SULLE VARIETA' SEGATE DAGLI IPERPIANI IN VARIETA' DI GRASSMANN DI INDICI QUALUNQUE (*)

di Lora Di Fiore e Sveva Freni (a Napoli) (**)

SOMMARIO. - *In questa nota si dimostra che una varietà algebrica di uno spazio complesso, le cui sezioni iperpiane siano grassmanniane* $G(k,n)$ *con* $n > 3$, *è un cono avente per vertice un punto.*

SUMMARY. - *In this paper we prove that a manifold of a complex space whose prime sections are grassmannian manifolds* $G(k,n)$ $(n > 3)$ *is a point-cone.*

1 — E' noto [1] [2] [3] che una varietà algebrica di uno spazio proiettivo complesso segata dagli iperpiani in varietà di Veronese o in varietà di Segre è un cono avente per vertice un punto.

In questa nota, estendendo un risultato contenuto in [4], si dimostra che vale la proprietà analoga anche per le varietà algebriche le cui sezioni sono varietà di Grassmann di indici qualunque. Questo risultato, come gli altri sopra ricordati, reca un contributo allo studio delle varietà a sezioni iperpiane fra loro proiettive [5], [6], [7].

(*) Pervenuto in Redazione il 26 luglio 1980.
(**) Indirizzo degli Autori: Istituto di Matematica «Renato Caccioppoli» - Università degli Studi - Via Mezzocannone, 8 - 80134 Napoli.

Indicheremo con $G(k,n)$ la varietà di Grassmann degli S_k di un S_n complesso che, com'è ben noto [8], è proiettivamente definita, ha dimensione

$$t = (k+1)(n-k),$$

appartiene ad uno spazio di dimensione

$$r = \binom{n+1}{k+1} - 1$$

e ha ordine

$$\nu = \frac{1!\ 2!\ \dots\ k!\ t!}{(n-k)!\ (n-k+1)!\ \dots\ n!}$$

Consideriamo una varietà algebrica W^{ν}_{t+1} appartenente ad un S_{r+1} complesso e tale che le sue sezioni con gli iperpiani di S_{r+1} non tangenti, siano varietà $G(k,n)$ con $n > 3$. Dimostreremo il

TEOREMA I — *La varietà W^{ν}_{t+1} è un cono che proietta da un punto una $G(k,n)$.*

Da questo teorema segue, in modo ovvio, il risultato più generale

TEOREMA II — *Una varietà W^{ν}_{t+i+1} $(i \geqslant 0)$ appartenente ad un S_{r+i+1} che sia segata dagli S_r di S_{r+i+1} non tangenti in varietà $G(k,n)$ è un cono che proietta una $G(k,n)$ da un S_i.*

Per la dualità in S_n, $G(k,n)$ è proiettiva a $G(n-k-1, n)$.

E' lecito quindi supporre, come faremo costantemente nel seguito, $k < n/2$. Supponiamo inoltre $k > 1$, giacchè il caso $k = 0$ è banale e il caso $k = 1$ è stato trattato in [4].

2 — La varietà $G(k,n)$ è ovviamente razionale; ma si ha di più, come ha dimostrato Severi in qualche caso particolare in [8] e Semple in generale in [9], che essa si proietta biunivocamente da un opportuno S_ρ $(\rho = r - t - 1)$ sopra un S_t. Ricordiamo il risultato di Semple, che viene utilizzato nel seguito.

Consideriamo la varietà $G(k,n)$, grassmanniana degli S_k di un assegnato S_n. Fissato in S_n un S_m, con $m = n - k - 1$, si ha che gli S_k di S_m si rappresentano su $G(k,n)$ con i punti di una $G(k,m)$ e gli S_k di S_n incidenti S_m in una retta con i punti di una varietà Γ, contenente la detta $G(k,m)$. La varietà Γ appartiene ad uno spazio S_ρ e il generico $S_{\rho+1}$ per S_ρ interseca $G(k,n)$ in un punto, e uno soltanto, fuori di Γ. Pertanto la $G(k,n)$ si proietta biunivocamente da S_ρ su un S_t, sghembo con S_ρ.

In tale proiezione il sistema delle sezioni interpiane di $G(k, n)$ va nel sistema lineare Ψ delle forme d'ordine $k+1$ di S_t passanti con molteplicità k per una varietà di Segre, di specie 2 e di indici $k, n-k-1$ appartenente ad un iperpiano S_{t-1} di S_t.

Per il seguito conviene osservare che la varietà considerata è univocamente determinata dalla $G(k, m)$ considerata e può essere definita direttamente su $G(k, n)$, ossia prescindendo dalla considerazione della corrispondenza fra gli S_k di S_n e i punti della $G(k, n)$.

Per dimostrarlo, ricordiamo anzitutto che *le immagini dei fasci di S_k di S_n su $G(k, n)$ sono tutte, e sole, le rette appartenenti a $G(k, n)$*. Osserviamo poi che se S^1_k, S^2_k sono due S_k distinti di S_n, *condizione necessaria e sufficiente affinchè S^1_k e S^2_k s'intersechino in un S_i $(0 \leqslant i < k-1)$ è che esista un S_k che intersechi S^1_k in un S_{k-1} e S^2_k in un S_{i+1}*. Infatti, se $S^1_k \cap S^2_k = S_i$, si può fissare in S^1_k uno spazio S^1_{k-i-2} sghembo con S_i, in S^2_k un S^2_0 esterno ad S_i e lo spazio congiungente S_i, S^1_{k-i-2}, S^2_0 sega S^1_k in un S_{k-1} e S^2_k in un S_{i+1}. Inversamente, se esiste un tale spazio, lo S_{k-1} secondo cui esso interseca S^1_k e lo S_{i+1} secondo cui interseca S^2_k si tagliano in un S_i, che è comune a S^1_k e S^2_k.

Ciò posto, indichiamo con Γ_h la varietà rappresentativa in $G(k, n)$ degli S_k che segano lo S_m considerato in un S_{k-h} $(1 \leqslant h \leqslant k-1)$, cioè la varietà rappresentativa su $G(k, n)$ di un «complesso singolare di specie h» secondo la terminologia usata in [10].

Da quanto si è detto segue subito che Γ_1 *è il luogo delle rette di $G(k, n)$ incidenti la $G(k, m)$ assegnata;* Γ_2 *è il luogo delle rette di $G(k, n)$ incidenti* Γ_1; ...; $\Gamma = \Gamma_{k-1}$ *è il luogo delle rette di $G(k, n)$ incidenti* Γ_{k-2}.

Di qui si deduce che *se la grassmanniana $G'(k, n)$ degli S_k di uno spazio S'_n contiene una delle varietà Γ_h anzidette, e quindi la $G(k, m)$, e se $G(k, m)$ rappresenta in $G'(k, n)$ gli S_k di un S'_m di S'_n, Γ_h rappresenta in $G'(k, n)$ l'insieme degli S_k incidenti tale S'_m in un S_{k-h}*. L'asserto si dimostra per induzione. Indichiamo infatti con Γ'_h la sottovarietà di $G'(k, n)$ che rappresenta gli S_k di S'_n incidenti S'_m in un S_{k-h}. Se $\Gamma_1 \subset G'(k, n)$, le rette che costituiscono Γ_1 appartengono a Γ'_1, sicchè $\Gamma_1 \subseteq \Gamma'_1$. Ma Γ_1 e Γ'_1, ovviamente irriducibili, hanno la stessa dimensione e ne segue $\Gamma_1 = \Gamma'_1$. In modo analogo si vede poi che se la proprietà è vera per $h = \bar{h}$, essa è vera anche $h = \bar{h} + 1$.

3 — Sia W^{ν}_{t+1} una varietà del tipo detto nel n. 1 e sia $\mathcal{S}$ lo spazio, di dimensione $r+1$, cui essa appartiene. Se α è un iperpiano

di $\mathcal{S}$ non tangente a W, indichiamo con G_α la sua intersezione con W, che, per l'ipotesi, è una $G(k, n)$. Fissato poi uno spazio S^*, di dimensione n, indichiamo con G^* la grassmanniana degli S_k di S^*, con α^* lo S_r cui essa appartiene, con $\mathcal{S}^*$ uno spazio di dimensione $r+1$ contenente α^*, con φ un'applicazione canonica dell'insieme degli S_k di S^* su G^*. La varietà G_α può essere considerata anch'essa come grassmanniana degli S_k di S_n^* e le applicazioni canoniche dell'insieme degli S_k di S^* su G_α si ottengono componendo φ con le omografie fra α^* e α o, se si vuole, fra $\mathcal{S}^*$ e $\mathcal{S}$, che portano G^* in G_α.

Indichiamo con ω_α un'omografia tra $\mathcal{S}^*$ e $\mathcal{S}$, che porta G^* in G_α. Fissati dei riferimenti in $\mathcal{S}^*$ e in $\mathcal{S}$, ω_α si rappresenta canonicamente con un punto dello spazio numerico complesso $\overline{S}_{(r+1)(r+3)}$ e l'insieme delle ω_α relative ad un dato α con una varietà Ω_α, che dipende razionalmente da α.

Ciò posto, fissiamo un iperpiano $\overline{\alpha}$ di $\mathcal{S}$ non tangente a W e una $G(k, m)$, con $m = n - k - 1$, che, considerando $G_{\overline{\alpha}}$ come grassmanniana degli S_k di S^*, rappresenti in $G_{\overline{\alpha}}$ l'insieme degli S_k di un S_m^*. Indichiamo con $\overline{g}$ tale varietà. Essa può essere ottenuta come trasformata, in una opportuna omografia $\omega_{\overline{\alpha}}$, che indicheremo con $\overline{\omega}$, dell'immagine g^* in φ dell'insieme degli S_k *di* S_m^*.

Sia ora α un qualunque iperpiano non tangente a W, passante per $\overline{g}$. Vogliamo dimostrare che, considerata G_α come grassmanniana degli S_k di S^*, $\overline{g}$ *rappresenta in* G_α *l'insieme degli* S_k *di un* S_m.

Basterà, ovviamente, provare che l'asserto è vero per α appartenente ad un intorno di $\overline{\alpha}$. A questo scopo, consideriamo la varietà Ω luogo delle varietà Ω_α e, su di essa, il punto $\overline{P}$ che rappresenta $\overline{\omega}$, che sarà semplice per Ω e quindi origine di una falda lineare.

Consideriamo un intorno $\mathfrak{I}$ di $\overline{\alpha}$, nell'insieme degli iperpiani di $\mathcal{S}$ passanti per $\overline{g}$, e un iperpiano α' appartenente a $\mathfrak{I}$. Se $\mathfrak{I}$ è abbastanza piccolo, si può fissare un'omografia ω_α, tale che, detto P' il punto che la rappresenta in Ω, P' appartenga ad un ramo lineare γ di Ω di origine $\overline{P}$, unisecante le varietà Ω_α che esso incontra. Un tale ramo si può ottenere, ad esempio, segando Ω con uno spazio lineare di dimensione opportuna, generico, per $\overline{P}$ e P'. Detto t un parametro uniformizzante γ, $P(t)$ il punto variabile su γ, e supposto $P(0) = \overline{P}$, $P(t') = P'$, si ha che $P(t)$ è immagine di un'omografia $\omega_{\alpha(t)}$ di $\mathcal{S}^*$ in $\mathcal{S}$, che porta G^* in $G^*_{\alpha(t)}$. Resta così individuata una famiglia analitica semplicemente infinita di iperpiani $\alpha(t)$, passanti per $\overline{g}$, tale che $\alpha(0) = \overline{\alpha}$, $\alpha(t') = \alpha'$ e, per ciascun iperpiano $\alpha(t)$, un'omografia $\omega_{\alpha(t)}$ pur essa dipendente analiticamente da t, che porta G^* in $G_{\alpha(t)}$, la quale, per $t = 0$ coincide con $\bar{\omega}$.

Consideriamo l'immagine di $\bar{g}$ in $\omega^{-1}_{\alpha(t)}$ e indichiamo con $V(t)$ la varietà di S^* luogo degli S_k che sono trasformati da φ in punti di $\omega^{-1}_{\alpha(t)}(\bar{g})$. Si ha allora che $V(0) = S^*_m$ e, poichè la dimensione di $V(t)$ non dipende da t, ne segue che per ogni t, e quindi anche per $t = t'$, $V(t)$ ha dimensione m. Posto $\omega_{\alpha(t')} = \omega'$, $V(t') = V'$, consideriamo la corrispondenza che associa ad ogni punto X di $\bar{g}$ lo S_k di V' che ha per immagine in φ il punto $\omega'^{-1}(X)$. Tale corrispondenza è irriducibile [11] e quindi ad essa può applicarsi il principio del computo delle costanti, dal quale segue che gli S_k appartenenti a V' e passanti per il suo punto generico formano un sistema di dimensione $k(m-k)$. Tali S_k appartengono allo S_m tangente a V' nel punto e riempiono questo spazio. Si conclude che S_m appartiene a V' e, poichè V' è irriducibile, che $S_m = V'$. La proprietà enunciata è così provata.

4 — Passiamo ora alla dimostrazione del teorema I.

Data la varietà W^{ν}_{t+1} appartenente allo spazio $\mathfrak{S}$, di dimensione $r+1$, consideriamo un iperpiano $\bar{\alpha}$ di $\mathfrak{S}$ non tangente a W e, nella sezione $G_{\bar{\alpha}}$ di $\bar{\alpha}$ con W, considerata come grassmanniana degli S_k di un S_n, la varietà $\bar{\Gamma}$ che rappresenta l'insieme degli S_k incidenti un S_m, con $m = n - k - 1$, secondo una retta. Sia $\bar{S}_\rho$ lo spazio di appartenenza di $\bar{\Gamma}$. Se α è un qualunque iperpiano di $\mathfrak{S}$ passante per $\bar{S}_\rho$, e quindi per $\bar{\Gamma}$, per quanto si è visto nei numeri 2 e 3, $\bar{\Gamma}$ ha per la sezione G_α di W con α significato analogo a quello che ha per $G_{\bar{\alpha}}$. Ne segue che, per ogni α non tangente a W, G_α si proietta univocamente da $\bar{S}_\rho$ su un S_t sghembo con $\bar{S}_\rho$, dando luogo a un sistema rappresentativo del tipo detto al n. 2. Ciò comporta che, fissato in $\mathfrak{S}$ uno spazio Σ di dimensione $t+1$, sghembo con $\bar{S}_\rho$, W si proietta univocamente da $\bar{S}_\rho$ su Σ e che in tale proiezione le sezioni iperpiane di una G_α vanno in forme di ordine $k+1$ dello S^α_t intersezione di α con Σ, passanti per una varietà di Segre V_α di specie 2 e di indici k, $n-k-1$, appartenente ad un $S^\alpha_{t-1} \subset S^\alpha_t$. Il luogo degli S^α_{t-1}, al variare di α è, ovviamente, un S_t, che indicheremo con σ, di Σ e il luogo V delle V_α è una varietà di Σ segata dal generico iperpiano di Σ in una varietà di Segre, del tipo anzidetto. Per il teorema di Scorza, ricordato nel n. 1, si ha dunque che V è un cono appartenente a σ, proiettante da un punto O una delle dette varietà di Segre e le immagini delle sezioni iperpiane di W^{ν}_{t+1} da $\bar{S}_\rho$ su Σ sono le forme d'ordine $k+1$ di Σ passanti con molteplicità k per V.

Dimostriamo che *la generica forma soggetta a questa condizione ha in O un punto di molteplicità k, il cui cono osculatore si riduce all'iperpiano σ, contato k volte.*

A questo scopo, fissiamo in Σ un riferimento $(x_0, \ldots, x_{t+1})$ in modo che σ abbia equazione $x_0 = 0$ e O abbia coordinate $(0, \ldots, 0, 1)$. Indichiamo con τ l'iperpiano di equazione $x_{t+1} = 0$. Le coordinate correnti in $\tau \cap \sigma$ sono allora $x_1, \ldots, x_t$ e possono scriversi nella forma

$$x_{(p-1)(n-k)+q} \quad (p = 1, \ldots, k+1;\ q = 1, \ldots, n-k)$$

Allora le equazioni

$$x_{(p-1)(n-k)+q} = y_p z_q$$

rappresentano parametricamente, in $\tau \cap \sigma$, una varietà di Segre, di specie 2 e indici k, $n-k-1$ e il cono V che proietta tale varietà da O è rappresentato, in Σ, dalle equazioni

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{(p-1)(n-k)+q} = y_p z_q \\ x_{t+1} = c \end{cases}$$

ove c è un nuovo parametro complesso.

Sia ora $F(x_0, x_1, \ldots, x_{t+1}) = 0$ l'equazione di una forma d'ordine $k+1$ di Σ. La varietà V sarà k-pla per F se le derivate parziali $(k-1)$-me di F, calcolate nei punti di V, sono identicamente nulle. Imponendo questa condizione per il punto O si ha intanto che la x_{t+1} compare in F solo al primo grado. D'altro canto un termine del tipo

$$x_0^{i_0} \ldots x_j^{i_j} \ldots x_t^{i_t} x_{t+1} \quad (j \neq 0, i_0 \neq k, i_j \neq 0, i_0 + i_1 + \ldots i_t = k)$$

dà luogo in

$$\frac{\partial^{k-1} F}{\partial x_0^{i_0} \ldots \partial x_{j-1}^{i_{j-1}} \partial x_j^{i_j - 1} \partial x_{j+1}^{i_{j+1}} \ldots \partial x_t^{i_t}}$$

ad un monomio in $x_j x_{t+1}$ e perchè le coordinate del punto generico di V annullino identicamente tale derivata, il coefficiente di $x_0^{i_0} \ldots x_j^{i_j} \ldots x_t^{i_t} x_{t+1}$ deve essere nullo. Il termine in $x_0^k x_{t+1}$, invece, dà luogo nella $\dfrac{\partial^{k-1} F}{\partial x_0^{k-1}}$ ad un monomio in $x_0 x_{t+1}$ per cui, ponendo $x_0 = 0$, esso si annulla senza che venga imposta alcuna condizione al suo coefficiente. Nella equazione della F, quindi, la x_{t+1} compare nell'unico termine in $x_0^k x_{t+1}$.

Il cono osculatore in O a F è quindi l'iperpiano σ contato k volte.

Indichiamo ora con Φ il sistema delle forme F d'ordine $k+1$ di Σ che passano con molteplicità k per V. Per quanto si è visto imponendo ad una ipersuperficie di Φ il passaggio per un punto O' infinitamente vicino ad O ma non su σ, la ipersuperficie diventa un cono di vertice O e si ha lo stesso sistema di coni con punto $(k+1)$-plo O qualunque sia il punto O' infinitamente vicino ad O. Dunque l'intorno di O rappresenta un unico punto P della varietà W^{ν}_{t+1} e due sezioni iperpiane di W^{ν}_{t+1} passanti per P hanno per immagini coni con lo stesso vertice O. Si conclude che la varietà W^{ν}_{t+1} è un cono di vertice P.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. SCORZA, *Sopra una certa classe di varietà razionali.* Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XXVIII, 1909.

[2] G. SCORZA, *Sulla varietà di Segre.* Opere scelte, vol. I.

[3] E. BOMPIANI, *Una proprietà caratteristica dei coni di Veronese,* Rend. Acc. d'Italia, serie VII, vol. IV, 1943.

[4] L. DI FIORE, *Sulle varietà segate dagli iperpiani in varietà di Grassmann.* Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. di Napoli, serie IV, vol. XLV, 1978.

[5] G. FUBINI, *Sulle varietà a sezioni piane collineari.* Rend. Acc. Lincei, s. VI, vol. I, 1925.

[6] G. FANO, *Sulle superficie dello spazio S_3 a sezioni piane collineari.* Rend. Acc. Lincei, s. VI, 1925.

[7] G. FANO, *Sulle superficie di uno spazio qualunque a sezioni iperpiane collineari.* Rend. Acc. Lincei, s. VI, 1926.

[8] F. SEVERI, *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare.* Ann. di Mat., s. III vol. 24, 1915.

[9] J. G. SEMPLE, *On representations of the S_k of S_n and of the Grassmann manifolds $G(k, n)$.* Proceedings of the London Math. Soc., Series 2, vol. XXXII, 1931.

[10] A. ROSENBLATT, *Sur la varieté de Grassmann qui represente les espaces lineaires a k dimensions contenus dans un espace lineaire a r dimensions.* Memoires de Liege, s. III, t. XVI, 1931.

[11] B. L. VAN DER WAERDEN, *Einfuhrung in die algebraische geometrie.* Berlin, Springer, 1939.