ESISTENZA E SEQUENZE ASCENDENTI DI MONOIDI SU VARIETA' INTERSEZIONE COMPLETA (*)

di WALTER SPANGHER (a Trieste) (**)

SOMMARIO. — *Si determinano condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di famiglie di monoidi su una varietà proiettiva intersezione completa.*

SUMMARY. — *We prove necessary and sufficient conditions in order that three families of monoids exist on a complete intersection projective variety.*

Introduzione:

In talune questioni inerenti ricerche sulla unirazionalità, o sulla verifica delle congetture di Hodge, risulta di un certo interesse sapere quando in uno spazio proiettivo $\mathbf{P}^r$, considerata una qualsiasi varietà intersezione completa V di dato tipo $(n_1, ..., n_p)$

a) esista una varietà lineare L^k $(1 \leqslant k \leqslant r-1)$ ed un monoide M^{k-1} di L^k (di ordine assegnato n) contenuto in V

b) i monoidi M^{k-1} di ordine n contenuti in V, ne costituiscano una congruenza di varietà unirazionali (i.e. copertura di V).

c) Fissato k, esistano sempre sequenze ascendenti di monoidi di

(*) Pervenuto in Redazione il 29 luglio 1981.
(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa, 1 - 34100 Trieste.

lunghezza k contenuti in V, come verrà meglio spiegato nel § 3.

I problemi or ora accennati vengono discussi rispettivamente nel primo, secondo e terzo paragrafo.

Gli spazi proiettivi e le varietà considerate sono definite su un corpo k algebricamente chiuso.

§ 1. Nello spazio proiettivo $\mathbf{P}^r$ si considerino le varietà intersezione completa V di tipo $(n_1, \dots, n_p)$ (con $1 \leqslant n_1 \leqslant \dots \leqslant n_p$). Sia Y la varietà irriducibile delle varietà (intersezioni complete) V di $\mathbf{P}^r$ definita come in [2] e con quelle notazioni si ponga

$$\dim Y = \sum_{i=1}^{p} N_i = \sum_{i=1}^{p} \left[\binom{n_i + r}{r} - \delta_i - 1 \right]$$

A) Sia invece X la varietà irriducibile parametrizzante la totalità dei monoidi M^{k-1} di ordine n ($n \geqslant 3$, $k \geqslant 1$) di $\mathbf{P}^r$; risulta (cfr. [4])

$$\dim X = (k+1)(r-k) + \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-2}{k} + k - 1.$$

Dire che un monoide M^{k-1} d'ordine n è contenuto in V $(1 \leqslant k \leqslant r - p - 1)$ equivale a dire che $M^{k-1} \subseteq H_i \cap L^k$ $(i = 1, \dots, p)$ (dove $V = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$ $(\deg H_i = n_i)$ e L^k è lo spazio ambiente di M^{k-1}) e quindi se $n_i = n$ $M^{k-1} = H_i \cap L^k$ o $L^k \subseteq H_i$, se $n_i < n$ $L^k \subseteq H_i$ e infine se $n_i > n$, $H_i \cap L^k = M^{k-1} + F^{k-1}$ $(\deg F^{k-1} = n_i - n)$ o $L^k \subseteq H_i$.

Comunque se $n_p < n$, la condizione necessaria e sufficiente affinché ogni varietà intersezione completa V contenga qualche monoide M^{k-1} di ordine n è quella di contenere qualche L^k e quindi è quella riportata in [2]. Si supponga, quindi, qui nel seguito, $n \geqslant 3$ e $n \leqslant n_p$ e dunque

$$n_1 \leqslant \dots \dots \leqslant n_r < n = n_{r+1} = \dots == n_s < n_{s+1} \leqslant \dots \leqslant n_p \text{ (1)}.$$

Si consideri la corrispondenza C tra X e Y che associa ad ogni $x \in X$ la totalità delle varietà V di Y contenenti il monoide x; la fibra $C(x)$ è irriducibile e di dimensione costante e quindi C è irriducibile. Per quanto sopra detto (cfr. [2], [4], [1]) si ha:

$$\dim C(x) = \dim Y - \sum_{i=1}^{r} \binom{n_i + k}{k} - \sum_{i=r+1}^{s} \left[\binom{n_i + k}{k} - 1 \right] -$$

(1) Ciò viene scritto impropriamente, per generalità, intendendo comunque che può accadere $r + 1 = 1$, o $s + 1 = p$, ...

$$- \sum_{i=s+1}^{p} \left[\binom{n_i + k}{k} - \binom{n_i + k - n}{k} \right] = \dim Y - a.$$

Se $\mathrm{pr}_2 C = Y$ si ha:

$$d = \dim X - a \geqslant 0. \tag{1}$$

Dimostreremo che (1) è pure sufficiente per la non degenerabilità di C su Y.

Si ponga (cfr. [5]) $\mathrm{pr}_2 C = Y'$, $\dim Y' = \dim Y - \varepsilon$ $(\varepsilon \geqslant 0)$.

Si osservi innanzi tutto che le fibre $C(x)$ di C qualora si intersecano, hanno intersezione irriducibile con eccedentarietà di intersezione mai negativa e che preso $x \in X$, la corrispondenza $C^* = \mathrm{pr}_2^{-1}(C(x))$ ha tutte le componenti irriducibili dominanti $C(x)$ tramite pr_2.

Ricerchiamo quindi, seguendo le notazioni di [5], la dimensione degli X^* di dimensione massima e la relativa eccedentarietà d'intersezione σ.

Rammentato che $\sigma > 0$ se e solo se gli spazi lineari L^k su cui giacciono i monoidi non sono sghembi, analizziamo i vari valori che possono assumere σ e $\dim X^*$ in relazione alle diverse posizioni di x e x^* e di L^k e L^{*k} spazi ambienti rispettivamente dei monoidi x e x^* (2).

Supponiamo che L^k e L^{*k} s'intersechino secondo un L^h $(h < k)$.

A_1) Supponiamo inoltre che $L^h = L^k \cap L^{*k}$ non sia immerso in x e che quindi intersechi x secondo una varietà H^{h-1} di ordine n.

Riesce allora:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{r} \binom{n_i + h}{h} + \sum_{i=r+1}^{s} \left[\binom{n_i + h}{h} - 1 \right] + \\ + \sum_{i=s+1}^{p} \left[\binom{n_i + h}{h} - \binom{n_i + h - n}{h} \right]$$

$$\dim X_1^* = \dim X - (\sigma - \varepsilon) \leqslant (k - h)(r - k + h + 1) + \binom{n + k}{k} - \\ - \binom{n + k - 2}{k} - \binom{n + h}{h} + k.$$

Supposta vera la (1), con tecnica analoga a quella di [2], si dimostra che $\dim X_1^* - \dim X + \sigma \leqslant 0$.

(2) x^* (cfr. [5]) è variabile di un aperto di X^* di generica piattezza relativamente al morfismo $C_D^* \to X^*$.

A$_2$) Supponiamo ora L^h immerso nel monoide x e nel monoide x^*:

Riesce allora

$$\sigma_2 = \sum_{i=1}^{r}\binom{n_i+h}{h} + \sum_{i=r+1}^{s}\binom{n_i+h}{h} + \sum_{i=s+1}^{p}\binom{n_i+h}{h}$$

$$\dim X_2^* = \dim X - (\sigma - \varepsilon) \leqslant (k-h)(r-k+h+1) - 1 + \\ + \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-2}{k} - \binom{n+h}{h} + k - 1 .$$

Supposta vera la (1) si dimostra che $\dim X_2^* - \dim X + \sigma_2 \leqslant 0$

A$_3$) Sia L^h immerso nel monoide x ma non nel monoide x^*; in tal modo V deve contenere L^{*k}.

Riesce allora:

$$\sigma_3 = \sum_{i=1}^{r}\binom{n_i+h}{h} + \sum_{i=r+1}^{s}\left[\binom{n_i+h}{h} - 1\right] + \\ + \sum_{i=s+1}^{p}\left[\binom{n_i+h}{h} - \binom{n_i+h-n}{h}\right] \quad (3)$$

$$\dim X_3^* = \dim X - (\sigma - \varepsilon) \leqslant (k-h)(r-k) + \delta + \\ + \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-2}{k} + k - 1$$

dove δ è la dimensione della totalità degli L^h giacenti sul monoide x e quindi (cfr. [3])

$$\delta = (h+1)(k-h) - \binom{n+h}{h} \text{ oppure}$$

$$\delta = h(k-h) - \binom{n+h-1}{h-1} + \binom{n+h-2}{h-1} \quad (h \geqslant 1).$$

Riesce, supposta vera la (1), $\dim X_3^* - \dim X + \sigma_3 \leqslant 0$ in ogni caso.

B) Sia ora X' la varietà irriducibile parametrizzante la totalità dei monoidi M^{k-1} di ordine 2 $(k \geqslant 1)$ di $\mathbf{P}^r$ cioè delle quadriche delle varietà lineari L^k di $\mathbf{P}^r$; risulta:

$$\dim X' = (k+1)(r-k) + \binom{k+2}{k} - 1.$$

---

(3) Si verifica in tal caso che le condizioni per V di Y di contenere L^{*k} sono dipendenti dalle condizioni di passaggio per L^h e x^*; perché se fossero indipendenti l'eccedentarietà σ risulterebbe uguale a

$$\sum_{i=1}^{r}\binom{n_i+h}{h} + \sum_{i=r+1}^{s}\left[\binom{n_i+h}{h} - 1\right] + \sum_{i=s+1}^{p}\left[\binom{n_i+h}{h} - \binom{n_i+k-n}{k}\right].$$

Se il tipo della varietà intersezione completa V è $n_1 = n_2 = \dots = n_{p-1} = 1$, $n_p = 2$ si ha che $k \leqslant r - p$ è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza su V di quadriche Q^{k-1}.

Supponiamo quindi nel seguito che non accada simile eventualità ovvero che:

$$1 = n_1 \leqslant \dots \leqslant n_r < 2 = n_{r+1} = \dots = n_s < n_{s+1} \leqslant \dots \leqslant n_p \text{ (4)}.$$

Considerata la corrispondenza C' tra X' e Y sopra menzionata, si verifica che la fibra $C'(x)$ $(x \in X')$ (5) è irriducibile e di dimensione costante

$$\dim C'(x) = \dim Y - \sum_{i=l}^{r} \binom{k+1}{k} - \sum_{i=r+1}^{s} \left[\binom{k+2}{k} - 1 \right] - \sum_{i=s+1}^{p} \left[\binom{n_i + k}{k} - \binom{n_i + k - 2}{k} \right] = \dim Y - a'.$$

Dimostriamo che la condizione necessaria affinchè $pr_2 C' = Y$

$$d' = \dim X' - a' \geqslant 0 \tag{1'}$$

risulta pure sufficiente per la non degenerabilità di C' su Y.

Seguendo [5] valgono le stesse considerazioni già poste in luce in A). I vari casi possibili per avere in relazione ad X'^* un'eccedentarietà σ positiva risultano:

B₁) $L^h = L^k \cap L^{*k}$ $(h \geqslant 0)$ non è immerso nella quadrica x e quindi la interseca in una quadrica di dimensione $h - 1$.

Riesce:

$$\sigma_1' = \sum_{i=1}^{r} \binom{h+1}{h} + \sum_{i=r+1}^{s} \left[\binom{2+h}{h} - 1 \right] + \sum_{i=s+1}^{p} \left[\binom{n_i + h}{h} - \binom{n_i + h - 2}{h} \right]$$

$$\dim X_1'^* = \dim X' - (\sigma - \varepsilon) \leqslant (k - h)\ (r - k + h - 1) + \binom{k+2}{k} - \binom{h+2}{h}$$

Si dimostra con tecnica analoga a [2] che $\dim X_1'^* - \dim X' + \sigma_1' \leqslant 0$, supposta vera la (1').

B₂) Supponiamo che L^h sia immerso sia nella quadrica x che in quella x^*.

Riesce:

(4) Vedi nota (1) e comunque $n_p \geqslant 2$

(5) Per il seguito risulta più opportuno scegliere x non singolare.

$$\sigma'_2 = \sum_{i=1}^{r} \binom{h+1}{h} + \sum_{i=r+1}^{s} \binom{2+h}{h} + \sum_{i=s+1}^{p} \binom{n_i+h}{h}$$

$$\dim X'^{*}_2 \leqslant (k-h)\,(r-k+h-1) - 1 + \binom{k+2}{k} - 1 - \binom{h+2}{h} \quad (6)$$

Supposta vera la (1') riesce $\varepsilon \leqslant 0$.

B3) Sia L^h immerso nella quadrica x ma non nella quadrica x^*. Si ha:

$$\sigma'_3 = \sum_{i=1}^{r} \binom{h+1}{h} + \sum_{i=r+1}^{s} \left[\binom{2+h}{h} - 1\right] + $$
$$+ \sum_{i=s+1}^{p} \left[\binom{n_i+h}{h} - \binom{n_i+h-2}{h}\right]$$

$$\dim X'^{*}_3 \leqslant (k-h)\,(r-k+h-1) - \binom{h+2}{2} + \binom{k+2}{2} - 1$$

Riesce, supposta vera la (1'), $\dim X'^{*}_3 - \dim X' + \sigma'_3 \leqslant 0$.

§ 2. Con le notazioni del paragrafo precedente, si consideri la corrispondenza Ω tra $\mathbf{P}^r$ e Y data dalle coppie $(p, V) \in \mathbf{P}^r \times Y$ con $p \in V$. Riesce Ω irriducibile (essendo tutte le fibre $\Omega\,(p)$ irriducibili e di dimensione costante $\dim \Omega\,(p) = \dim Y - p$) e di dimensione $\dim Y + (r-p)$.

Consideriamo quindi la corrispondenza K tra X e Ω $(n \geqslant 3)$ data dalle coppie $(x, (p, V))$ con $p \in x \subseteq V$. Si può allora considerare il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] \arrow[dd, "g"'] & & \Omega \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"] & \mathbf{P}^r \\
& C \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] & Y & \\
X & & &
\end{tikzcd}$$

Essendo $K\,(x)$ irriducibile e di dimensione costante

$$(K\,(x) \simeq (s \cdot f)\,(g^{-1}\,(x)) \times x;$$

(6) Più precisamente si può dire che per x non singolare $\dim X'^{*} \leqslant (k-h)\,(r-k) + (k-h)\,(h+1) - 2\binom{h+2}{2} + \binom{k+2}{k} - 1$.

$$\dim K(x) = (k-1) + \dim C(x) = \dim \Omega - \alpha$$

dove $\alpha = a + (r-p) - (k-1)$ la corrispondenza K è irriducibile e di dimensione $\dim K = \dim Y - a + (k-1) + \dim X$.

Il problema dell'esistenza di congruenze di monoidi sulle varietà intersezione completa equivale quindi alla ricerca di condizioni affinchè $f(K) = \Omega$.

Si ponga $f(K) = \Omega'$ e $\dim \Omega' = \dim \Omega - \eta$ $(\eta \geqslant 0)$. Se $f(K) = \Omega$ si ha:

$$d + (k-1) - (r-p) \geqslant 0 \quad \text{i.e.} \quad \dim X - \alpha \geqslant 0. \tag{2}$$

E' interessante sapere se la (2) è pure condizione sufficiente per la non degenerabilità di K su Ω seguendo [5]. Indichiamo con ρ l'eccedentarietà d'intersezione di K rispetto $K(x)$; rammentato che $\rho > 0$ soltanto se gli spazi lineari L^k su cui giacciono i monoidi sono non sghembi, si possono presentare i seguenti casi in cui $\rho > 0$.

C$_1$) Supponiamo che $L^h = L^k \cap L^{*k}$ non sia immerso in x.

Riesce:

$$\rho_1 = \sigma_1 + (h-1) + (r-p) - 2(k-1)$$
$$\dim X^* = \dim X_1^*$$

C$_2$) Sia L^h immerso sia in x che in x^*

Riesce:

$$\rho_2 = \sigma_2 + h + (r-p) - 2(k-1)$$
$$\dim X^* = \dim X_2^*$$

C$_3$) L^h sia immerso nel monoide x ma non in x^*

Riesce:

$$\rho_3 = \sigma_3 + (h-1) + (r-p) - 2(k-1)$$
$$\dim X^* = \dim X_3^*$$

In tutti i casi si ha $\dim X^* - \dim X + \rho \leqslant 0$ supposta valida la (2).

Analoghe considerazioni valgono mutatis mutandis, per la varietà X' delle quadriche di dimensione $k-1$ di $\mathbf{P}^r$.

§ 3. Consideriamo in $\mathbf{P}^r$ una varietà intersezione completa V del tipo $(n_1, ..., n_p)$ con $n_1 \leqslant ... \leqslant n_{p-1} < n_p = n$ $(n \geqslant 3)$ e fissiamo un intero k $(1 \leqslant k \leqslant r-1)$.

Cercansi condizioni su r, k, $n_1, ..., n_p$ affinchè per ogni punto P di V passi una retta che intersechi V in un monoide con punto singolare P, per ognuna di tali rette passi un piano che intersechi V in un monoide con ugual punto singolare, e così via fino ad un L^k; dette sequenze di monoidi le chiameremo per brevità sequenze ascendenti di monoidi per P.

Si ponga $P \equiv (1, 0, .., 0)$ e $V = H_{n_1} \cap ... \cap H_{n_p}$ dove

$F_j = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i f_{ij}^{(nj-1)} (x_0, ..., x_r) = 0$ $(j = 1, ..., p)$ è un'equazione di H_{n_j}. L'esistenza di rette per P che intersechi V in un monoide equivale a ricercare rette che intersecano H_{n_p} in un monoide e giacciano su $H_{n_1}, ..., H_{n_{p-1}}$, ovvero a ricercare un punto $Q \equiv (0, x_1 \; ..., x_r)$ tale che la retta PQ verifichi le condizioni or ora dette.

In tal modo, la retta PQ ha punto generico $(\lambda, x_1, ..., x_r)$ ed affinchè PQ intersechi H_n in monoide con punto singolare P, bisogna che $\sum\limits_{i=1}^{r} x_i f_{ip}$ $(\lambda, x_1, ..., x_r) = 0$ di grado n in λ, ammetta $\lambda = \infty$ come soluzione $(n-1)$ volte; si ottengono così $(n-2)$ equazioni da aggiungere alle $\sum\limits_{j=1}^{p-1} n_j$ equazioni che si ottegono imponendo PQ quale retta giacente su H_{n_1} ..., $H_{n_{p-1}}$.

Affinché detto sistema in r incognite e $(n-2) + \sum\limits_{j=1}^{p-1} n_j$ equazioni ammetta soluzioni non banali occorre e basta che:

$$r \geqslant (n-1) + \sum_{j=1}^{p-1} n_j \quad \text{(condizione per } k = 1\text{)}.$$

Procedendo per induzione si può supporre che la varietà lineare $L^{k-1} \equiv (x_k = x_{k+1} = ... = x_r = 0)$ intersechi V in un monoide con punto singolare P.

L'equazione di H_n assume allora la forma:

$$\sum_{i=k}^{r} x_i f_i^{(n-1)} (x_0, ..., x_r) + \alpha [\varphi_n (x_1 ... x_{k-1}) + x_0 \varphi_{n-1} (x_1 ... x_{k-1})] = 0$$

La ricerca di un L^k $(\supseteq L^{k-1})$ che intersechi V secondo un monoide per P singolare equivale alla ricerca di un punto $Q \equiv$ $\equiv (0, ..., 0, p_k, ..., p_r)$ tale che le rette di punto generico $(x_0 + \lambda,$ $x_1, ..., x_{k-1}, p_k, ... p_r)$ intersechino H_n almeno $(n-1)$ volte in

P e giacciano su H_{n_1} ..., $H_{n_{p-1}}$.

La prima condizione equivale a imporre che

$$\sum_{i=k}^{r} p_i f_i^{(n-1)} (x_0 + \lambda, x_1, ..., x_{k-1}, p_k, ..., p_r) +$$
$$+ \alpha [\varphi_n (x_1 ... x_{k-1}) + (x_0 + \lambda) \varphi_{n-1} (x_1, ..., x_{k-1})] = 0$$

ammetta $\lambda = \infty$ quale soluzione $n - 1$ volte, per ogni scelta di $x_0, ..., x_{k-1}$ e ciò equivale a determinare un sistema di

$$1 + (k + 1) + \binom{k + 2}{2} + ... + \binom{k + n - 3}{n - 3} = \binom{k + n - 2}{n - 3}$$

equazioni che devono essere aggiunte alle $\sum_{j=1}^{p-1} \binom{n_j + k - 1}{n_j - 1}$ tutte nelle incognite omogenee $p_k, ..., p_r$, le ultime assicurando la condizione che L^k (congiungente L^{k-1} con Q) giaccia su H_{n_1} ..., $H_{n_{p-1}}$; affinchè questo ultimo sistema ammetta soluzioni non banali occorre e basta che

$$r - k \geqslant \binom{k + n - 2}{n - 3} + \sum_{j=1}^{p-1} \binom{n_j + k - 1}{n_j - 1}.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] GUAZZONE S., *Sulle ipersuperficie di S_k e di ordine s che appartengono alla ipersuperficie generale di ordine n di S_r $(r > k)$.* Rend. Sem. Mat. Padova, XXI (2) (1952).

[2] PREDONZAN A., *Intorno agli S_k giacenti sulla varietà intersezione completa di più forme.* Rend. Acc. Naz. Lincei VIII (5) (1948).

[3] PREDONZAN A., *Intorno ai sistemi di S_k che appartengono al monoide generale di dato ordine.* Rend. Sem. Mat. Padova XXI (2) (1952).

[4] PREDONZAN A., *Sui monoidi V^n_{k-1} di S_k situati sulla forma generale F^n_{r-1} di S_r.* Rend. Sem. Univ. Padova XXI (2) (1952).

[5] SPANGHER W., *Sulla degenerabilità di corrispondenze algebriche.* Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste XIII (1981).