ANALISI NON-STANDARD E TOPOS (*)

di AURELIO CARBONI (a Milano) (**)

SOMMARIO. - *Si dà una nuova dimostrazione del teorema di Kock e Mikkelsen sulla fattorizzazione di un morfismo non-standard di topos $F:E \to E^0$ nell'ipotesi molto generale che F sia un funtore soltanto esatto a sinistra.*

SUMMARY. - *We give a new proof of the Kock-Mikkelsen factorization theorem of a non-standard morphism $F:E \to E^0$ of topoi, in the very weak hypothesis that F is a left exact functor.*

Introduzione

A. Kock e C. J. Mikkelsen [*K-M*] hanno messo in evidenza che, se consideriamo un funtore $E \xrightarrow{F} E^0$ tra due topos E ed E^0 come una costruzione tra due superstrutture (si veda la nozione di «monomorfismo di Robinson e Zakon [*R-Z*]), allora i principi base dell'analisi non-standard possono essere enunciati come l'esistenza di una fattorizzazione

$$E \xrightarrow{F} E^0 \cong E \xrightarrow{F^*} E^* \xrightarrow{F^0} E^0$$

tale che:

1) F^* è logico;

2) F^0 conserva gli elementi, cioè $F^0(1) = 1$ e la freccia canonica

(*) Pervenuto in Redazione il 26 marzo 1980. Lavoro eseguito nell'ambito dei contratti di ricerca del C.N.R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Università degli Studi di Milano, Istituto di Matematica, via Saldini 50, 20133 Milano.

$E^*(1, \alpha^*) \longrightarrow E^0(1, F^0(\alpha^*))$ indotta da F^0 è un isomorfismo, per ogni α^* di E^*;

3) ogni oggetto di E^* è un sotto-oggetto di $F^*(\alpha)$, per un oggetto α di E; (questa proprietà non è esplicitamente richiesta in [K-M], ma è posseduta dalla fattorizzazione ivi costruita; d'altra parte, se vogliamo che il topos E^* sia il topos delle «entità F-interne», questa condizione deve essere richiesta);

4) F^0 conserva quelle proprietà logiche conservate da F.

In [K-M], gli autori fanno la congettura che il teorema di fattorizzazione possa essere provato nella ipotesi più generale che F sia un funtore esatto a sinistra, invece di quella che F conservi la logica del primo ordine, congettura che dimostreremo vera in questo lavoro.

Per rendere più chiara la nostra costruzione, osserviamo che il topos E^* è determinato dalle proprietà 1), 2) e 3) come il topos delle «funzioni F-interne tra le entità F-interne»; infatti, sia $\alpha^* \rightarrowtail F^*(\alpha)$ un oggetto di E^* con la immersione data da 3); poiché E^* è un topos, ad α^* corrisponde un unico elemento $1 \xrightarrow{\ulcorner\alpha^*\urcorner} P^* F^*(\alpha)$, cosicché al variare di α in $|E|$, gli elementi $1 \to P^* F^*(\alpha)$ sono una parametrizzazione degli oggetti di E^*; ma per le proprietà 1) e 2), questi elementi *corrispondono bijettivamente agli elementi* $1 \to F(P\alpha)$ *in* E^0; inoltre, se F è un funtore che conserva i prodotti finiti (cartesiano), allora esiste una freccia canonica $F(P\alpha) \xrightarrow{F_\alpha} P^0 F(\alpha)$ (definita come la trasposta esponenziale della freccia

$$F(P\alpha) \times F(\alpha) \xrightarrow{F(val_\alpha)} F(\Omega) \xrightarrow{\gamma} \Omega^0,$$

dove γ è la freccia caratteristica di $F(1) = 1 \xrightarrow{F(v)} F(\Omega)$ e perciò gli elementi $1 \to F(P\alpha)$ sono una parametrizzazione (in generale non iniettiva) delle entità F-interne nel senso usuale dell'analisi non-standard. Nello stesso modo, si può vedere che le frecce tra due oggetti $\alpha^* \rightarrowtail F^*(\alpha)$ e $\beta^* \rightarrowtail F^*(\beta)$ di E^* sono parametrizzate dagli elementi $1 \to P^* F^*(\alpha \times \beta)$ che nella logica di E^* sono «relazioni funzionali di supporto $\ulcorner\alpha^*\urcorner$ e la cui immagine è contenuta in $\ulcorner\beta^*\urcorner$», cosicché questi elementi corrisponderanno ad una classe definita di elementi $1 \to F(P(\alpha \times \beta))$; perciò, poiché la logica di E^* è, per 1) e 3), la immagine in F^* di quella di E, queste osservazioni suggeriscono come definire gli oggetti e le frecce di E^*, così come la sua logica ed il funtore F^*: gli oggetti di E^* sono gli elementi $1 \xrightarrow{A} F(P\alpha)$ e le $\langle\alpha, A\rangle \xrightarrow{R} \langle\beta, B\rangle$ sono gli elementi $1 \xrightarrow{R} F(P(\alpha \times \beta))$ tali che per mezzo dell'immagine in F della logica di E, cioè per mezzo delle frecce

$$\begin{tikzcd} F(P\alpha) \arrow[r, shift left=3, "F(\exists_p)"] \arrow[r, shift right=3, "F(\forall)"'] & F(P\beta) \arrow[l, "F\Omega^p"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(P\alpha \times P\alpha) \arrow[r, shift left=3, "F(\wedge)"] \arrow[r, "F(\vee)"] \arrow[r, shift right=3, "F(\rightarrow)"'] & F(P\alpha) \end{tikzcd}$$

ecc., sono «funzioni da $\langle \alpha, A\rangle$ a $\langle \beta, B\rangle$». Il fatto che in tal modo si ottiene un topos solo richiedendo la cartesianità di F è dovuto essenzialmente ai fatti seguenti:

a) le regole cui soddisfano gli operatori logici sono equazionali, cioè possono essere espresse da diagrammi commutativi;

b) la costruzione del topos generato dai «concetti definibili» in una opportuna teoria di ordine superiore è anche essa una costruzione equazionale.

Un'ultima osservazione: la categoria E^0 non è mai stata usata come topos nelle precedenti argomentazioni, eccetto per definire la freccia $F(P\alpha) \xrightarrow{F_\alpha} P^0 F(\alpha)$ questo suggerisce la possibilità di dimostrare il teorema di fattorizzazione in ipotesi più generali sulla categoria E^0; dimostreremo infatti i seguenti due teoremi:

TEOREMA A. *Se E^0 è una categoria cartesiana ed F un funtore cartesiano, allora esiste il topos E^* delle «entità e funzioni F-interne» ed esiste un funtore logico $E \xrightarrow{F^*} E^*$ con la proprietà* 3).

TEOREMA B. *Se E^0 è una categoria esatta a sinistra (risp. categoria regolare, categoria di Heyting, topos) e se F è un funtore esatto a sinistra (risp. esatto a sinistra e che conserva le immagini, di Heyting, logico), allora esiste il funtore F^0 con le proprietà* 2) *e* 4).

1. - Dottrine

Una *dottrina* $\mathbf{D} = \langle T, \mathbf{A}\rangle$ è un particolare tipo di «iperdottrina» [*L, 1*] costituita da una categoria cartesiana T dei «tipi e termini» e da un funtore $\mathbf{A} : T^{op} \to Ord$ che ad ogni tipo α fa corrispondere un insieme ordinato $\mathbf{A}(\alpha)$ e ad ogni termine $\alpha \xrightarrow{t} \beta$ una applicazione che conserva l'ordine $\mathbf{A}(\beta) \xrightarrow{t\cdot} \mathbf{A}(\alpha)$ detta «sostituzione lungo t»; si richiede inoltre che le categorie $\mathbf{A}(\alpha)$ siano cartesiane, cioè che siano $\wedge$-semireticoli con elemento massimo M_α.

Una *dottrina esistenziale* (d.e.) è una dottrina $\mathbf{D}$ tale che per ogni attribuzione $R \in \mathbf{A}(\alpha)$ ed ogni termine $\alpha \xrightarrow{t} \beta$ esista la «immagine diretta $\exists_t(R)$ di R lungo t»; ciò equivale a richiedere che per ogni termine t esista un funtore $\mathbf{A}(\alpha) \xrightarrow{\exists_t(\ )} \mathbf{A}(\beta)$ aggiunto sinistro al funtore $t.$; le proprietà delle aggiunzioni ed il fatto che le categorie $\mathbf{A}(\alpha)$ sono insiemi ordinati implicano che la corrispondenza $t. \to \exists_t(\ )$ si estende ad un funtore $T \to Ord$ e che i funtori $t.$ sono morfismi di $\wedge$-M-semireticoli. Si osservi che gli assiomi di d.e. sono equazionali sulle categorie, così come i seguenti:

(F) $\exists_t(t.R \wedge S) = R \wedge \exists_t(S),$

che esprime la «legge di reciprocità di Frobenius» e

$B_1)$ $\exists_{<\alpha, t>} (t\,.\,R) = t \times \beta\,.\,\exists_{\delta_\beta}(R)$

$B_2)$ $\exists_{\alpha_1 \times t_2} (t_1 \times \alpha_2\,.\,R) = t_1 \times \beta_2\,.\,\exists_{\beta_1 \times t_2}(R)$

che sono istanze delle condizioni di «Beck-Chevallery» che collegano la struttura cartesiana di T con quella degli attributi. Nelle ultime due equazioni abbiamo indicato con δ_α la diagonale $\alpha \to \alpha \times \alpha$ e con t_i, $i = 1, 2$, due termini $\alpha_i \xrightarrow{t_i} \beta_i$. Come è stato osservato da Lawvere in [L, 2], la condizione (F) permette di dimostrare che l'attributo $\exists_{\delta_\alpha}(M_\alpha)$ ha le proprietà usuali dell'uguaglianza.

La struttura di una d.e. permette di eseguire in questo contesto generale molte delle costruzioni eseguibili nella dottrina degli insiemi e per di più in modo puramente equazionale. Perciò, utilizzando informalmente l'intuizione insiemistica, si possono eseguire in una d.e. le costruzioni usuali, con la sola differenza che gli operatori proposizionali, come la congiunzione, possono essere applicati solo agli attributi aventi gli stessi tipi «liberi», come è spiegato in [L, 3]. L'esempio principale è quello delle relazioni. se consideriamo un attributo $R \in \mathbf{A}(\alpha \times \beta)$ come una relazione, siamo in grado di dimostrare tutte le proprietà usuali vere per le relazioni tra insiemi, solo per mezzo di quella parte della logica degli insiemi che utilizza i prodotti finiti, le intersezioni e le immagini dirette e inverse. Così, imitando la definizione della composizione di due relazioni tra insiemi, possiamo definire la composizione di due «relazioni» $R \in \mathbf{A}(\alpha \times \beta)$ e $S \in \mathbf{A}(\beta \times \gamma)$ in una d.e. come $\exists \Pi^{\alpha\beta\gamma}_{\alpha\gamma}(\Pi^{\alpha\beta\gamma}_{\alpha\beta}\,.\,R \wedge \Pi^{\alpha\beta\gamma}_{\beta\gamma}\,.\,S)$, dove i Π sono le appropriate proiezioni; definendo inoltre la relazione identità $\underset{\alpha}{\Theta} \in \mathbf{A}\,(\alpha \times \alpha)$ come $\exists_{\delta_\alpha}(M_\alpha)$, possiamo dimostrare che esse formano una categoria Rel (**D**), utilizzando solamente le equazioni in una d.e.

Poiché la nozione di d.e. riassume in forma algebrica quella parte della logica degli insiemi che permette di dimostrare che essi costituiscono una *«categoria regolare»*, quest'ultima è la più generale nozione semantica appropriata per la nozione di d.e. Infatti, una tale categoria, cioè una categoria esatta a sinistra e con immagini stabili per prodotti fibrati, ha tutte le proprietà di esattezza che permettono di interpretare una d.e. $[L, 4]$: se $\mathbf{D} = \langle T, \mathbf{A} \rangle$ è una d.e., una *R-realizzazione di* **D**, dove R è una categoria regolare, è una funzione F che ad ogni tipo α assegna un «insieme» $F(\alpha)$ di R e ad ogni termine $\alpha \xrightarrow{t} \beta$ di T assegna una «funzione» $R(\alpha) \xrightarrow{F(t)} F(\beta)$ di R in modo che siano conservate le equazioni vere tra i termini, ciò che significa che F è un funtore cartesiano; inoltre, una R-realizzazione di **D** deve associare ad ogni attributo $R \in \mathbf{A}(\alpha)$ un «sottoinsieme» $F_\alpha(R)$ di $F(\alpha)$, in modo tale che le realizzazioni degli attributi $R \wedge S$, t.R e $\exists_t(R)$ siano rispettivamente l'intersezione di sotto-oggetti in R e le immagini inverse e dirette. Il fatto che le categorie regolari siano gli universi adeguati per la realizzazione delle d.e., significa che le regole logiche delle d.e. sono vere in tali categorie, cioè che le corrispondenze $\alpha \mapsto Sub_R(\alpha)$, $f \mapsto f^{-1}$ e $f \mapsto \mathrm{Im}(-f)$ costituiscono una d.e. $\mathbf{D}_R = \langle R, \mathrm{Sub}(-) \rangle$. Perciò, più in generale, se si definisce una *interpretazione* $\mathbf{D} \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathbf{D}'$ di d.e. come una coppia $\mathbf{F} = \langle F, \{F_\alpha\}_{\alpha \in T} \rangle$ data da un funtore cartesiano $T \xrightarrow{F} T'$ e da una famiglia di applicazioni $\mathbf{A}(\alpha) \xrightarrow{F\alpha} \mathbf{A}'(F(\alpha))$ che conservano la struttura, la nozione di realizzazione di una d.e. **D** in una categoria regolare R equivale a quella interpretazione di **D** nella d.e. $\mathbf{D}_R$ degli «insiemi» di R. Dunque, un teorema di «realizzazione» per una d.e. **D** è un teorema che asserisce l'esistenza di una interpretazione «canonica» $\mathbf{D} \to \mathbf{D}_R$ nella d.e. degli insiemi di una categoria regolare R. Se si considerano anche i morfismi di categorie regolari, cioè i funtori $R \xrightarrow{F} R^0$ esatti a sinistra e che conservano le immagini, allora la costruziione della dottrina degli insiemi $\mathbf{D}_R$ di una categora regolare R si estende anche a tali morfismi e definisce così un funtore

$$\mathfrak{R} \xrightarrow{Dtr(\ )} \mathfrak{D},$$

dove $\mathfrak{R}$ è la (2–) categoria delle categorie regolari i cui morfismi sono quelli ora descritti e $\mathfrak{D}$ è quella delle d.e. Ora, il teorema di «realizzazione» per le d.e. può essere enunciato nel modo seguente:

TEOREMA 1. *Il funtore $Dtr(\ )$ ha un aggiunto sinistro* Cat( ) *e $\mathfrak{R}$ è una sottocategoria piena riflessiva di $\mathfrak{D}$.*

Dimostrazione. L'idea principale consiste nel costruire la categoria Cat $(\mathbf{D}) = R_{\mathbf{D}}$ dal materiale «sintattico» di $\mathbf{D}$ nel modo seguente: gli oggetti sono le coppie $\langle \alpha, A \rangle$, dove α è un tipo di T e A è un tipo «definibile» sopra α, cioè un elemento di $\mathbf{A}(\alpha)$; le frecce $\langle \alpha, A \rangle \xrightarrow{R} \langle \beta, B \rangle$ sono le relazioni definibili $R \in \mathbf{A}(\alpha \times \beta)$ che sono «funzioni parziali»:

$$\Pi^{\alpha\beta\beta}_{\alpha\beta} . R \wedge \Pi^{\alpha\beta\beta}_{\alpha\beta} . R \leqslant \Pi^{\alpha\beta\beta}_{\beta\beta} . \Theta_{\beta},$$

il cui supporto è $\langle \alpha, A \rangle$:

$$\exists_{\Pi^{\alpha\beta}_{\alpha}} (R) = A$$

e la cui immagine è contenuta in $\langle \beta, B \rangle$:

$$R \leqslant \Pi^{\alpha\beta}_{\beta} . B.$$

La dimostrazione che in tal modo si ottiene una categoria regolare è laboriosa ma non presenta difficoltà: basta usare in modo informale l'intuzione sugli insiemi per trovare la dimostrazione o la definizione di ciò che si desidera e quindi usare le proprietà delle d.e. per ottenere una dimostrazione formale in modo puramente equazionale. D'altra parte una dimostrazione dettagliata si può trovare in [*C*]. Ci limitiamo perciò a ricordare i punti principali che saranno utili nel seguito. Dopo aver dimostrato che le frecce $\langle \alpha, A \rangle \xrightarrow{R} \langle \beta, B \rangle$ costituiscono una categoria $R_{\mathbf{D}}$ la cui composizione è la composizione di relazioni e le cui identità $\langle \alpha, A \rangle \xrightarrow{I} \langle \alpha, A \rangle$ sono le «restrizioni» ad A dell'uguaglianza di α, cioè $I = \exists_{\delta_\alpha}(A)$, si può dimostrare che la corrispondenza che ad ogni termine $t \in T$ assegna il grafo $\Gamma(t) = \exists_{<\alpha, t>}(M_\alpha)$ definisce un funtore $T \xrightarrow{\Gamma} R_{\mathbf{D}}$. I limiti finiti in $R_{\mathbf{D}}$ possono essere descritti nel modo seguente: sia λ l'attributo $M_1 \in \mathbf{A}(1)$, dove 1 è l'oggetto terminale di T; $\langle 1, \lambda \rangle$ è l'oggetto terminale di $R_{\mathbf{D}}$, poiché l'unico morfismo $\langle \alpha, A \rangle \to \langle 1, \lambda \rangle$ in $R_{\mathbf{D}}$ è la «restrizione» ad A del grafo dell'unica freccia $\alpha \xrightarrow{t_\alpha} 1$ in T, cioè $\Pi^{\alpha\alpha 1}_{\alpha} \cdot A \wedge \Gamma(t_\alpha) = \exists_{<\alpha, t>}(A)$. Se $\langle \alpha, A \rangle \xrightarrow{R} \langle \gamma, C \rangle$ e $\langle \beta, B \rangle \xrightarrow{S} \langle \gamma, C \rangle$ sono due frecce di R con lo stesso codominio, il loro prodotto fibrato può essere definito come
$\langle \alpha \times \beta, \exists_{\Pi^{\alpha\beta\gamma}_{\alpha\beta}} (\Pi^{\alpha\beta\gamma}_{\alpha\gamma} . R \wedge \Pi^{\alpha\beta\gamma}_{\beta\gamma} . S) \rangle$ con proiezioni date dalle restrizioni dei grafi delle proiezioni $\Pi^{\alpha\beta}_{\alpha}$ e $\Pi^{\alpha\beta}_{\beta}$ In particolare, il prodotto

$\langle \alpha, A \rangle \times \langle \beta, B \rangle$ in $R_{\mathbf{D}}$ è dato da $\langle \alpha \times \beta, \Pi^{\alpha\beta}_{\alpha} . A \wedge \Pi^{\alpha\beta}_{\beta} . B \rangle$ e l'equalizzatore da $\langle \alpha, \exists \Pi^{\alpha\beta}_{\alpha} \, (R \wedge S) \rangle$.

E' ora possibile caratterizzare i monomorfismi $\langle \alpha, A \rangle \xrightarrow{R} \langle \beta, B \rangle$ in $R_{\mathbf{D}}$ come quei morfismi R tali che $\overset{1}{\Pi}{}^{\alpha\alpha\beta}_{\alpha\beta} . R \wedge \overset{2}{\Pi}{}^{\alpha\alpha\beta}_{\alpha\beta} . R \leqslant \Pi^{\alpha\alpha\beta}_{\alpha\alpha} . \Theta_{\alpha}$ e, usando questa caratterizzazione, dimostrare che si ha una scelta canonica dei sotto-oggetti, precisamente $\mathrm{Sub}_{R_{\mathbf{D}}} (\langle \beta, B \rangle) = \{ B' \leqslant B \}$. Infine, la fattorizzazione di un morfismo $\langle \alpha, A \rangle \xrightarrow{R} \langle \beta, B \rangle$ attraverso l'immagine è data da $\langle \alpha, A \rangle \xrightarrow{R} \langle \beta, \mathrm{Im}(R) \rangle \, \langle \beta, B \rangle$, dove $\mathrm{Im}(R)$ è definito come $\exists_{\Pi^{\alpha\beta}_{\beta}} (R)$ ed il secondo morfismo come $\exists_{\delta_\beta} (\mathrm{Im}(R))$.

Poiché il funtore $T \to R_{\mathbf{D}}$ è chiaramente cartesiano, Γ in coppia con l'identità $\mathbf{A}(\alpha) \to \mathrm{Sub}_{R_{\mathbf{D}}} (\alpha) \cong \mathbf{A}(\alpha)$ definisce una interpretazione «canonica» $\mathbf{D} \to Dtr(R_{\mathbf{D}})$.

Per ottenere l'aggiunzione voluta, dobbiamo mostrare l'esistenza di un funtore esatto a sinistra e che conserva le immagini Cat $(Dtr(R)) \to R$, per ogni categoria regolare R. La sua definizione è subito vista: poiché, se $R \rightarrowtail \alpha \times \beta$ è un sotto-oggetto di $\alpha \times \beta$ in una categoria esatta a sinistra R, allora R è un morfismo parziale, cioè $R \, \Pi^{\alpha\beta}_{\alpha}$ è mono, se e solo se R è un morfismo parziale nella dottrina $Dtr(R)$, è facile vedere che la categoria Cat $(Dtr(R))$ ha come oggetti i sotto-oggetti $\alpha' \xrightarrow{A} \alpha$ e come frecce $\langle \alpha' \xrightarrow{A} \alpha, R, \beta' \xrightarrow{B} \beta \rangle$ le frecce $\alpha' \xrightarrow{R} \beta'$ di R; è perciò evidente quale deve essere il funtore Cat $(Dtr(R)) \to R$, così come il fatto che il funtore «grafo» $R \xrightarrow{\Gamma}$ Cat $(Dtr(R))$ è un suo quasi inverso.

2. - Il topos delle entità F-interne

E' possibile arricchire la nozione di d.e. tenendo conto anche degli altri operatori logici. Così, per esempio, si può definire una *dottrina del primo ordine* (d.p.o.) come una d.e. $\mathbf{D} = \langle T, \mathbf{A} \rangle$ tale che:

1) ogni $\mathbf{A}(\alpha)$ è un'algebra di Heyting;

2) per ogni termine $\alpha \xrightarrow{t} \beta$ di T esiste un funtore $\mathbf{A}(\alpha) \xrightarrow{\forall t} \mathbf{A}(\beta)$, «quantificazione universale lungo t», aggiunto destro alla sostituzione $t.$, che soddisfa le condizioni di Beck-Chevalley $B_1)$ e $B_2)$.

Tra le conseguenze degli ossiomi di d.p.o., citiamo le seguenti: la corrispondenza $t \mapsto \forall_t$ definisce un funtore $T \xrightarrow{\forall} Ord$; la sostituzione $t.$ conserva $\rightarrow$, cioè $t. R \rightarrow S = t. S$, ciò che in realtà è equivalente alla legge di reciprocità di Frobenius.

Infine, una *dottrina di ordine superiore* (d.o.s.) è una d.p.o. munita di una operazione $\alpha \mapsto P\alpha$ sugli oggetti di T e, per ogni oggetto α, di un «attributo di appartenenza» $\ni_\alpha \in \mathbf{A}(P\alpha \times \alpha)$, che soddisfi le seguenti due equazioni:

$$C)\quad M_\alpha = \exists_{\Pi_{\alpha}^{\alpha P\beta}} (\forall_{\Pi_{\alpha P\beta}^{\alpha P\beta\beta}} (\Pi_{\alpha P\beta}^{\alpha P\beta\beta} . R \longleftrightarrow \Pi_{P\beta\beta}^{\alpha P\beta\beta} . \ni_\beta))$$

(«schema di comprensione»)

$$E)\quad \forall_{\Pi_{P_\beta P_\beta}^{P_{\beta\beta}\beta}} (\overset{1}{\Pi}{}_{P_{\beta\beta}}^{P_\beta P_\beta\beta} . \ni_\beta \longleftrightarrow \overset{2}{\Pi}{}_{P_{\beta\beta}}^{P_\beta P_\beta\beta} . \ni_\beta) = \underset{\beta}{\Theta} \qquad \text{(«estensionalità»).}$$

Le d.p.o. e le d.o.s. hanno lo stesso rapporto con le categorie di Heyting ed i topos rispettivamente, di quello delle d.e. con le categorie regolari. In particolare, è ben noto che la dottrina degli «insiemi» di un topos (elementare) ha la struttura di una d.o.s.; la dimostrazione di questo fatto può essere trovata per esempio in [*J*] o in [*W*], eccetto per le equazioni *C)* ed *E)*. D'altra parte, si può dimostrare che se $\mathbf{D}$ è una d.o.s., allora la categoria $R_\mathbf{D}$ costruita nel precedente teorema è un topos, cosicché si ha il

TEOREMA 2. *Se $\mathcal{HD}$ è la (2-)categoria delle d.o.s. e $\mathcal{T}$ è la (2-)categoria dei topos e funtori logici, allora laggiunzione del teorema 1 si restringe ad una aggiunzione*

$$\mathcal{T} \underset{\text{Dtr}(\ )}{\overset{\text{Cat}(\ )}{\rightleftarrows}} \mathcal{HD}$$

e $\mathcal{T}$ è una sottocategoria piena riflessiva di $\mathcal{HD}$.

Dimostrazione. Per dimostrare che la categoria $R_\mathbf{D} = \text{Cat}(\mathbf{D})$, dove $\mathbf{D}$ è una d.o.s., è un topos, basta esibire una corrispondenza biunivoca e naturale $\text{Sub}_{R_\mathbf{D}}(\langle\alpha, A\rangle \times \langle\beta, B\rangle \rightleftarrows R_\mathbf{D}(\langle\alpha, A\rangle, P\langle\beta, B\rangle)$. Ora, un sotto-oggetto R di $\langle\alpha, A\rangle \times \langle\beta, B\rangle$ in R è canonicamente dato da un attributo $R \leqslant \Pi_\alpha^{\alpha\beta} \cdot A \wedge \Pi_\beta^{\alpha\beta} \cdot B$; ad ogni tale attributo associamo l'attributo $R \in \mathbf{A}(\alpha \times P\beta)$ dato da

$$\Pi_\alpha^{\alpha\beta} . A \wedge \forall_{\Pi_{\alpha P\beta}^{\alpha P_\beta\beta}} (\Pi_{\alpha\beta}^{\alpha P_{\beta\beta}} . R \wedge \Pi_{P_{\beta\beta}}^{\alpha P_{\beta\beta}} . \ni_\beta);$$

vogliamo mostrare che R è un morfismo $\langle\alpha, A \xrightarrow{R} P\langle\beta, B\rangle$ in $R_\mathbf{D}$

dove $P\langle\beta, B\rangle$ è definito come $\langle P\beta, \forall_{\Pi^{P\beta\beta}_{P\beta}} (\ni_\beta \to \Pi^{P\beta\beta}_{\beta} . B)$. Dall'assioma $C)$ si ha facilmente che il supporto di R è $\langle\alpha, A\rangle$; per dimostrare che R è una funzione parziale, è sufficiente dimostrare la stessa cosa per $\forall_{\Pi} (\Pi . R \longleftrightarrow \Pi . \underset{\beta}{\ni})$*; in base alle equazioni vere in una d.o.s., si ha che la condizione di funzione parziale per R è equivalente a

$$\delta = \forall_{\Pi^{\alpha\beta P\beta P\beta}_{\alpha P\beta P\beta}} [(\Pi . R \longleftrightarrow \overset{1}{\Pi} . \ni_\beta \wedge (\overset{2}{\Pi} . R \longleftrightarrow \Pi . \ni_\beta)] \leqslant \Pi . \underset{P\beta}{\Theta};$$

ma in ogni algebra di Heyting si ha $(x \longleftrightarrow y) \wedge (x \longleftrightarrow z) \leqslant y \longleftrightarrow z$, cosicché:

$$\delta \leqslant \forall_{\Pi} (\overset{1}{\Pi} . \ni_\beta \longleftrightarrow \overset{2}{\Pi} . \ni_\beta) = \Pi \;\; . \forall_{\Pi} (\overset{1}{\Pi} . \ni_\beta \longleftrightarrow \overset{2}{\Pi} . \ni_\beta)$$

che, per l'assioma $E)$, è uguale a $\Pi . \underset{\beta}{\Theta}$. Resta da dimostrare che la immagine di R è contenuta in $P\langle\beta, \overset{\beta}{B}\rangle$. Si osservi dapprima che $\Pi . R \longleftrightarrow \Pi \ni_\beta \leqslant \ni_\beta \to \Pi . R \leqslant \Pi . \ni_\beta \to \Pi . \Pi . \beta = . \Pi . (\ni_\beta \to \Pi . \beta)$; dunque, per la funtorialità di $\forall_t$ e per la equazione $B_2)$ si ha il risultato voluto. Infine, è sufficiente provare la bijettività della corrispondenza in questione nel caso

$$\mathrm{Sub}_{R_{\mathbf{D}}} (\langle\alpha, M_\alpha\rangle \times \langle\beta, M_\beta\rangle) \underset{\leftarrow}{\simeq} R_{\mathbf{D}} (\langle\alpha, M_\alpha\rangle, P\langle\beta, M\;\rangle),$$

poiché il caso generale è una facile conseguenza. Bisogna mostrare che, se $R \in \mathbf{A}\,(\alpha \times \beta$, allora $R . \ni_\beta = R$, dove il primo membro è la composizione di relazioni, che in $R_{\mathbf{D}}$ coincide con l'immagine inversa di $\ni_\beta$ lungo $R \times \beta$, poiché R è funzione parziale. Per $C)$ si ha:

$$R = \Pi^{\alpha\beta}_{\alpha} . M_\alpha \wedge \mathrm{R} = \Pi^{\alpha\beta}_{\alpha} . \exists_{\Pi^{\alpha P\beta}_{\alpha}} (R) \wedge R = \exists_{\Pi_{\alpha\beta}} (\Pi^{\alpha P_\beta \beta} . \Pi) \wedge R =$$
$$= \exists_{\Pi} (\Pi . R \wedge \Pi . R);$$

poiché $f . \forall_f(X) = f . \forall_f(X) \wedge X$ e $(U \longleftrightarrow V) \wedge V = (U \longleftrightarrow V) \wedge U$, si ha il rsultato voluto. Omettiamo le restanti verifiche, che non presentano difficoltà.

Rimane da dimostrare che $\mathrm{Dtr}(E)$, dove E è un topos, è una d.o.s., cioè soddisfa $C)$ ed $E)$, nonché la funtorialità di $\mathrm{Dtr}(\;)$ e $\mathrm{Cat}(\;)$. Il primo fatto sarà una conseguenza dei successivi sviluppi ed il secondo è semplice routine.

---

* Nel seguito ometteremo gli indici e gli apici dei Π, salvo che sia necessario per la comprensione.

E' ben noto che la struttura di un topos E permette di internalizzare molte costruzioni esterne. In particolare, un topos E ammette l'internalizzazione della propria dottrina, cioè esistono i funtori

P) $E^{op} \xrightarrow{\mathbf{P}} E$ «sostituzione interna»

$\exists$) $E \xrightarrow{\exists} E$ «quantificazione esistenziale interna»

$\forall$) $E \xrightarrow{\forall} E$ «quantificazione universale interna»,

le frecce

$$P\alpha \times P\alpha \xrightarrow{\Lambda} P\alpha \quad P\alpha \times P\alpha \xrightarrow{\mathbf{V}} P\alpha \quad P\alpha \times P\alpha \xrightarrow{\Rightarrow} P\alpha$$

e gli elementi globali

$$1 \xrightarrow{\mathbf{M}_\alpha = \ulcorner \alpha \urcorner} P\alpha \quad 1 \xrightarrow{\ulcorner \ni_\alpha \urcorner = \ni_\alpha} P\,(P\alpha \times \alpha)$$

tali che, mediante la composizione con il funtore sezioni globali $E(1, -)$, danno luogo ad una struttura naturalmente isomorfa alla dottrina esterna $\langle E, \mathrm{Sub}_E(\ )\rangle$ nel senso forte che le equazioni vere nella dottrina Dtr(E) sono indotte dalla commutatività dei corrispondenti diagrammi in E. Per esempio, si può dimostrare che le frecce $\Lambda, \mathbf{V}$ e $\rightarrow$ soddisfano le commutatività che internamente esprimono le equazioni definenti un'algebra di Heyting e che, per ogni $t \in E$, le frecce $\mathbf{P}t$, $\exists_t$ e $\forall_t$ sono funtori interni rispetto agli ordini interni $\langle P\alpha, \leqslant \rangle$, tali che $\exists_t \dashv \mathbf{P}t \dashv \forall_t$. La definizione di queste frecce e la dimostrazione delle loro proprietà dottrinali è lunga e laboriosa, ma fortunatamente è già stata fatta da C. J. Mikkelsen in [M], eccetto per le equazioni C) ed E). Il metodo usato in questo lavoro è la cosiddetta «semantica di Kripke-Joyal» e nel seguito ci riferiremo ad [M] per quanto riguarda questo metodo e le sue principali proprietà. Per dimostrare la validità interna delle equazioni C) ed E), si osservi che la E) è espressa internamente da un diagramma su 1, cosicché è sufficiente dimostrarla esternamente, ciò che non presenta difficoltà. Per dimostrare C), si osservi dapprima che, per mezzo delle caratterizzazioni degli operatori logici interni contenute in [M], la freccia $P\,(\alpha \times \beta) \xrightarrow{\Lambda} P\,(\alpha \times P\beta)$ che internamente esprime la formula $\forall_{\Pi}\,(\Pi\,.\,R \longleftrightarrow \Pi\,.\,\ni_\beta)$ avente R come variabile libera, può essere caratterizzata usando gli elementi generalizzati come:

$$\forall\, x \in |E|,\ \forall\, x \xrightarrow{R} P\,(\alpha \times \beta),\ \forall\, x \xrightarrow{\langle a, v\rangle} \alpha \times P\beta$$

$\langle a, v\rangle \in R\Lambda$ se e solo se $\forall\, y \xrightarrow{i} x,\ \forall\, y \xrightarrow{b} \beta : \langle ia, b\rangle \in R$ se e solo se $b \in iv$.

Una descrizione esplicita di Λ può essere data nel modo seguente: sia $P(\alpha \times \beta) \times \alpha \xrightarrow{\lambda_\beta} P\beta$ la trasposta di $\underset{\alpha\times\beta}{\ni}$ e sia Λ' la trasposta del grafo di λ_β Λ' è caratterizzata come:

$$\forall\, x \xrightarrow{\langle a, v\rangle} \alpha \times P\beta,\ \forall\, x \xrightarrow{R} P(\alpha \times \beta)$$

$\langle a, v\rangle \in R\Lambda'$ se e solo se $\langle R, a\rangle \lambda_\beta = v$

se e solo se $\forall\, y \xrightarrow{i} x,\ \forall\, y \xrightarrow{b} \beta : b \in i\langle R, a\rangle$ se e solo se $b \in iv$

se e solo se $\forall\, y \xrightarrow{i} x,\ \forall\, y \xrightarrow{b} \beta : \langle ia, b\rangle \in iR$ se e solo se $b \in iv$.
Dunque, poiché hanno la stessa descrizione, $\Lambda = \Lambda'$.

Ora, la commutatività da dimostrare è

$$P(\alpha \times \beta) \xrightarrow{\Lambda} P(\alpha \times P\beta) \xrightarrow{\exists_{\Pi_\alpha}} P\alpha = P(\alpha \times \beta \xrightarrow{t_{\alpha\times\beta}} 1 \xrightarrow{M_\alpha} P\alpha$$

e, ricordando che $\exists_{\Pi_\alpha}$ è la trasposta del sotto-oggetto $\rightarrowtail P(\alpha \times P\beta) \times \alpha$ dato dalla fattorizzazione epi-mono di

$$\overset{\ni}{\rightarrowtail} P(\alpha \times P_\beta) \times \alpha \times P_\beta \xrightarrow{\Pi} P(\alpha \times P_\beta) \times 1$$

si può verificare direttamente che $\Lambda\, \exists_{\Pi_\alpha}$ e $t_{\alpha\times\beta}\, M_\alpha$ sono le trasposte dello stesso sotto-oggetto di $P(\alpha \times P\ ) \times \alpha$.

Si osservi che la dimostrazione della validità interna dell'equazione *C)* implica anche la sua validità esterna, cosicché la dimostrazione del teorema 2 è ora completa.

Siamo ora in grado di dimostrare il Teorema A enunciato nella introduzione.

Sia $E \xrightarrow{F} E^0$ un funtore cartesiano tra un topos E ed una categoria cartesiana E^0 e si considerino le composizioni:

$$E^{op} \xrightarrow{\mathbf{P}} E \xrightarrow{F} E^0,\ E \xrightarrow{\exists} E \xrightarrow{F} E^0,\ E \xrightarrow{\mathbf{V}} E \xrightarrow{F} E^0.$$

Poiché F è cartesiano, è chiaro che tutte le equazioni vere in E tra le frecce $\mathbf{P}t, \mathbf{V}_t, \exists_t, \Lambda, \mathbf{V}, \Rightarrow$ sono conservate da F e quindi che componendo con il funtore sezioni globali $E^0(1,-)$ si ottiene ancora una d.o.s. $\mathbf{D}^* = \langle E, \mathbf{A}^* \rangle$, che chiameremo *«dottrina delle entità F-interne»*. Si ottiene anche canonicamente un morfismo di d.o.s. $\mathrm{Dtr}(E) \xrightarrow{\mathbf{F}^*} \mathbf{D}^*$, considerando l'identità su E e le funzioni $\mathrm{Sub}_E(\alpha) \to E(1, P\alpha) \to E^0(1, F(P\alpha))$ indotte da F. Quindi, per il teorema 2, si ha un topos E^* ed un funtore logico $E \xrightarrow{F^*} E^*$, che soddisfa la condizione 3) enunciata nell'introduzione. Ciò dimostra il teorema A.

Ricordiamo che il topos E^* ha come oggetti le coppie $\langle \alpha, A \rangle$, dove A è un elemento $1 \xrightarrow{A} F(P\alpha)$ e per frecce $\langle \alpha, A \rangle \xrightarrow{R} \langle \beta, B \rangle$ gli elementi $1 \xrightarrow{R} F(P(\alpha \times \beta)$ tali che per mezzo degli operatori logici di $\mathbf{D}^*$ sono «funzioni da A a B».

3. La fattorizzazione

Per completare la fattorizzazione rimane da definire il funtore $E^* \xrightarrow{F^0} E^0$ e da dimostrarne le proprietà. L'idea consiste nell'associare ad ogni oggetto $1 \xrightarrow{A} F(P\alpha)$ di E^* l'oggetto $F^0(A)$ di E^0 dato dal prodotto fibrato

$$\begin{tikzcd}
F^0(A) \arrow[rr, tail] \arrow[d, tail] & & {} \arrow[d, tail, "\ni^*_\alpha = F(\ni_\alpha)"] \\
F(\alpha) \arrow[r, "\sim"] & 1 \times F(\alpha) \arrow[r, "A \times 1"] & F(P\alpha) \times F(\alpha)
\end{tikzcd}$$

assumendo che E^0 sia una categoria esatta a sinistra, così come F.

Si oservi che, se E^0 è un topos, il sotto-oggetto $F^0(A)$ è quello il cui nome è dato dalla compsizione $1 \xrightarrow{A} F(P\alpha) \xrightarrow{F\alpha} P^0 F(\alpha)$, dove F_α è la freccia descritta nell'introduzione. Se $\langle \alpha, A \rangle \xrightarrow{R} \langle \beta, B \rangle$

è una freccia di E^*, allora $F^0(R)$ è un sotto-oggetto di $F(\alpha) \times F(\beta)$ che possiamo dimotrare essere il grafo di una freccia $F^0(A) \to F^0(B)$ mediante i seguenti due lemmi:

LEMMA 1. *Se R e S sono due entità F-interne e se $F(\mathbf{P}f) = P^*f$, $F(\Lambda) = \Lambda^*$, $F(\underset{\alpha}{\Theta}) = \underset{\alpha}{\Theta}^*$, $F(M_\alpha) = M_\alpha$ sono operazioni della dottrina* $\mathbf{D}^*$, *allora valgono le seguenti uguaglianze:*

a) $F^0(R \cdot P^*f) = F(f)^{-1}(F^0(R))$

b) $F^0(\langle R, S\rangle \cdot \Lambda^*) = F^0(R) \wedge F^0(S)$

c) $F^0(\underset{\alpha}{\Theta}^*) = \delta_{F(\alpha)}, F^0(M_\alpha{}^*) = 1_{F(\alpha)}$.

La dimostrazione consiste in semplici verifiche, basate sul fatto che F è esatto a sinistra. Per questo lemma e per l'osservazione contenuta alla fine del teorema 1, si ha che se $\langle \alpha, A\rangle \xrightarrow{R} \langle \beta, B\rangle$ è una freccia di E^*, allora $F^0(R)$ è il grafo di una funzione parziale $\rightarrowtail F(\alpha) \times F(\beta)$; inoltre, poiché nella logica di una dottrina l'affermazione «l'immagine di R è contenuta in B» coinvolge solo i precedenti operatori, allora anche l'immagine di $F^0(R)$ è contenuta in $F^0(B)$, cioè $F^0(R)\,\Pi_{F\beta}$ si fattorizza attraverso $F^0(B)$. Più delicata è la dimostrazione che il supporto di $F^0(R)$ è quello giusto, cioè $F^0(A)$, perché questa affermazione sembra fare un uso genino dell'operatore di quantificazione esistenziale di $\mathbf{D}^*$. Tuttavia si può superare questa difficoltà osservando che se R è una funzione parziale, allora l'affermazione «il supporto di R è A» può essere espressa in modo equivalente usando l'operatore di quantifcazione esistenziale unica, anziché quello di quantificazione esistenziale. Il vantaggio consiste nel fatto che la verità di tali affermazioni è conservata da F^0.

LEMMA 2. *Se $1 \xrightarrow{R} F(P(\alpha \times \beta))$ è una funzione parziale F-interna, allora $F^0(RF(\exists_{\Pi_\alpha})) = F^0(R)\Pi_\alpha$.*

Dimostrazione. In una d.p.o. definiamo

$$\exists !_{\Pi_\alpha^{\alpha\beta}} (R) = \exists_{\Pi_\alpha^{\alpha\beta}} (R) \wedge \forall_{\Pi_\alpha^{\alpha\beta\beta}} (\Pi \cdot R \to \Pi \cdot \underset{\beta}{\Theta}).$$

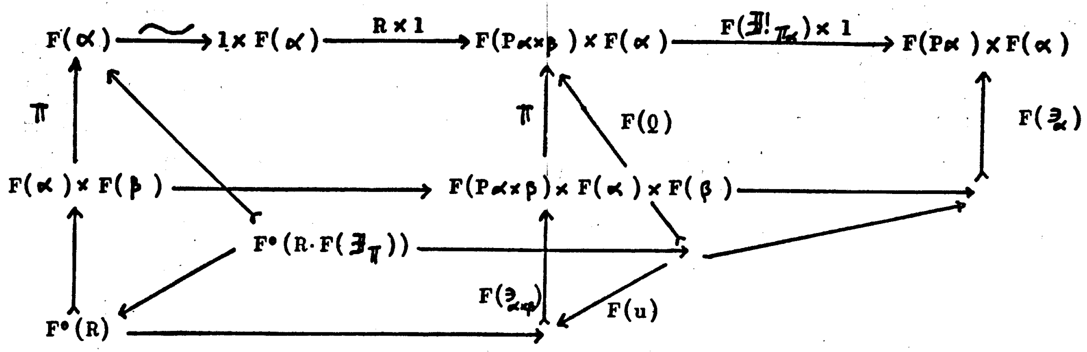
E' facile dimostrare che un attributo $R \in \mathbf{A}(\alpha \times \beta)$ è una funzione parziale secondo la definizione precedentemente data se e solo se $\exists_{\Pi_\alpha}(R) = \exists_{\Pi_\alpha}!\,(R)$; perciò, se $1 \xrightarrow{R} F(P(\alpha \times \beta))$ è un elemento F-interno, R è una funzione parziale se e solo se $R\,F(\exists_{\Pi_\alpha}) = R\,F(\exists_{\Pi}!)$.

Ricordiamo che in un topos E l'operatore di esistenza unica $P(\alpha \times \beta) \xrightarrow{\exists!_{\Pi_\alpha}} P\alpha$ può essere definito come il trasposto del sotto-oggetto $\overset{Q}{\rightarrowtail} P(\alpha \times \beta) \times \alpha$ «immagine unica di

$$\rangle \xrightarrow{\ni_{\alpha\times\beta}} P(\alpha \times \beta) \times \alpha \times \beta \xrightarrow{\Pi} P(\alpha \times \beta) \times \alpha$$

definito da P. Freyd in [F], dove è dimostrata la proprietà universale che permette di riconoscere la freccia $\exists_{\Pi_\alpha}!$ come quella costruita con gli altri operatori logici presenti nella precedente definzione dottrinale. In particolare, è dimostrata l'esistenza di una freccia u tale che $u \,.\, \ni_{\alpha\times\beta} \Pi = Q$.

Dunque, se R è una funzione parziale F-interna, il seguente diagramma



mostra che $F^0(RF(\exists_{\Pi_\alpha})) \leq F^0(R)\,\Pi_{F(\alpha)}$; poiché, per il lemma 1, $F^0(R) \cdot \Pi_{F(\alpha)}$ è mono e poiché è sempre vero che

$$F^0(RF(\exists_{\Pi_\alpha})) \geqslant F^0(R) \cdot \Pi_{F(\alpha)},$$

il lemma è dimostrato.

Questi due lemmi permettono di comprendere non solo che la immagine in F^0 di una freccia $\langle\alpha, A\rangle \xrightarrow{R} \langle\beta, B\rangle$ di E^* è il grafo di una freccia $F^0(A) \to F^0(B)$, di E^0, ma anche che F^0 è un funtore. Infatti, sia $\langle\beta, B\rangle \xrightarrow{S} \langle\gamma, C\rangle$ un'altra freccia di E^*; la composizione $R \,.\, S$ in $\mathbf{D}^*$ è data da $R \,.\, S = \langle R, S\rangle\, \mathbf{P}^*\Pi \times P^*\Pi \,.\, \wedge^* \,.\, \exists^*\Pi$ e, poiché in ogni d.e. si può dimostrare che $\Pi^{\alpha\beta\gamma}_{\alpha\beta} \,.\, R$ è ancora una fun-

zione parziale da $\alpha \times \gamma$ a β e che la congiunzione di una funzione parziale con un qualsiasi attributo è ancora una funzione parziale, allora $F^0(R\,.\,S) = (\Pi^{F\alpha F\beta F\gamma}_{F\alpha F\beta}{}^{-1}\,(F^0(R)) \wedge \Pi^{F\alpha F\beta F\gamma}_{F\beta F\gamma}{}^{-1}\,.\,(F^0(S))\,\Pi_{F\alpha F\gamma}$
che si può dimostrare essere il grafo della funzione parziale data dalla composizione

$$\begin{tikzcd}
F^0(A) \arrow[r, "F^0(R)"] \arrow[d, tail] & F^0(B) \arrow[r, "F^0(S)"] \arrow[d, tail] & F^0(C) \arrow[d, tail] \\
F(\alpha) & F(\beta) & F(\gamma)
\end{tikzcd}$$

Inoltre, gli stessi lemmi consentono di dimostrare che F^0 è un funtore esatto a sinistra con argomenti simili a quelli usati e tenendo conto di come sono definiti i limiti finiti in E^* (teorema 1).

Infine, poiché in base alle definizioni poste non è difficile dimostrare che $F^* \cdot F^0 \cong F$, resta solo da dimostrare che F^0 è un funtore che conserva gli elementi, cioè che l'applicazione che esso induce $E^*(1, \langle\alpha, A\rangle \to E^0(1, F^0(\langle\alpha, A\rangle))$ è bijettiva.

Ricordiamo che in un toos E l'esponenziazione e l'operatore interno «grafo di una freccia» $\beta^\alpha \overset{\sigma}{\rightarrowtail} P(\alpha \times \beta)$ sono definiti come l'intersezione di due equalizzatori costruiti con gli operatori logici interni che esprimono la condizione di funzione parziale ed il fatto che il supporto deve essere tutto σ (si veda [*K-M*]). Quindi, poiché F è esatto a sinistra e per la definizione di $\mathbf{D}^*$, si ha che $E^*(\langle\alpha, M_\alpha\rangle, \langle\beta, M_\beta\rangle)$ è isomorfo ad $E^0(1, F(^\alpha_\beta))$; perciò se $\alpha = 1$, si ha $E^*(1, \langle\beta, M_\beta\rangle) \overset{\sim}{\to} E^0(1, F(\beta^1)) \cong (1, F^0(\langle\beta, M_\beta\rangle)$. Per dimostrare il risultato per gli oggetti più generali $\langle\beta, B\rangle$ di E^*, basta osservare che un elemento $1 \xrightarrow{b} F(\beta)$ si fattorizza attraverso $F^0(B)$ se e solo se $b \in^* B$.

Poiché ora dovrebbe essere chiaro il metodo per dimostrare le proprietà di F^0, non è difficile completare la dimostrazione del teorema B, tenendo conto dei casi in cui E^0 e F hanno le altre proprietà enunciate.

BIBLIOGRAFIA

[C] M. COSTE, *Logique du premier ordre dans les topos élémentaires*, Séminaire Bénabou, Université Paris-Nord, 1974.

[F] P. FREYD, *Aspects of topoi*, Bull. Austral. Math. Soc. 7 (1972), 1-76 e 467-480.

[J] P. T. JOHNSTONE, *Topos theory*, Academic Press, 1977.

[K-M] A. KOCK e C. J. MIKKELSEN, *Topos-theoretic factorization of non-standard extensions*, Proc. Victotia Symposium of non-standard Analysis (ed. A. Hurd e P. Loeb), Springer Lecture Notes in Math. 369 (1974), 122-143.

[L, 1] F. W. LAWVERE, *Adjointness in foundations*, Dialectica 23 (1969), 281-296.

[L, 2] F. W. LAWVERE, *Equality in Hyperdoctrines and the Comprehension Schema as an adjoint functor*, Proc. New York Symposium on Applications of Categorical Algebra (ed. A. Heller), Am. Math. Soc. (1970), 1-14.

[L, 3] F. W. LAWVERE, Introduzione a *Model Theory and topoi*, Springer Lecture Notes in Math. 445 (1975), 3-14.

[L, 4] F. W. LAWVERE, *Teoria delle categorie sopra un topos di base*, Note dell'Università di Perugia (1973).

[M] C. J. MIKKELSEN, *Lattice-theoretic and logical aspects of elementary topoi*, Aarhus Universitet Various Publications Series 25 (1976).

[R-Z] A. ROBINSON e E. ZAKON, *A set theoretical characterization of enlargement*, in Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability, Holt Reinhart & Winston, New York (1969).

[W] G. C. WRAITH, *Lectures on Elementary Topoi*, Model Theory and Topoi, Springer Lecture Notes in Math. 445 (1975), 114-206.