SULLA DEGENERABILITA' DI CORRISPONDENZE ALGEBRICHE (*)

di WALTER SPANGHER (a Trieste) (**)

SOMMARIO. — *Si studiano le varie situazioni di degenerabilità o meno di una corrispondenza algebrica irriducibile seguendo un criterio di A. Predonzan.*

SUMMARY. — *We study every situation of non degeneracy on an irreducible correspondence by a well known Predonzan's principle.*

Introduzione.

In alcuni recenti lavori (ad es. [3], [10], [18]) sono stati studiati problemi che possono venir tradotti nella degenerabilità o meno di una opportuna corrispondenza algebrica.

I problemi sopraindicati non sono nuovi (cfr. [9], [17]) ed era quindi naturale la riscoperta di un criterio di non degenerabilità dovuto a Predonzan utilizzato per la prima volta in [12], essendo peraltro poche e laboriose le tecniche alternative.

Detto criterio, difformemente utilizzato, si ritrova anche in molteplici lavori di quell'epoca (cfr. [5], [6], [7], [13], [14], [15]) ed in una esposizione per varietà proiettive in [11].

In questa direzione, si è voluto dare nel § 1 una nuova espo-

(*) Pervenuto in Redazione il 29 luglio 1981.
(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa, 1 - 34100 Trieste.

sizione del tutto generale del sopramenzionato criterio, utilizzando il linguaggio delle «varietà di Serre» (cfr. [2]) anche se quasi tutta la trattazione potrebbe essere riscritta per schemi di tipo finito sopra un corpo. Successivamente si studiano tutti i casi possibili in relazione al comportamento delle fibre; nel secondo paragrafo si analizzano le corrispondenze le cui fibre — in un verso — hanno intersezione irriducibile, in 3.1 le considerazioni del § 2 vengono estese a corrispondenze con fibre pure ed equidimensionali ed infine in 3.2, utilizzando in doppio verso il teorema di piattezza generica, le considerazioni e le conclusioni del § 2 vengono traslate a corrispondenze del tutto generali.

§ 1. — In questo paragrafo viene data una nuova esposizione di un noto criterio di non degenerabilità (cfr. [11]); in tal modo si vuole, da un lato, utilizzare qui e nel seguito il «linguaggio delle varietà di Serre» che ci è sembrato più duttile in considerazioni di questo tipo [(1)], da un altro far luce su alcuni lati oscuri di [11].

Siano quindi, k un corpo algebricamente chiuso, X, Y due varietà (su k) irriducibili [(2)] e C una corrispondenza irriducibile tra X e Y (i.e. una sottovarietà irriducibile di $X \times Y$).

Supponiamo inoltre che $\mathrm{pr}_1 : C \to X$ sia dominante (ovvero che C sia non degenere su X); il «principio del computo delle costanti» conseguenza immediata del «teorema della dimensione delle fibre di un morfismo» (cfr. [2]), nel caso particolare che qui si considera, si può così enunciare:

Posto $Y' = \overline{\mathrm{pr}_2 (C)}$, esiste un aperto non vuoto U di X contenuto in $\mathrm{pr}_1 (C)$ ed un aperto non vuoto V di Y' contenuto in $\mathrm{pr}_2 (C)$ tale che per ogni x di U le componenti irriducibili di $C (x)$ abbiano tutte la stessa dimensione $\dim C - \dim X$ (minima) e parimenti per ogni y di V le componenti irriducibili di $C^{-1} (y)$ abbiano tutte la stessa dimensione $\dim C - \dim Y'$ (minima) ed inoltre si ha:

$$\dim X + \dim C (x) = \dim Y' + \dim C^{-1} (y).$$

Posto $Y' = Y$ si perviene alla condizione necessaria per la non degenerabilità di C su Y

$$\delta = \dim X + \dim C (x) - \dim Y \geqslant 0.$$

Posto in generale $\dim Y = \dim Y' + \varepsilon$ $(\varepsilon \geqslant 0)$, si consideri un

---

(1) In tal modo, infatti, si potranno utilizzare risultati attinenti agli schemi, poggiando tacitamente sulle considerazioni svolte in [8] (II.2.6) e in [4] (IV_3 10.9 e 10.10).

(2) i.e. prevarietà irriducibili separate.

punto (x, y) di C con $x \in U$, $y \in V$ (certamente esistente nell'aperto non vuoto di C intersezione di $U \times Y'$ e $X \times V$, in quanto C sottovarietà irriducibile di $X \times Y'$) e sia $\widetilde{C(x)}$ una componente irriducibile di $C(x)$ per (x, y).

La varietà $C^* = (X \times \widetilde{C(x)}) \cap C$ (3) in generale non è irriducibile e non tutte le sue componenti sono dominanti $\widetilde{C(x)}$. Sia C^*_D una componente irriducibile di C^* dominante $\widetilde{C(x)}$.

Risulta allora:

$$\dim C^*_D - \dim \widetilde{C(x)} \geqslant \dim C - \dim Y'.$$

(cfr. [2], cor. 4 pag. 110); ricordato che y appartiene a $\widetilde{C(x)}$, $C^{*-1}_D(y) \subseteq C^{-1}(y)$ e $\dim C^{*-1}_D(y) \geqslant C^*_D - \dim \widetilde{C(x)}$ si perviene al fatto che tutte le C^*_D hanno la stessa dimensione (cfr. [2] prop. 3 pag. 98) (uguale a $\dim C + \dim C(x) - \dim Y'$) (4).

Detto $X^* = \overline{\mathrm{pr}_1(C^*_D)}$, esiste un aperto non vuoto W di X^* contenuto in $\mathrm{pr}_1(C^*_D)$ tale che per ogni x^* di W si abbia

$$\begin{aligned}\dim C^*_D = \dim X^* + \dim C^*_D(x^*) &= 2 \dim C - \dim X - \dim Y' = \\ &= \dim C(x) + \dim C^{-1}(y).\end{aligned}$$

Posto

$\eta = \dim X^* - \dim C(x) + \dim C^*_D(x^*) = \dim X + \dim C(x) - \dim Y'$ si ha $\delta \leqslant \eta$; ora $Y' = Y$ se e solo se $\dim Y' = \dim Y$ (cfr. [2] prop. 1, pag. 97) ovvero se e solo se $\delta = \eta$.

OSSERVAZIONI:

1.1. Non si può sostituire nelle considerazioni precedenti alla componente dominante C^*_D, una componente massimale C^*_M come si prova con il seguente esempio.

---

(3) Si verifica facilmente, ad es. utilizzando [2] (VI. 3. Th. 3), che

$$\dim C^* \geqslant 2 \dim C - \dim X - \dim Y'.$$

(4) Se la corrispondenza C fosse chiusa in $X \times Y$, si può pervenire a questa conclusione utilizzando un enunciato più generale del teorema sulla dimensione delle fibre di un morfismo, in quanto $\widetilde{C(x)}$ risulta chiuso in Y'.

Si consideri la corrispondenza tra $X = \mathbf{P}_2$ e $Y = \mathbf{P}_3$ che ad un punto x di $\mathbf{P}_2$ «associa» la retta di $\mathbf{P}_3$ proiettante x da un punto fisso complementare di $\mathbf{P}_2$.

In tal caso C^* si spezza in due componenti irriducibili, una C^*_M di dimensione 2 (ma non dominante $C(x)$) ed una C^*_D (dominante) di dimensione uno; pur essendo C non degenere su Y, operando su C^*_M, si ottiene $0 = \delta < \eta = 1$.

Peraltro è da escludere che sussistano in generale le seguenti uguaglianze

$\dim X^* = \dim(\mathrm{pr}_1 C^*)$ [5], $\quad \dim C^*_D(x^*) = \dim C^*(x^*)$. (cfr. [11]) [6].

anche se come faremo vedere qui di seguito — con alcune opportune modifiche — si può scegliere C^*_D in modo tale che sussistano le uguaglianze precedenti.

1.2. Anche in considerazione delle argomentazioni che svilupperemo nei paragrafi successivi è opportuno introdurre una corrispondenza Γ che lavori ai fini del criterio come la C^*.

Preso il morfismo $C^* \to \widetilde{C(x)}$ si consideri per il teorema di piattezza generica un aperto non vuoto V' di $\widetilde{C(x)}$ tale che $\mathrm{pr}_2^{-1}(V') \to V'$ sia piatto (cfr. [4] IV_2 6.9.1). Le componenti irriducibili di $\mathrm{pr}_2^{-1}(V')$ sono tutte dominanti V' ([4] IV_2 2.3.4), sono in corrispondenza biunivoca con le componenti irriducibili di C^* con traccia sull'aperto $\mathrm{pr}_2^{-1}(V')$ e quindi con le componenti irriducibili di C^* dominanti $\widetilde{C(x)}$; si indichi allora con Γ la sottovarietà di C^* unione delle sue componenti dominanti $\widetilde{C(x)}$ (tutte della stessa dimensione e quindi massimali in Γ).

§ 2. **Caso di corrispondenze ad intersezione irriducibile di fibre.**

Analizziamo in questo paragrafo i vari casi che si possono presentare nella situazione particolare di corrispondenze a fibre

---

(5) $\qquad \mathrm{pr}_1 C^* = \{x' \in X;\ \widetilde{C(x)} \cap C(x') \neq \emptyset\}$

(6) Ad esempio presa una quadrica Q di $\mathbf{P}_4$ singolare con vertice un punto, si consideri la corrispondenza tra X, uno dei due sistemi irriducibili di piani giacenti su Q, e $Y = Q$ che associa ad $x \in X$ il relativo piano giacente su Q. La corrispondenza C^* si spezza in due componenti, una C^*_D di dimensione due dominante $C(x)$ ed una di dimensione uno dominante X ma non $C(x)$; ora $0 = \dim X^* < \dim X = \dim(\mathrm{pr}_1 C^*) = 1$.

$C(x)$ tali che l'intersezione di due di esse qualora non vuota risulti irriducibile (7) (risp. quasi ovunque irriducibile) (8).

Premettiamo il seguente:

LEMMA: *sia* $\varphi : Z \to T$ *un morfismo di varietà, dominante, dove* T *è irriducibile e tale che esista un aperto non vuoto* U *di* T *contenuto in* $\varphi(Z)$ *con* $\varphi^{-1}(x)$ *irriducibile per ogni* x *di* U. *Esiste allora un aperto non vuoto* V *contenuto in* U *tale che* $\varphi^{-1}(V)$ *sia irriducibile.*

(Infatti per le ipotesi fatte esiste una ed una sola componente irriducibile di Z dominante T tramite φ. L'aperto $V = U \cap (T - \overline{(\cup \varphi(Z_j))}$ — dove l'unione è estesa a tutte le componenti irriducibili Z_j di Z non dominanti T — verifica i requisiti della tesi).

Continuando con le stesse notazioni del § 1, consideriamo una qualsiasi C^*_D (risp. una C^*_D con X^* di dimensione massima). Considerata la corrispondenza $(X^* \times \widetilde{C(x)}) \cap C$ contenente C^*_D esiste un aperto U_1 di X^* tale che le fibre $[(X^* \times \widetilde{C(x)}) \cap C](x')$ $(x' \in U_1)$ siano tutte irriducibili e quindi, a norma del lemma precedente, un aperto $V_1 \subseteq U_1$, con fibre sempre irriducibili e con $(V_1 \times \widetilde{C(x)}) \cap C$ aperto irriducibile di $(X^* \times \widetilde{C(x)}) \cap C$, intersecante C^*_D; risulta allora che $C^*_D(x^*) = \widetilde{C(x)} \cap C(x^*)$ ed è irriducibile.

In relazione, allora, alla particolare corrispondenza C possono accadere le seguenti eventualità:

a) $X^* = \{x\}$. In tal caso $\eta = 0$ e quindi se $\delta \geqslant 0$ si ha $\delta = \eta$ (9).

b) $X^* = X$. In tal caso allora in relazione a $\widetilde{C(x)}$ ed all'ambiente Y si può parlare di eccedentarietà d'intersezione σ della famiglia $C(x')$ $(x' \in X)$ (cfr. [16] oppure [1],

(7) La situazione particolare che qui si considera non è come si potrebbe credere «eccezionale»; infatti in tutti i lavori già citati nella introduzione (ad es. [5], [7], [9], [12], [14], [17]) le fibre $C(x)$ sono varietà lineari o prodotti di varietà lineari, quindi ad intersezione irriducibile.

(8) Nel senso che considerata una fibra $C(x)$ e posto $B = \{x' (\in \mathrm{pr}_1 \Gamma);\ \widetilde{C(x)} \cap C(x')$ riducibile$\}$ si abbia $\dim B < \dim \mathrm{pr}_1 \Gamma$.

(9) Peraltro può accadere che $\eta = 0$ e $\delta < 0$. Ad esempio considerata la quadrica Q della nota (6) si consideri la «stessa corrispondenza» però tra X e $Y = \mathbf{P}_4$; riesce allora $X^* = \{x\}$ e $\delta = -1$.

3 - 07) nel senso che esiste un aperto non vuoto W' di X tale che $\sigma = \dim [\widetilde{C(x)} \cap C(x')] - \dim \widetilde{C(x)} - \dim C(x') + \dim Y$ per ogni x' di W'.
In relazione all'eccedentarietà σ può accadere che

b$_1$) $\sigma \leqslant 0$. Allora $\eta = \dim X^* - \dim C(x) + \dim C^*_D(x^*) = \dim X - \dim C(x) + \dim \widetilde{C(x)} + \dim C(x^*) - \dim Y + \sigma \leqslant \delta \leqslant \eta$ e ciò perchè x^* può essere scelto in $U \cap W \cap W'$ (risp. $U \cap W \cap W' \cap W''$ dove W'' è un aperto dato dalla quasi-ovunque irriducibilità).

b$_2$) $\sigma > 0$. In tal caso $\dim X - \dim Y + \varepsilon + \dim C(x) = \dim X^* + \dim C^*_D(x^*) - \dim C(x) = \dim X - \dim Y + \sigma$ cioè $\sigma = \varepsilon$ ovvero C è degenere su Y.

c) $X^* \subsetneq X$. La difficoltà, in questo caso, sta innanzi tutto nel formulare una efficace definizione di eccedentarietà [10]. Supponiamo quindi — come è corretto — che tutte le varietà X^* siano strettamente contenute in X. Consideriamo quindi le X^* di dimensione massima. In tale modo le fibre generiche relative a dette X^* sono irriducibili e di dimensione costante (i. e. $\dim C^*_D - \dim X^*$) e quindi indicheremo con σ — eccedentarietà d'intersezione rispetto a $\widetilde{C(x)}$ e Y della famiglia $C(x')$ ($x' \in \cup X^*$, X^* di dimensione massima) — il valore costante dato da
$\dim (\widetilde{C(x)} \cap C(x')) - 2 \dim \widetilde{C(x)} + \dim Y$ per ogni x' di un opportuno aperto non vuoto $W(X^*)$ di X^* [11].
In relazione all'eccedentarietà σ può accadere che:

c$_1$) $\sigma \leqslant 1$. Allora $\eta = \dim X^* - \dim C(x) + \dim C^*_D(x^*) < \dim X - \dim C(x) + 2 \dim C(x) - \dim Y + \sigma$ cioè $\eta \leqslant \delta$.

c$_2$) $\sigma > 1$. In questo caso si ottiene $\dim X^* = \dim X - (\sigma - \varepsilon)$ e la dimostrazione della non degenerablità di C su Y passa per la diseguaglianza $\dim X - \dim X^* - \sigma \geqslant 0$

---

(10) Dovendo seguire [1], (3-07) in tal caso si dovrebbe porre $\sigma = 0$, ma questa posizione non appare utile per queste considerazioni.

(11) Se esiste una X^* di dimensione massima passante per x o più in generale se U è denso in qualche X^* di dimensione massima (ad es. per $U = X$) allora σ è pure eccedentarietà d'intersezione secondo [16], per $x' \in W(X^*)$ di quella X^*.

a cui talvolta si perviene tramite la
$\dim X^* \leqslant \dim \{x' (\in X);\ \dim [C(x')] \geqslant$
$\geqslant 2 \dim C(x) - \dim Y + \sigma\}$.

OSSERVAZIONI:

2.1. — Si possono fare analoghe considerazioni a queste sopra esposte con sole ipotesi locali. Si supponga infatti che esista un aperto W'' contenente x di X dove l'intersezione delle fibre $C(x)$ e $C(x')$ ($x' \in W''$) qualora non vuota risulti irriducibile. Detta X^* una varietà di dimensione massima fra quelle passanti per x (i.e. $\dim X^* = \dim_x \mathrm{pr}_1 \Gamma$) e fatte le stesse argomentazioni — anzi semplificate — sulla eccedentarietà σ si dimostra che $\sigma \leqslant 0$ implica la non degenerabilità di C su Y.

2.2. — Il più delle volte accade proprio che l'eccedentarietà sia negativa o nulla, permettendo in tal modo di concludere per la non degenerabilità della corrispondenza, senza indugiare nello studio degli altri casi (cfr. ad es. [18]).

§ 3. **Caso di corrispondenze del tutto generali.**

3.1. — Consideriamo ora, sempre con le notazioni del § 1, una corrispondenza C tale che tutte le fibre $C(x)$ ($x \in X$) siano pure e della stessa dimensione (i.e. $U = X$).

Preso un X^* di dimensione massima ed un relativo $\tilde{C}^*_D$, in relazione al morfismo $\mathrm{pr}'_1 : C^* \to X$ si ponga $Z^* = \mathrm{pr}'^{-1}_1 (X^*)$. A norma del teorema di piattezza generica per il morfismo $Z^* \to X^*$ ([4] IV_2 6.9.1) esiste un aperto U' di X^* tale che il morfismo $\mathrm{pr}'^{-1}_1 (U') \to U'$ sia piatto; esiste inoltre una corrispondenza biunivoca fra le componenti irriducibili di $\mathrm{pr}'^{-1}_1 (U')$ e le componenti irriducibili di Z^* con traccia su $\mathrm{pr}'^{-1}_1 (U')$.

Essendo tutte le componenti irriducibili di $\mathrm{pr}'^{-1}_1 (U')$ dominanti U' (per proprietà dei morfismi piatti), esiste una corrispondenza biunivoca fra le componenti di Z^* dominanti X^* e le componenti di Z^* con traccia su $\mathrm{pr}'^{-1}_1 (U')$; inoltre per la massimalità di X^* tutte le componenti di Z^* dominanti X^* sono dei C^*_D e quindi della stessa dimensione di $\tilde{C}^*_D$. Per [8] III.9.6 tutte le fibre «generiche» dei morfismi $C^*_D \to X^*$ (C^*_D componente di Z^* dominante X^*) hanno componenti irriducibili tutte della stessa dimensione, dato che ciò accade per i punti di U'. In tal modo per $x' \in U'$ si ha

$\dim C^*_D(x') = \dim [\widetilde{C(x)} \cap C(x')]$. In questa situazione per X^* di dimensione massima (i.e. $\dim X^* = \dim \mathrm{pr}_1 \Gamma$), mutatis mutandis, si possono fare le stesse considerazioni già svolte in § 2, pervenendo agli stessi risultati.

3.2. — Utilizzando localmente il risultato di § 3.1), si possono elencare i vari casi possibili per una corrispondenza irriducibile C del tutto generale.

Si consideri infatti un X^* passante per x, di dimensione massima fra quelli passanti per x, $Z^* = \mathrm{pr}'_1{}^{-1}(X^*)$; il morfismo $\mathrm{pr}'_1{}^{-1}(U' \cap U) \to U' \cap U$ è piatto e tuute le deduzioni svolte in 3.1. possono essere rifatte e quindi per gli elementi $x' \in U' \cap U$ si ha

$$\dim C^*_D(x') = \dim [\widetilde{C(x)} \cap C(x')] \text{ e } \dim C(x') = \dim C(x).$$

La nozione di eccedentarietà può essere trascritta da § 1 ed i casi possibili con le stesse conseguenze non sono altro che quelli già esposti in §2 o nell'osservazione 2.1.

BIBLIOGRAFIA

[1] CHEVALLEY C., *Les classes d'équivalence rationelle I-II - Anneaux de Chow et applications.* Sem. Chévalley. Paris (1958).

[2] CHEVALLEY C., *Fondements de la géométrie algébrique.* Sem. Chévalley. Paris (1958).

[3] CONTE A. - MURRE I. P., *The Hodge conjecture for fourfolds admitting a covering by rational curves.* Math. Ann. 238 (1) - (1978).

[4] GROTHENDIECK A., *Eléments de géométrie algébrique.* Ch. IV. Publ. Math. I.H.E.S. n. 20, 24, 28 (1964-1966).

[5] GUAZZONE S., *Sulle ipersuperficie di S_k e di ordine s che appartengono alla ipersuperficie generale di ordine n di S_r ($r > k$).* Rend. Sem. Mat. Padova XXI (2) (1952).

[6] GUAZZONE S., *Su certe sezioni spaziali di varietà intersezioni complete di due forme di S_r.* Rend. Sem. Mat. Padova XXI (2) (1952).

[7] GUAZZONE S., *Sulle quadriche che appartengono alle forme generali di dato ordine.* Atti IV congresso U.M.I. - Taormina (1953).

[8] HARTSHORNE R., *Algebraic geometry.* Springer Verlag - Heidelberg (1977).

[9] MORIN U., *Sull'insieme degli spazi lineari contenuti in una ipersuperficie algebrica.* Rend. Acc. Naz. Lincei (VI), 24, (1936).

[10] MURRE I. P., *Discussion of a theorem of Morin.* Preprint - Simp. geom. Alg. Bressanone (1979).

[11] PREDONZAN A., *Una condizione di non degenerabilità per corrispondenze algebriche irriducibili.* Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, Vol. I (1) (1969).

[12] PREDONZAN A., *Intorno agli S_k giacenti sulla varietà intersezione completa di più forme.* Rend. Acc. Naz. Lincei VIII (5) (1948).

[13] PREDONZAN A., *Intorno ai sistemi di S_k che appartengono al monoide generale di dato ordine.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova XXI (2) (1952).

[14] PREDONZAN A., *Sui monoidi V^n_{k-1} di S_k situati sulla forma generale F^n_{r-1} di S_r.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova XXI (2) (1952).

[15] ROSINA B. A., *Sugli spazi lineari contenuti in un'ipersuperficie con un punto multiplo.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova XXVIII (1958).

[16] SAMUEL P., *La notion de multiplicité en Algèbre et en géométrie algébrique.* Jour. de Math. XXX Fasc. 2 (1951).

[17] SEGRE B., *Intorno agli S_k che appartengono alle forme generali di dato ordine.* Nota I, II. Rend. Acc. Naz. Lincei VIII (4) (1948).

[18] TENNISON B. R., *On the quartic threefold.* Proc. London math. Soc. (3), 29, (1974).