UN TEOREMA DI REGOLARITA' RELATIVO AD UN PROBLEMA UNILATERALE (*)

di MIRELLA BIANCARDI, ANNA ESPOSITO e LUISA ANNA MACCHETTA
(a Napoli) (**)

SOMMARIO. — *Si considera una disequazione variazionale connessa ad un problema di contatto tra membrane, e si dimostrano un teorema di regolarità ed un teorema di dipendenza continua.*

SUMMARY. — *A variational inequality connected with a contact problem between membrane is considered. A regularity theorem and a continuous dependence theorem are proved.*

In un recente lavoro di R. Toscano e A. Maceri [9] viene studiata la disequazione variazionale:

$$(0) \qquad (u_1, u_2) \in K : \int_\Omega (v_1 - u_1) A u_1 \, dx + \int_\Omega (v_2 - u_2) A u_2 \, dx \geqslant$$
$$\int_\Omega (v_1 - u_1) f_1 \, dx + \int_\Omega (v_2 - u_2) f_2 \, dx \quad \forall \, (v_1, v_2) \in K,$$

ambientata nello spazio $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$, con $\mathcal{S} = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, nella quale K è un sottoinsieme convesso di $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ ed A un operatore differenziale lineare del secondo ordine uniformemente ellittico.

La (0) traduce un problema di contatto tra due membrane di forma uguale, che occupano una porzione di piano Ω e sono fissate al bordo.

(*) Pervenuto in Redazione il 18 febbraio 1981.
(**) Indirizzo degli autori: Istituto di Matematica della Facoltà di Ingegneria - Via Claudio, 21 - 80125 Napoli.

Nella nota citata vengono fra l'altro stabiliti, oltre alla esistenza ed unicità, teoremi di regolarità e di dipendenza continua.

In questo lavoro si considera una disequazione variazionale analoga alla (0), diciamola per ora (00), nella quale i due integrali al primo membro e quelli al secondo membro, invece che ad un medesimo aperto Ω sono estesi a due aperti Ω_1 ed Ω_2, con $\overline{\Omega}_2 \subset \Omega_1$. Naturalmente anche la (00) è connessa al problema fisico sopra accennato, ma con le due membrane fissate su due bordi distinti.

Scopo principale del lavoro è di indagare sulla regolarità della soluzione $u = (u_1, u_2)$ della (00), intesa in senso generalizzato, soluzione che inizialmente appartiene ad $H^1_0(\Omega_1) \times H^1_0(\Omega_2)$. Per la seconda componente u_2 la questione si risolve come in [9] e con lo stesso procedimento seguito in [9] (cfr. anche [3], [8]), si conclude che essa appartiene ad $H^2(\Omega_2)$; per quanto riguarda la prima componente u_1, il procedimento di [9] non si può estendere alla (00) e d'altronde non si può dire che essa appartiene ad $H^2(\Omega_1)$, come è dimostrato con un esempio (n. 2) e come del resto si intuisce pensando alla questione fisica cui la (00) è connessa.

Si pone perciò per u_1 la questione della regolarità, e in questa nota si dimostra che u_l appartiene ad H^2 *separatamente* negli aperti Ω_2 ed $\Omega_1 - \overline{\Omega}_2$. Il procedimento dimostrativo, fondato su opportune formule di maggiorazione relative ai rapporti incrementali di u_1 di ordine 2, pur ispirandosi ad una tecnica già adoperata (cfr. ad es. [2], [4], [7]), non ne costituisce una semplice utilizzazione: per adattare tale tecnica occorrono infatti particolari accorgimenti, non avendosi informazioni sulla traccia di u_1 sulla frontiera di Ω_2.

La regolarità viene studiata nel n. 2, ove si stabiliscono anche delle formule di maggiorazione. Dai risultati ottenuti si deduce poi, nel n. 3, un teorema di dipendenza continua (teor. 4).

Nel n. 1, in cui si introduce il problema, vengono stabilite (teor. 1) alcune proprietà della soluzione.

Ringraziamo il Prof. R. Toscano per gli utili consigli sulla questione.

1. — Siano:

— Ω_1 e Ω_2 aperti limitati di $\mathcal{R}^n$, con $\overline{\Omega}_2 \subset \Omega_1$;

— A un operatore uniformemente ellittico:

$$A = - \sum_{i,j}^{1,\dots,n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

con a_{ij} funzioni misurabili e limitate in Ω_1;

— f_1 e f_2 elementi rispettivamente di $H^{-1}(\Omega_1)$ ed $H^{-1}(\Omega_2)$;

— δ un numero reale non negativo.

Consideriamo la seguente forma bilineare, definita per $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ appartenenti ad $H^1_0(\Omega_1) \times H^1_0(\Omega_2)$, continua e coercitiva:

$$a(u, v) = \sum_{i,j}^{1,\dots,n} \left[\int_{\Omega_1} a_{ij}(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega_2} a_{ij}(x) \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \frac{\partial v_2}{\partial x_j} dx \right]$$

ed il funzionale definito per $v = (v_1, v_2) \in H^1_0(\Omega_1) \times H^1_0(\Omega_2)$ lineare e continuo:

$$< \mathfrak{L}, v > = < f_1, v_1 > + < f_2, v_2 >.$$

Detto K il sottoinsieme non vuoto di $H^1_0(\Omega_1) \times H^1_0(\Omega_2)$, chiuso e convesso

(1) $\quad K = \{ (v_1, v_2) \in H^1_0(\Omega_1) \times H^1_0(\Omega_2) \ : v_1 + \delta \geqslant v_2 \ q.o. \ in \ \Omega_2 \},$

la disequazione variazionale

(2) $\quad u \in K : a(u, v - u) \geqslant <\mathfrak{L}, v - u> \quad \forall \, v \in K$

ammette, come è noto (cfr. [5], [8]), un'unica soluzione $u = (u_1, u_2)$ e risulta

(3) $\quad \| u_1 \|_{H^1_0(\Omega_1)} + \| u_2 \|_{H^1_0(\Omega_2)} \leqslant \frac{1}{\alpha} (\| f_1 \|_{H^{-1}(\Omega_1)} + \| f_2 \|_{H^{-1}(\Omega_2)}$

dove α è la costante di coercitività della forma $a(u, v)$.

Allo scopo di evidenziare alcune proprietà della soluzione della (2), che utilizzeremo in seguito, denotiamo con Ω il sottoinsieme (aperto) di Ω_2 costituito dai punti x_0 intorno ai quali $u_1 + \delta - u_2$ (q.o. $\geqslant 0$ in Ω_2) ha un minorante positivo; evidentemente tale funzione ha un minorante positivo in ogni sottoinsieme chiuso di Ω.

Sussiste il seguente:

TEOREMA 1. *Le funzioni u_1 e u_2 verificano, nel senso delle distribuzioni, le relazioni:*

(4) $\quad A u_1 + A u_2 = f_1 + f_2, \ A u_2 \leqslant f_2 \ \ su \ \ \Omega_2$

(5) $\quad A u_1 = f_1 \ \ su \ \ \Omega_1 - \overline{\Omega_2}$

ed inoltre, se Ω non è vuoto, si ha:

(6) $\quad A u_1 = f_1, \ A u_2 = f_2 \ \ su \ \ \Omega.$

La prima delle (4) e la (5) si ottengono ponendo nella (2) rispettivamente $v = (u_1 + \varphi, u_2 + \varphi)$ e $v = (u_1 + \psi, u_2)$, con φ e ψ scelte arbitrariamente in $C_0^\infty(\Omega_2)$ e in $C_0^\infty(\Omega_1 - \overline{\Omega}_2)$.

La seconda delle (4) si deduce analogamente ponendo nella (2) $v = (u_1, u_2 - \varphi)$ con φ appartenente a $C_0^\infty(\Omega_2)$, $\varphi \geqslant 0$.

Per dimostrare la prima delle (6) scegliamo un arbitrario elemento non nullo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e consideriamo la coppia $v_\varepsilon = (u_1 - \varepsilon\varphi, u_2)$; proviamo che è possibile scegliere $\varepsilon > 0$ in modo che $v_\varepsilon \in K$, cioè in modo che risulti

$$u_1 + \delta - \varepsilon\varphi \geqslant u_2 \tag{7}$$

q.o. in Ω_2. E' ovvio che la (7) è vera q.o. in Ω_2-supp φ. Essendo supp φ chiuso e contenuto in Ω, esiste $m > 0$ tale che $u_1 + \delta - u_2 \geqslant m$ q.o. in supp φ: è allora evidente che scegliendo $\varepsilon < m/\max|\varphi|$ la (7) è verificata anche q.o. in supp φ.

Sostituendo la coppia v_ε nella (2) si conclude che sussiste la prima delle (6). Per stabilire la seconda delle (6) basta osservare che se v_ε appartiene a K anche la coppia $w_\varepsilon = (u_1, u_2 + \varepsilon\varphi)$ appartiene a K e quindi si può porre nella (2) $v = w_\varepsilon$.

2. — In questo numero vogliamo studiare la regolarità della soluzione $u = (u_1, u_2)$ della disequazione variazionale (2).

Supporremo Ω_1, Ω_2 di classe C^2, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}_1)$, $f_1 \in \mathfrak{L}^p(\Omega_1)$, $f_2 \in \mathfrak{L}^p(\Omega_2)$ $(2 \leqslant p < +\infty)$, e denoteremo con c una costante indipendente da f_1, f_2 e δ.

Con lo stesso procedimento seguito in [9] si prova che $u_2 \in H^{2,p}(\Omega_2)$ e che risulta:

$$\| A u_2 \|_{\mathfrak{L}^p(\Omega_2)} \leqslant 2 (\| f_1 \|_{\mathfrak{L}^p(\Omega_1)} + \| f_2 \|_{\mathfrak{L}^p(\Omega_2)}), \tag{8}$$

nonchè

$$\| u_2 \|_{H^{2,p}(\Omega_2)} \leqslant c (\| f_1 \|_{\mathfrak{L}^p(\Omega_1)} + \| f_2 \|_{\mathfrak{L}^p(\Omega_2)}). \tag{9}$$

Quanto alla prima componente u_1, tenendo presente che il secondo membro della (5) appartiene a $\mathfrak{L}^p(\Omega_1 - \overline{\Omega}_2)$ e che, per la (4), $A u_1$ è elemento di $\mathfrak{L}^p(\Omega_2)$, si deduce in modo ovvio (cfr. [6]):

$$u_1 \in H^{2,p}_{loc}(\Omega_2), \quad u_1 \in H^{2,p}_{loc}(\Omega_1 - \overline{\Omega}_2). \tag{10}$$

Inoltre, detto Ω un aperto a chiusura contenuta in Ω_2 oppure in $\Omega_1 - \overline{\Omega}_2$, per ogni aperto Ω' tale che $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ si ha (cfr. [1]):

$$(11) \qquad \| u_1 \|_{H^{2,p}(\Omega')} \leqslant c\,(\| A u_1 \|_{\mathcal{L}^p(\Omega')} + \| u_1 \|_{\mathcal{L}^p(\Omega)})\,;$$

dalla (11) e dalla (8), tenendo conto della prima delle (4) e della (5), si ricava la formula di maggiorazione:

$$(12) \qquad \| u_1 \|_{H^{2,p}(\Omega')} \leqslant c\,(\| f_1 \|_{\mathcal{L}^p(\Omega_1)} + \| f_2 \|_{\mathcal{L}^p(\Omega_2)} + \| u_1 \|_{\mathcal{L}^p(\Omega)})\,.$$

Sorge dunque il problema della regolarità di u_1 in tutto Ω_1. Supposto $p = 2$, vedremo, con un esempio, che non si può asserire l'appartenenza di u_1 ad $H^2(\Omega_1)$; si può invece affermare che u_1 è dotato di derivate seconde deboli di quadrato sommabile, separatamente in Ω_2 ed in $\Omega_1 - \overline{\Omega}_2$. Precisamente sussiste il seguente:

TEOREMA 2. *Nelle ipotesi Ω_1, Ω_2 di classe C^2, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}_1)$, $f_1 \in \mathcal{L}^2(\Omega_1)$ ed $f_2 \in \mathcal{L}^2(\Omega_2)$, detta $u = (u_1, u_2)$ la soluzione della disequabione (2), per la prima componente u_1 si ha:*

$$(13) \qquad u_1 \in H^2(\Omega_2), \quad u_1 \in H^2(\Omega_1 - \overline{\Omega}_2)$$

e risulta:

$$(14) \qquad \| u_1 \|_{H^2(\Omega_2)} \leqslant c\,(\| f_1 \|_{\mathcal{L}^2(\Omega_1)} + \| f_2 \|_{\mathcal{L}^2(\Omega_2)} + \delta)$$

$$(15) \qquad \| u_1 \|_{H^2(\Omega_1 - \overline{\Omega}_2)} \leqslant c\,(\| f_1 \|_{\mathcal{L}^2(\Omega_1)} + \| f_2 \|_{\mathcal{L}^2(\Omega_2)} + \delta)$$

con c costante indipendente da f_1, f_2 *e da* δ.

Tenendo conto della (10) è sufficiente far vedere che:

(16) $\forall\, \bar{x} \in \partial\Omega_1$ esiste un intorno $\mathfrak{J}$ di $\bar{x}$ tale che $u_1 \in H^2(\mathfrak{J} \cap \Omega_1)$,

(17) $\forall\, \bar{x} \in \partial\Omega_2$ esiste un intorno $\mathfrak{J}$ di $\bar{x}$ tale che $u_1 \in H^2(\mathfrak{J} \cap \Omega_2)$ e $u_1 \in H^2(\mathfrak{J} \cap (\Omega_1 - \overline{\Omega}^2))$.

La (16) si stabilisce seguendo un noto procedimento (cfr. ad esempio [2], [4], [7]), tenendo presente che u_1 ha traccia nulla su $\partial\Omega_1$ e che sussiste la (5), nel senso delle distribuzioni, cioè che per ogni $v \in H^1_0(\Omega_1 - \overline{\Omega}_2)$ risulta:

$$(18) \qquad \sum_{i,j}^{1,\dots,n} \int_{\Omega_1 - \overline{\Omega}_2} a_{ij}(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx = \int_{\Omega_1 - \overline{\Omega}_2} f_1 v\, dx\,.$$

Tenendo anche conto della (3) il procedimento conduce inoltre alla formula di maggiorazione

$$\| u_1 \|_{H^2(\mathfrak{I} \cap \Omega_1)} \leqslant c \, (\| f_1 \|_{\mathfrak{L}^2(\Omega_1)} + \| f_2 \|_{\mathfrak{L}^2(\Omega_2)}) \, , \tag{19}$$

con c costante indipendente da f_1, f_2 e δ.

Per quanto riguarda la (17), osserviamo intanto che insieme alla (18), sussiste una relazione analoga con Ω_2 in luogo di $\Omega_1 - \overline{\Omega}_2$ ed $f_1 + f_2 - A u_2$ in luogo di f_1 (cfr. (4)). Però non si può seguire il procedimento suddetto in quanto u_1, mentre ha traccia nulla su $\partial \Omega_1$, non necessariamente ha traccia nulla su $\partial \Omega_2$.

Consideriamo allora un intorno $\mathcal{U}$ di $\bar{x} \in \partial \Omega_2$ contenuto in Ω_1 ed indichiamo con $\mathcal{U}^+$ la porzione di $\mathcal{U}$ contenuta in Ω_2.

Denoteremo con $\mathcal{S}_r$ la sfera di $\mathcal{R}^n$ di centro l'origine e raggio r, con Σ_r la semisfera intersezione di $\mathcal{S}_r$ con il semispazio $x_n > 0$, e con $\partial_1 \Sigma_r$ l'intersezione di $\mathcal{S}_r$ con l'iperpiano $x_n = 0$.

In un primo tempo supponiamo che

$$\mathcal{U} = \mathcal{S}_r \, , \quad \mathcal{U}^+ = \Sigma_r \, , \quad \bar{x} = 0, \quad \mathcal{S}_r \cap \partial \Omega_2 = \partial_1 \Sigma_r \, ; \tag{20}$$

naturalmente si ha, nel senso delle distribuzioni:

$$A u_1 = f_1 \quad \text{su} \quad \mathcal{S}_r - \overline{\Sigma}_r \tag{21}$$

$$A u_1 = - A u_2 + f_1 + f_2 \quad \text{su} \quad \Sigma_r \, . \tag{22}$$

Introduciamo le forme bilineari:

$$a_1 (v_1 , w_1) = \sum_{i,j}^{1,\dots,n} \int_{\mathcal{S}_r} a_{ij} (x) \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \frac{\partial w_1}{\partial x_j} d x$$

$$a_2 (v_2 , w_2) = \sum_{i,j}^{1,\dots,n} \int_{\Sigma_r} a_{ij} (x) \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \frac{\partial w_2}{\partial x_j} d x \, ,$$

definite rispettivamente in $[H^1 (\mathcal{S}_r)]^2$ e in $[H^1 (\Sigma_r)]^2$, ed il convesso

$$K' = \{ (v_1 , v_2) \in H^1_0 (\mathcal{S}_r) \times H^1_0 (\Sigma_r) : u_1 + v_1 + \delta \geqslant u_2 + v_2 \;\; q.o. \;\; in \;\; \Sigma_r \}$$

e notiamo che, per ogni coppia $(v_1 , v_2) \in K'$, risulta $(u_1 + v_1 , u_2 + v_2) \in K$, intendendo v_1 e v_2 prolungate a zero rispettivamente su $\Omega_1 - \mathcal{S}_r$ e su $\Omega_2 - \Sigma_r$; dalla (2) si ottiene allora:

$$a_1 (u_{1'} - v_1) + a_2 (u_{2'} - v_2) \leqslant \tag{23}$$

$$\leqslant (\| f_1 \|_{\mathfrak{L}^2(\Omega_1)} + \| f_2 \|_{\mathfrak{L}^2(\Omega_2)}) \, (\| v_1 \|_{\mathfrak{L}^2(S_r)} + \| v_2 \|_{\mathfrak{L}^2(\Sigma_r)}) \, .$$

Per ogni v appartenente a $\mathfrak{L}^2 (\mathcal{S}_r)$, consideriamo il rapporto incrementale di v rispetto ad x_l $(l = 1, \dots, n)$:

$$\rho_l^h v(x) = \frac{v(x + h^l) - v(x)}{h}$$

dove h^l denota il punto di $\mathcal{R}^n$ avente uguale ad h la coordinata l-ma e le rimanenti coordinate nulle; naturalmente tale rapporto ha significato q.o. per gli $x \in S_r$ tali che $x + h^l \in S_r$. Consideriamo inoltre il rapporto incrementale di $\rho_l^h v$ relativo all'incremento $-h^l$:

$$\sigma_l^h v(x) = \frac{v(x + h^l) + v(x - h^l) - 2v(x)}{h^2}$$

il quale ha significato q.o. per gli $x \in S_r$ tali che $x + h^l$ e $x - h^l$ appartengono ad S_r. Scelti i numeri reali r_1, r_2 tali che $0 < r_1 < r_2 < r$, sia η un elemento di $C_0^\infty(S_{r_2})$ a valori in $[0,1]$, uguale ad 1 su S_{r_1}, e sia $h_0 = \min\{r - r_2, r_2 - r_\eta\}$ dove $r_\eta = \max\limits_{x \in \operatorname{supp} \eta} |x|$.

E' facile verificare che per $0 < |h| < h_0$, se si prolungano a zero su tutto S_r le funzioni $\rho_l^h[\eta(u_1 + \delta)]$ e $\sigma_l^h[\eta(u_1 + \delta)]$, risulta

$$\rho_l^h[\eta(u_1 + \delta)] \in H_0^1(S_r), \quad \sigma_l^h[\eta(u_1 + \delta)] \in H_0^1(S_r) \cdot \tag{24}$$

Analogamente, introdotti i simboli $\rho_l^h v$ e $\sigma_l^h v$, per $v \in \mathcal{L}^2(\Sigma_r)$ si conclude che, per $0 < |h| < h_0$ ed $l \neq n$, se si prolungano a zero su Σ_r le funzioni $\rho_l^h(\eta u_2)$ e $\sigma_l^h(\eta u_2)$ risulta:

$$\rho_l^h(\eta u_2) \in H_0^1(\Sigma_r), \qquad \sigma_l^h(\eta u_2) \in H_0^1(\Sigma_r) \cdot \tag{25}$$

Ciò premesso supponiamo $l \neq n$.

Poichè per $0 < |h| < h_0$ e per $0 < \varepsilon < h^2/2$ la coppia

$$(\varepsilon \eta \sigma_l^h[\eta(u_1 + \delta)], \quad \varepsilon \eta \sigma_l^h(\eta u_2))$$

appartiene a K', in virtù della (23) si ha:

$$a_1(u_1, -\eta\sigma_l^h[\eta(u_1 + \delta)]) + a_2(u_2, -\eta\sigma_l^h(\eta u_2)) \leqslant$$

$$\leqslant (\|f_1\|_{\mathcal{L}^2(\Omega_1)} + \|f_2\|_{\mathcal{L}^2(\Omega_2)}) \left(\|\rho_l^h \frac{\partial[\eta(u_1 + \delta)]}{\partial x_l}\|_{\mathcal{L}^2(S_r)} + \right. \tag{26}$$

$$\left. + \|\rho_l^h \frac{\partial(\eta u_2)}{\partial x_l}\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma_r)} \right)$$

con $|h|$ minore di un opportuno $h'_0 < h_0$. (1)

D'altra parte è facile verificare che:

---

(1) Qui e nel seguito utilizziamo il fatto ovvio che, posto $\Omega = S_r$ [risp. $\Omega = \Sigma_r$], per $|h|$ minore di un opportuno h_0' risulta:

$$\|\rho_l^h v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leqslant \|\frac{\partial v}{\partial x_l}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$$

qualunque sia $v \in H^1(\Omega)$ nulla in un intorno di ∂S_r [risp. $\partial\Sigma_r - \partial_1\Sigma_r$].

$$(27)\ a_1(\rho_l^h[\eta(u_1+\delta)], \rho_l^h[\eta(u_1+\delta)]) \leqslant a_1(u_1, -\eta\,\sigma_l^h[\eta(u_1+\delta)]) +$$
$$+ c(\|u_1\|_{H_0^1(\Omega_1)} + \delta)\left(\sum_{i=1}^n \int_{S_r} \left| \rho_l^h \frac{\partial[\eta(u_1+\delta)]}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{1/2},$$

$$a_2(\rho_l^h(\eta u_2), \rho_l^h(\eta u_2)) \leqslant a_2(u_2, -\eta\,\sigma_l^h(\eta u_2)) + c\,\|u_2\|_{H_0^1(\Omega_2)}$$
$$\left(\sum_{i=1}^n \int_{\Sigma_r} \left| \rho_l^h \frac{\partial(\eta u_2)}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Nella (27) la costante c è indipendente, oltre che da f_1, f_2, δ, anche da h; tale significato sarà attribuito a c anche nel seguito.

Dalle (26), (27), tenendo conto della coercitività di $a(u,v)$, si trae:

$$(28)\quad \left(\sum_{i=1}^n \int_{S_r} \left| \rho_l^h \frac{\partial[\eta(u_1+\delta)]}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Sigma_r} \left| \rho_l^h \frac{\partial(\eta u_2)}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant c\,(\|f_1\|_{\mathfrak{L}^2(\Omega_1)} + \|f_2\|_{\mathfrak{L}^2(\Omega_2)} + \|u_1\|_{H_0^1(\Omega_1)} + \|u_2\|_{H_0^1(\Omega_2)} + \delta).$$

Pertanto $\forall\ i = \{1, ..., n\}$ la norma in $\mathfrak{L}^2(\mathcal{S}_r)$ di $\rho_l^h \dfrac{\partial[\eta(u_1+\delta)]}{\partial x_i}$ è limitata da una costante indipendente da h e ciò implica che $\dfrac{\partial^2[\eta(u_1+\delta)]}{\partial x_i\,\partial x_l} \in \mathfrak{L}^2(\mathcal{S}_r)$, quindi

$$(29)\qquad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i\,\partial x_l} \in \mathfrak{L}^2(\mathcal{S}_{r_1}) \qquad (l \neq n);$$

dalla (28) si deduce inoltre:

$$(30)\qquad \left\| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i\,\partial x_l} \right\|_{\mathfrak{L}^2(S_{r_1})} \leqslant c\,(\|f_1\|_{\mathfrak{L}^2(\Omega_1)} + \|f_2\|_{\mathfrak{L}^2(\Omega_2)} +$$
$$+ \|u_1\|_{H_0^1(\Omega_1)} + \|u_2\|_{H_0^1(\Omega_2)} + \delta).$$

Per quanto attiene al caso $l = n$, ricavando $\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_n^2}$ dalla (21) si ha, in virtù della (29), che la derivata seconda (debole) rispetto ad x_n di u_1 in $\mathcal{S}_{r_1} - \overline{\Sigma}_{r_1}$ appartiene ad $\mathfrak{L}^2$, ed in modo analogo sfruttando la (22) in luogo della (21), si deduce che la derivata seconda (debole) rispetto ad x_n di u_1 in Σ_{r_1} appartiene anch'essa ad $\mathfrak{L}^2$. Tenendo conto della (30) e della (8) si ottengono poi le maggiorazioni:

$$(31) \qquad \left\| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_n^2} \right\|_{\mathcal{L}^2(S_{r_1} - \bar{\Sigma}_{r_1})} \leqslant$$

$$\leqslant c \left(\| f_1 \|_{\mathcal{L}^2(\Omega_1)} + \| f_2 \|_{\mathcal{L}^2(\Omega_2)} + \| u_1 \|_{H_0^1(\Omega_1)} + \| u_2 \|_{H_0^1(\Omega_2)} + \delta \right)$$

$$(32) \qquad \left\| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_n^2} \right\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma_{r_1})} \leqslant$$

$$\leqslant c \left(\| f_1 \|_{\mathcal{L}^2(\Omega_1)} + \| f_2 \|_{\mathcal{L}^2(\Omega_2)} + \| u_1 \|_{H_0^1(\Omega_1)} + \| u_2 \|_{H_0^1(\Omega_2)} + \delta \right).$$

Pertanto, nel caso particolare (20) si ha:

$$(33) \qquad u_1 \in H^2(\Sigma_{r_1}) \quad , \quad u_1 \in H^2(S_{r_1} - \bar{\Sigma}_{r_1}) \; .$$

Notiamo che a tale conclusione siamo giunti per il fatto che u_1 ed u_2 verificano le (21), (22) nonchè le (23) (24) e (25).

Passando al caso generale, evidentemente esistono un intorno aperto $\mathcal{U}$ di $\bar{x}$ ed un omeomorfismo Φ di $\bar{S}_r$ su $\bar{\mathcal{U}}$ di classe C^2 insieme al suo inverso, avente Jacobiano uguale ad 1 e soddisfacente alle condizioni:

$$\Phi(\Sigma_r) = \mathcal{U}^+ , \qquad \Phi(\partial_1 \Sigma_r) = \mathcal{U} \cap \partial \Omega_2 ,$$

dalle quali segue $\Phi(S_r - \bar{\Sigma}_r) = \mathcal{U} - \mathcal{U}^+$.

Qualunque siano $(v_1, w_1) \in [H^1(\mathcal{U})]^2$ e $(v_2, w_2) \in [H^1(\mathcal{U}^+)]^2$ porremo

$$\tilde{v}_1 = v_i \circ \Phi , \qquad \tilde{w}_i = w_i \circ \Phi \quad (i = 1, 2)$$

sicchè risulta $(\tilde{v}_1, \tilde{w}_1) \in [H^1(S_r)]^2$ e $(\tilde{v}_2, \tilde{w}_2) \in [H^1(\Sigma_r)]^2$.

Analoghi simboli ed analoghe conclusioni valgono per (u_1, u_2). Inoltre effettuando il cambiamento di variabili $x = \Phi(y)$, si ottengono le relazioni:

$$\sum_{i,j}^{1,\dots,n} \int_{\mathcal{U}} a_{ij}(x) \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \frac{\partial w_1}{\partial x_j} dx = \sum_{i,j}^{1,\dots,n} \int_{S_r} b_{ij}(y) \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y_i} \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial y_j} dy,$$

$$\sum_{i,j}^{1,\dots,n} \int_{\mathcal{U}^+} a_{ij}(x) \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \frac{\partial w_2}{\partial x_j} dx = \sum_{i,j}^{1,\dots,n} \int_{\Sigma_r} b_{ij}(y) \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y_i} \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial y_j} dy,$$

dove $b_{i,j}$ sono funzioni appartenenti a $C^1(\bar{S}_r)$ e dipendono da $a_{i,j}$ e Φ ma non dalle $\tilde{v}_i$ e $\tilde{w}_i$.

Posto infine:

$$\tilde{f}_1 = f_1 \circ \Phi \, , \; \tilde{f}_2 = f_2 \circ \Phi \, ,$$

nonchè, per $\tilde{v}$ appartenente ad $H^1(\mathcal{S}_r - \Sigma_r)$ oppure ad $H^1(\Sigma_r)$:

$$\mathcal{B}\,\tilde{v} = -\sum_{i,j}^{1,\dots,n} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(b_{ij}(y) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_i} \right) ,$$

tenendo conto delle (21) e (22) si ha, nel senso delle distribuzioni:

$$\mathcal{B}\,\tilde{u}_1 = \tilde{f}_1 \qquad \text{su } \mathcal{S}_r - \overline{\Sigma}_r$$

$$\mathcal{B}\,\tilde{u}_1 = -\,\mathcal{B}\,\tilde{u}_2 + \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 \qquad su\ \Sigma_r ,$$

e dunque per le funzioni $\tilde{u}_1$ e $\tilde{u}_2$ valgono relazioni analoghe alle (21) e (22). Valgono anche relazioni analoghe alle (23), (24), (25), nelle quali ad f_i, v_i, u_i subentrano $\tilde{f}_i$, $\tilde{v}_i$, $\tilde{u}_i$.

Siamo perciò nella situazione prima esaminata, e quindi sussiste la (33) con $\tilde{u}_1$ in luogo di u_1. Se ne deduce che

$$u_1 \in H^2(\mathfrak{J} \cap \Omega_2) \, , \; u_1 \in H^2(\mathfrak{J} \cap (\Omega_1 - \overline{\Omega}_2))$$

con $\mathfrak{J} = \Phi(\mathcal{S}_{r_1})$, e la (17) è dimostrata.

La (30) e le (31), (32), stabilite nel caso particolare (20), valgono ovviamente anche nel caso generale.

Tenendo conto anche della (3) si ottengono così le seguenti disuguaglianze valide qualunque siano $i, j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\left\| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{J} \cap (\Omega_1 - \overline{\Omega}_2))} \leqslant c \left(\| f_1 \|_{\mathcal{L}^2(\Omega_1)} + \| f_2 \|_{\mathcal{L}^2(\Omega_2)} + \delta \right) .$$

$$\left\| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{J} \cap \Omega_2)} \leqslant c \left(\| f_1 \|_{\mathcal{L}^2(\Omega_1)} + \| f_2 \|_{\mathcal{L}^2(\Omega_2)} + \delta \right)$$

In definitiva si ha che $\forall\, \bar{x} \in \partial \Omega_2$ esiste un intorno $\mathfrak{J}$ di $\bar{x}$ in modo che le norme

$$\| u_1 \|_{H^2(\mathfrak{J} \cap \Omega_2)} \quad , \quad \| u_1 \|_{H^2(\mathfrak{J} \cap (\Omega_1 - \overline{\Omega}_2))}$$

siano maggiorate rispettivamente dai secondi membri di (14) e (15) con c costante indipendente da f_1, f_2 e δ e ciò accade, in virtù della (19), anche per la norma

$$\| u_1 \|_{H^2(\mathfrak{J} \cap \Omega_1)}$$

dove ora $\mathfrak{I}$ è un opportuno intorno di un arbitrario $\bar{x} \in \partial \Omega_1$.

D'altra parte tali secondi membri maggiorano anche la norma di u_1 in $H^2(\Omega)$, con Ω aperto a chiusura contenuta in Ω_2 o in $\Omega_1 - \overline{\Omega}_2$, come si deduce dalla (12) ponendovi $p = 2$ e tenendo conto della (3).

E' chiaro dunque che sussistono le (14) e (15), e con ciò il teorema è dimostrato.

Osservazione. Il seguente esempio prova, come asserito prima del teor. 2, che la prima componente u_1 della soluzione della (2) non appartiene ad $H^2(\Omega_1)$.

Siano dati:

$$A = -\frac{d^2}{d\,x^2}, \quad \Omega_1 =]-2, 2[\,, \quad \Omega_2 =]-1, 1[\,,$$

$$f_1(x) = \begin{cases} -4\,\delta & \forall\, x \in]-1, 1[\\ 0 & \forall\, x \in]-2, -1] \cup [1, 2[\,, \end{cases}$$

$$f_2(x) = 0 \quad \forall\, x \in]-1, 1[\,,$$

sicchè Ω_1, Ω_2, A, f_1, f_2 soddisfano alle ipotesi del teor. 2.

E' immediato verificare che, posto

$$u_1(x) = \begin{cases} -\delta\, x - 2\,\delta & \forall\, x \in]-2, -1] \\ \delta\,(x^2 - 2) & \forall\, x \in]-1, 1[\\ \delta\, x - 2\,\delta & \forall\, x \in [1, 2[\end{cases}$$

$$u_2(x) = \delta\,(x^2 - 1) \quad \forall\, x \in]-1, 1[$$

la coppia (u_1, u_2) è soluzione della disequazione variazionale (2). Orbene, la prima componente appartiene agli spazi $H^2(\Omega_2)$ ed $H^2(\Omega_1 - \overline{\Omega}_2)$ ma ovviamente non appartiene ad $H^2(\Omega_1)$.

3. Vogliamo ora studiare la dipendenza dai dati δ, f_1, f_2 della soluzione della disequazione variazionale (2), soluzione che indicheremo con

$$(u_1(\delta, f_1, f_2)\,,\ u_2(\delta, f_1, f_2)).$$

Posto

$$\Lambda = [0, +\infty[\, \times \mathfrak{L}^2(\Omega_1) \times \mathfrak{L}^2(\Omega_2)\,,$$

proveremo che:

TEOREMA 3. *L'applicazione*

$$(\delta, f_1, f_2) \to u_1 (\delta, f_1, f_2) \tag{34}$$

è continua dallo spazio Λ *ad* $H^1_0(\Omega_1)$, *e l'applicazione*

$$(\delta, f_1, f_2) \to u_2 (\delta, f_1, f_2) \tag{35}$$

è continua da Λ *ad* $H^1_0(\Omega_2)$.

Più in generale sussiste il seguente

TEOREMA 4. *L'applicazione* (34) *è continua da* Λ *agli spazi* $H^2(\Omega_2)$ *ed* $H^2(\Omega_1 - \overline{\Omega}_2)$ *muniti della topologia debole, e la* (35) *è continua da* Λ *ad* $H^2(\Omega_2)$ *anch'esso munito della topologia debole.*

Utilizzando le formule di maggiorazione (9) (per $p = 2$), (14) e (15) il teor. 4 si deduce in modo ovvio dal seguente:

LEMMA. *Le applicazioni (34) e (35) sono continue da* Λ *rispettivamente agli spazi* $H^1_0(\Omega_1)$ *ed* $H^1_0(\Omega_2)$ *muniti della topologia debole.*

Detta invero $\{(\delta_n, f_{1,n}\, f_{2,n})\}$ una successione di punti dello spazio Λ convergente al punto (δ, f_1, f_2), poniamo

$$u_{1,n} = u_1(\delta_n, f_{1,n}, f_{2,n}) \ , \ u_{2,n} = u_2(\delta_n, f_{1,n}, f_{2,n}) \ . \tag{36}$$

Dalla (3) si deduce che le successioni $\{\| u_{1,n} \|_{H_0^1(\Omega_1)}\}$ e $\{\| u_{2,n} \|_{H_0^1(\Omega_2)}\}$ sono limitate, e quindi da $\{u_{1,n}\}$ e $\{u_{2,n}\}$ si possono estrarre due successioni, che indicheremo con gli stessi simboli, convergenti debolmente a w_1 e w_2 rispettivamente in $H^1_0(\Omega_1)$ e $H^1_0(\Omega_2)$.

Poiché ovviamente la coppia $w = (w_1, w_2)$ appartiene al convesso K definito dalla (1), proveremo che essa soddisfa alla disequazione variazionale (2) e da ciò, per l'unicità della soluzione, seguirà l'asserto.

Sia allora $v = (v_1, v_2)$ un arbitrario elemento del convesso K e si ponga $\forall\, n \in \mathfrak{N}$

$$v_{1,n} = v_1 + \overset{(2)}{\delta} - \delta_n \quad , \quad v_{2,n} = v_2 \quad ,$$

sicchè la coppia $v_n = (v_{1,n}, v_{2,n})$ appartiene al convesso

$$K_n = \{ (v_1, v_2) \in H^1_0(\Omega_1) \times H^1_0(\Omega_2) \ : v_1 + \delta_n \geqslant v_2 \quad q.o. \ in \ \Omega_2 \}.$$

---

(2) Detto ψ un elemento di $C^\infty_0(\Omega_1)$ tale che $\psi = 1$ su $\overline{\Omega}_2$, identificheremo δ [risp. δ_n] con la funzione $\delta\,\psi$ [risp. $\delta_n\,\psi$], sicchè δ [risp. δ_n] è un elemento di $H^1_0(\Omega_1)$.

Posto per ogni $n \in \mathfrak{N}$

$$< \mathfrak{L}_n , v > = \int_{\Omega_1} f_{1,n} v_1 \, dx + \int_{\Omega_2} f_{2,n} v_{2,n} \, dx \quad \forall \ (v_1 , v_2) \in H_0^1 (\Omega_1) \times H_0^1 (\Omega_2)$$

$$u_n = (u_{1,n} , u_{2,n}) ,$$

si ha allora

$$a (v_n , v_n - u_n) \geqslant < \mathfrak{L}_n , v_n - u_n > \quad \forall \ n \in \mathfrak{N}$$

e quindi passando al limite:

$$a (v, v - w) \geqslant < \mathfrak{L}, v - w >$$

Per l'arbitrarietà di v ne segue che w soddisfa la (2).

BIBLIOGRAFIA

[1] S. AGMON - *The L_p approach to the Dirichlet problem,* Annali della Scuola Norm. Sup. Pisa, 1958.

[2] S. AGMON - *Lectures on elliptic boundary value problem,* Van Nostrand Mathematical studies, 1965.

[3] H.R. BREZIS - G. STAMPACCHIA - *Sur la régularité de la solutions d'inequations elliptiques,* Bull. Soc. math. France, 96, 153-180, 1968.

[4] O.A. LADYŽENSKAJA - N.N. URAL'CEVA - *Équations linéaires et quasi linéaires de type elliptique* - Moskva, 1964.

[5] J.L. LIONS - G. STAMPACCHIA - *Variational inequalities,* Comm. pure and appl. Math., t. 20, 493-519, 1967.

[6] C. MIRANDA - *Partial differential equations of elliptic type,* Springer, 1970.

[7] J. NECAS - *Le méthodes directes en théorie des équations elliptiques,* Masson, 1967.

[8] G. STAMPACCHIA - *Variational inequalities,* Pubbl. JAC. S. III, n. 25, Roma, 1969.

[9] R. TOSCANO - A. MACERI - *Un problema di contatto tra membrane,* Accademia nazionale dei Lincei, Rend. Sci. Mat. e Nat., Serie VIII, val. LXV, 1979.