elemento x del monoide X* esiste il colimite di q indiciato da $x : q \otimes x$.

OSSERVAZIONE 1.1.

La definizione corrisponde alla nozione classica di completezza per gli automi, perché X è moide libero (si veda [2] p. 16-19 per dei controesempi).

DEFINIZIONE 1.2.

L'automa $\mathbf{Q} = (Q, I, T)$ è *completo* se inoltre il bimodulo I è del tipo i^*, dove $i : \underline{1} \to Q$ è un $\tilde{X}$-funtore che assegna un *unico* stato iniziale.

Denotiamo con X-Aut la categoria degli automi completi. Si osservi che i morfismi vanno ulteriormente precisati nel senso della seguente:

DEFINIZIONE 1.3.

I morfismi in X-Aut (morfismi «propri») sono i funtori forti $\varphi : Q \to Q'$ che fanno *commutare* i diagrammi (a).

Gli automi considerati da ora in poi si intendono completi.

OSSERVAZIONE 1.2.

Esistono quindi morfismi «propri» solo tra X-automi con lo stesso comportamento.

2 - Abbiamo sinora descritto la categoria X-Aut degli automi con input da un singolo monoide. Vogliamo ora generalizzare le nostre definizioni per poter descrivere adeguatamente i «morfismi» tra automi con comportamenti diversi e che accettano input da monoidi differenti, purché collegati da opportune «codificazioni». Definiremo così la categoria **C** dei comportamenti e la categoria **Aut** degli automi.

DEFINIZIONE 2.1.

Sia G un morfismo suriettivo di monoidi, $G : X \to Y$. La «codificazione» g è il funtore monoidale chiuso $g : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ che si ottiene prendendo l'immagine dretta di G.

OSSERVAZIONE 2.1.

Per definizione di funtore monoidale deve essere

$$g\,(L \otimes M) \subseteq g\,(L) \otimes g\,(M).$$

Si osservi che per la nostra definizione vale in particolare l'uguaglianza.

Definiamo dunque la categoria **C** dei comportamenti. Siano $X, Y, Z \ldots$ monoidi liberi e sia **M** la categoria i cui oggetti sono le categorie monoidali bichiuse $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \ldots$, mentre i morfismi sono codificazioni. Si ha la seguente

DEFINIZIONE 2.2.

$\mathbf{C} = \boldsymbol{1}/\mathbf{M}$, dove $\boldsymbol{1}$ è la categoria monoidale con un solo oggetto.

OSSERVAZIONE 2.2.

Gli oggetti di **C** sono coppie del tipo $(A, \tilde{X})$, con $A \subset \tilde{X}$. Le frecce $f : (A, \tilde{X}) \to (B, \tilde{Y})$ sono codificazioni per le quali vale $fA = B$. I morfismi identici di **C** sono indotti in particolare dagli endofuntori chiusi identici.

Ci proponiamo ora di definire la categoria **Aut** degli automi completi e di mostrare che essa è una op-fibrazione su **C**.

OSSERVAZIONE 2.3.

Siano $A \subset X$, $B \subset Y$, $C \subset Z$. Si verifica subito che ad ogni «comportamento» di **C** si può associare la categoria degli automi che lo realizzano. Per esempio, ad A risulterà associata la categoria $\mathbf{Aut}_A$, che è una sottocategoria piena di X-Aut.

Ricordiamo che ogni funtore chiuso $f : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ induce un funtore $\bar{f} : \tilde{X}\text{-Cat} \to \tilde{Y}\text{-Cat}$ ([6], p. 443). Mostriamo che tale funtore agisce non solo sulle $\tilde{X}$-categorie e sugli $\tilde{X}$-funtori, ma anche sugli $\tilde{X}$-bimoduli, in particolare sui «comportamenti». Vale infatti:

LEMMA

$\bar{f}I \cdot \bar{f}T = f(I \cdot T)$

Infatti, ricordando che f come funtore monoidale è l'immagine diretta di un morfismo di monoidi e che inoltre come aggiunto sinistro all'immagine inversa preserva i colimiti, si ha:

$$\bar{f}I \cdot \bar{f}T = \sum_q \bar{f}I(q) \otimes \bar{f}T(q) = \sum_q f(I(q)) \otimes f(T(q)) =$$
$$= \sum_q f(I(q) \otimes T(q)) = f \sum_q I(q) \otimes T(q) = f(I \cdot T). \quad \blacksquare$$

OSSERVAZIONE 2.4.

Ad ogni freccia $f : A \to B$ in $\mathbf{C}$ corrisponde dunque un funtore $\bar{f} : \mathbf{Aut}_A \to \mathbf{Aut}_B$, che agisce così sugli oggetti:

$$\mathbf{Q} = (Q, I, T) \mapsto \bar{f}\mathbf{Q} = (\bar{f}Q, \bar{f}I, \bar{f}T)$$

Possiamo ora definire la categoria degli automi **Aut**, che ha gli oggetti ed i morfismi definiti rispettivamente dalle (i) e (ii):

(i) $\quad \text{ob } \mathbf{Aut} = \bigsqcup_{A \in \mathbf{C}} \text{ob } \mathbf{Aut}_A$

Per $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{Aut}_A$ e $\mathbf{Q}'$ in $\mathbf{Aut}_B$, si ha:

(ii) $\quad \mathbf{Aut}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}') = \{\langle f, \varphi \rangle \mid f : A \to B \text{ in } \mathbf{C} \text{ e } \varphi : \bar{f}\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}' \text{ in } \mathbf{Aut}_B\}$

Se $g : B \to C$ e $\langle g, \gamma \rangle : \mathbf{Q}' \to \mathbf{Q}''$, la composizione è data infine da:

(iii) $\quad \langle f, \varphi \rangle \cdot \langle g, \gamma \rangle = \langle fg, \bar{g}(\varphi) \cdot \gamma \rangle$.

DEFINIZIONE 2.3.

Il «funtore comportamento» $\beta : \mathbf{Aut} \to \mathbf{C}$ è la «proiezione» che assegna ad ogni automa il suo comportamento e che dimentica la seconda componente di ogni morfismo d'automa.

Quanto detto si compendia nella seguente:

PROPOSIZIONE

Il funtore comportamento β è dotato di uno «split-opcleavage» canonico ed è pertanto una op-fibrazione.

Ciò segue subito dalle definizioni di fibrazione e cleavage ([8]). Infatti, le fibre $\beta^{-1}(A)$ sono proprio le categorie $\mathbf{Aut}_A$. Per le osservazioni 2.3., 2.4., β inoltre ha lo «opcleavage» canonico che ad ogni f associa appunto $\bar{f}$. Tale opcleavage è «split» perché, come si verifica immediatamente, per ogni coppia $f : A \to B$, $g : B \to C$ di morfismi di $\mathbf{C}$, vale $\bar{f} \cdot \bar{g} = \overline{fg}$. $\blacksquare$

3 - Una classica costruzione di teoria degli automi (vedi ad es. [5]) associa ad ogni comportamento A un automa «minimo» i cui stati sono dati dalle classi di congruenza destra di Dubreil-Nerode rispetto ad A (ricordiamo che, se si indica con x_A la classe cui appartiene x, essa è definita da: $y \in x_A$ sse $y^{-1} A = x^{-1} A$). Mostrere-

mo che, nella nostra descrizione, tale automa è dato dalla terna:

$$\mathbf{X}_A = (X_A, k^*_A, \tau_A)$$

dove X_A è la $\mathfrak{X}$-sottocategoria piena di $\mathfrak{X}$ che ha appunto per oggetti le classi di Dubreil-Nerode di X rispetto ad A, k^*_A è la restrizione ad X_A del bimodulo $k^* : \mathfrak{X} \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\mapsto \underline{1}$, che proviene dallo $\mathfrak{X}$-funtore $k : \underline{1} \to \mathfrak{X}$ e che, in $L \subset X$, vale:

$$k^*(L) = \mathfrak{X}(k, L) = L$$

Infine, il bimodulo $\tau_A : \underline{1} \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\mapsto X_A$ è assegnato, per ogni oggetto x_A di X_A, da:

$$\tau_A(x_A) = \sum_{a_A \in A} \mathfrak{X}(x_A, a_A)$$

che si verifica subito essere uguale a $\mathfrak{X}(x_A, A)$.

Si ha così:

PROPOSIZIONE 3.1.

$\mathbf{X}_A$ *è nella fibra* $\mathbf{Aut}_A$, *cioè* $\beta\,\mathbf{X}_A = A$. ■

Mostriamo ora che l'assegnazione $A \mapsto \mathbf{X}_A$ si estende a un funtore $\rho : \mathbf{C} \to \mathbf{Aut}$, che definiremo «realizzazione minimale».

Sia $f : A \to B$ in $\mathbf{C}$. Abbiamo la seguente:

DEFINIZIONE 3.1.

$$\rho(f) = \langle f, \hat{f} \rangle : \mathbf{X}_A \to \mathbf{Y}_B$$

con $\mathbf{Y}_B = (Y_B, \bar{k}^*_B, \tau_B)$, dove $\bar{k}$ è l'identità del tensore in $\mathfrak{Y}$, mentre $\hat{f}$ è lo $\mathfrak{Y}$-funtore $\hat{f} : \bar{f}\,\mathbf{X}_A \to \mathbf{Y}_B$ (dove $\bar{f}\,\mathbf{X}_A = (\bar{f}X_A, \bar{f}k^*_A, \bar{f}\tau_A)$) dato da:

(I) $\quad \hat{f}(x_A) = f(x_A)$

e, per ogni coppia x_A, x'_A in $\mathbf{X}_A$:

(II) $\quad \hat{f}_{x_A, x'_A} : \bar{f}\,\mathbf{X}_A(x_A, x'_A) \hookrightarrow \mathbf{Y}_B(f(x_A), f(x'_A))$

OSSERVAZIONE 3.1.

Ricordiamo che, mentre gli oggetti di $\bar{f}X_A$ sono A-classi, per i morfismi si ha ([6] p. 449):

$$\bar{f}X_A(x_A, x'_A) = f(\mathfrak{X}(x_A, x'_A))$$

che è un oggetto di $\mathfrak{Y}$ e la (II) si può quindi scrivere:

(III) $f(\hat{\mathcal{X}}(x_A, x'_A)) \hookrightarrow \hat{\mathcal{Y}}(f(x_A), f(x'_A))$

che vale perché f è un funtore chiuso.

Si osservi ancora che f, come funzione, rispetta le classi di congruenza, che $\beta(\bar{f}\,\mathbf{X}_A) = B$ e quindi $\bar{f}$ è non solo un $\hat{\mathcal{Y}}$-funtore, ma proprio un morfismo di $\mathbf{Aut}_B$. Possiamo dunque concludere dicendo che ρ è un funtore $\rho : \mathbf{C} \to \mathbf{Aut}$ che ad ogni comportamento A associa un automa in $\mathbf{Aut}_A$.

Vale inoltre la:

PROPOSIZIONE 3.2.

$\bar{f}\,\mathbf{X}_A \cong \mathbf{Y}_B$

Abbiamo la (III) e quindi basta verificare l'inclusione:

$$\hat{\mathcal{Y}}(f(x_A), f(x'_A)) \subset f(\hat{\mathcal{X}}(x_A, x'_A))$$

che vale perché f conserva le classi di congruenza. ■

Il noto teorema di Goguen ([7]), che risolve il «problema della realizzazione minimale» (il più forte nella gerarchia della Trnková ([10]) dei problemi di minimalità), ammette una formulazione nei termini del presente approccio categoriale agli automi che tiene conto del fatto che gli oggetti sono a loro volta categorie arricchite, i morfismi funtori forti e il comportamento una op-fibrazione.

TEOREMA

Il funtore «realizzazione minimale» $\rho : \mathbf{C} \to \mathbf{Aut}$ *è aggiunto destro inverso destro alla op-fibrazione «comportamento»* $\beta : \mathbf{Aut} \to \mathbf{C}$.

Dobbiamo mostrare che, assegnato arbitrariamente $\mathbf{Q}$ nella fibra $\mathbf{Aut}_A$, vale $\mathbf{Aut}(\mathbf{Q}, \rho B) \cong \mathbf{C}(\beta\mathbf{Q}, B)$. Si ha cioè:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Aut} & & \mathbf{C} \\
\mathbf{Q} \arrow[r, "\eta = \langle id, \bar{\eta}\rangle"] \arrow[dr, "\langle f, \varphi\rangle"'] & \rho\beta\mathbf{Q} \arrow[d, "\rho f = \langle f, \hat{f}\rangle"] & & A = \beta\mathbf{Q} \arrow[d, "f"] \\
 & \rho B & & B
\end{tikzcd}$$

l'unità dell'aggiunzione è un morfismo $\eta = \langle id, \bar{\eta}\rangle : \mathbf{Q} \to \rho\beta\mathbf{Q}$, dove *id* è l'endofuntore chiuso identico di $\mathcal{X}$ e $\bar{\eta}$ è un morfismo di $\mathbf{Aut}_A$, precisamente lo $\mathcal{X}$-funtore definito sugli oggetti da $\bar\eta(q) = I(q)_A$, dove q è un oggetto di Q e con $I(q)_A$ si intende la A-classe di Dubreil che contiene $I(q)$.

Basta allora verificare la commutatività in $\mathbf{Aut}_B$ del seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} \bar f Q \arrow[r, "\bar f \bar\eta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \bar f X_A = \rho\beta Q \arrow[d, "\hat f"] \\ & Y_B = \rho B \end{tikzcd}$$

Ora, $\hat f(\bar f\bar\eta(q)) = f(I(q)_A) = [f.I(q)]_B$. Anche $\varphi(q)$ è una B-classe. Inoltre, se i è l'unico stato iniziale di $\mathbf{Q}$, $I(q) = Q(i,q)$ e deve valere:

$[f.I(q)]_B = f(Q(i,q)) \subset \mathbf{Y}_B(\varphi(i), \varphi(q)) = \hat{Y}(\bar k, \varphi(q)) = \varphi(q)$
Sarà quindi $\hat f(\bar f\bar\eta(q)) = \varphi(q)$.

Counità dell'aggiunzione è l'identità. Vale infatti $\beta(\rho A) = A$. Ne segue che ρ è aggiunto destro inverso destro di β. ■

Il seguente corollario del teorema è di fatto ad esso equivalente, per un classico risultato di teoria delle fibrazioni (vedi ad es. [8], 4.4).

COROLLARIO

Le realizzazioni minimali $\mathbf{X}_A, \mathbf{Y}_B, \ldots$ *sono oggetti terminali delle fibre* $\mathbf{Aut}_A$, $\mathbf{Aut}_B, \ldots$ *che sono preservati dai funtori* $\bar f$, $\bar g, \ldots$ *dell'op-cleavage canonico.* ■

OSSERVAZIONE 3.2.

Gli oggetti terminali sono di fatto preservati a meno degli isomorfismi descritti nella proposizione 3.2.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. BETTI, *Automi e categorie chiuse.* Boll. U.M.I., (5), 17-B (1980) p. 44-58.

[2] R. BETTI, *Una teoria categoriale degli automi.* Quaderno n. 35/S dell'Istituto Matematico «F. Enriques», Milano, 1979.

[3] R. BETTI, S. KASANGIAN, *A quasi-universal realization of automata.* In corso di stampa su Rend. Ist. Mat. Univ. di Trieste.

[4] F. BORCEUX, G. M. KELLY, *A notion of limit for enriched categories.* Bull. of the Australian Math. Society, (1) 1975, p. 49-72.

[5] S. EILENBERG, *Automata, Languages and Semigroups.* Vol. A, Academic Press, 1974.

[6] S. EILENBERG, G. M. KELLY, *Closed Categories.* Proc. of La Jolla conf. on Categorical Algebra, Springer, 1966, p. 421-566.

[7] J. A. GOGUEN, *Realization is universal.* Math. System Theory, 6 (1973) n. 4, p. 359-374.

[8] J. W. GRAY, *Fibred and Cofibred Categories.* Proc. of La Jolla, conf. on Categorical Algebra, Springer, 1966, p. 21-83.

[9] F. W. LAWVERE, *Metric Spaces, Generalized Logic and Closed Categories.* Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano, vol. 43, 1973, p. 135-166.

[10] V. TRNKOVÁ, *Automata and Categories.* Lec. Notes in Comp. Science, n. 32, Springer, 1975, p. 138-152.

[11] V. TRNKOVÁ, *Relational Automata in a Category and their Languages.* Lec. Notes in Comp. Science, n. 56, Springer, 1977, p. 340-355.