SULLA CATEGORIA DELLE CATEGORIE ESATTE (*)

di MARCO MARGIOCCO e FULVIO MORA (a Genova) (**)

SOMMARIO. - *In questo lavoro si studiano alcune proprietà della categoria* EX *e, in particolare, si costruisce l'esattizzazione di una sottocategoria di una categoria esatta, caratterizzandola mediante una opportuna proprietà universale.*

SUMMARY. - *In this work we study some properties of the category* EX, *and construct the «exactization» of a subcategory of an exact category caracterized by an «universal property».*

Introduzione

Nella categoria EX (categoria delle categorie esatte) si possono definire «nuclei» e «conuclei» di un funtore esatto, anche se EX non ha oggetto nullo, in modo analogo alle definizioni usuali di nucleo e conucleo date in categorie con oggetto nullo. Tali definizioni caratterizzano i nuclei come sottocategorie *spesse* e i conuclei come *quozienti di Serre.*

Nel § 1 del presente lavoro vengono date tali caratterizzazioni e vengono definiti i funtori Monic in EX. Nel § 2 si determina la fattorizzazione di un funtore esatto in «quozienti esatti» e funtori esatti fedeli e si prova che tale fattorizzazione è unica a meno di isomorfismi di categorie (mentre in generale non esiste la fattorizzazione epic-monic di un funtore esatto).

(*) Pervenuto in Redazione il 2 marzo 1980.

(**) Indirizzo degli Autori: Istituto Matematico dell'Università di Genova - via L. B. Alberti 4 - 16132 Genova.

Nel 3⁰ paragrafo si costruisce la «esattizzazione» di una sottocategoria di una categoria esatta, intesa come la categoria esatta generata dalla sottocategoria data, caratterizzandola mediante un' opportuna proprietà universale.

1. - La categoria EX

Sia U un universo (cfr. [7] 4 pg. 22) e consideriamo la categoria EX i cui oggetti sono le U — categorie esatte e i morfismi sono i funtori esatti.

La categoria nulla N (categoria esatta con il solo oggetto zero) è oggetto finale ma non iniziale di EX perché da N in un'altra categoria esatta E possono esistere vari funtori diversi (ma isomorfi). Quindi non hanno senso le definizioni classiche di nucleo e conucleo, ma si possono dare delle definizioni analoghe: chiameremo *nucleo* di un funtore esatto $F: \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{D}$ un funtore $K: \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{C}$ tale che $FK: \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{D}$ sia un funtore nullo (i funtori nulli tra due categorie esatte sono tutti isomorfi) e tale che per ogni altro funtore $H: \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{C}$ per cui FH è un funtore nullo esista unico un funtore esatto $L: \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ per cui $KL = H$. Similmente definiremo i *conuclei*.

Come vedremo, in tal modo si ritrovano le definizioni di categoria «spessa» e «quoziente di Serre» che richiamiamo brevemente.

1.1. DEFINIZIONE: *Data una categoria esatta* C *e una sottocategoria* C' *di* C, C' *si dice* SPESSA *se:*

i) C' *è piena e gli oggetti nulli di* C *appartengono a* C'.

ii) se $\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C}$ *è una successione esatta e* $\mathrm{A}, \mathrm{C} \in \mathrm{ob}(\mathrm{C}')$ *anche* $\mathrm{B} \in \mathrm{ob}(\mathrm{C}')$ *(in particolare i sottooggetti e i quozienti di oggetti di* C' *stanno in* C'*)* (v. [6] 1.11 pg. 138).

E' ovvio che l'intersezione di una famiglia qualunque di sottocategorie spesse è ancora spessa.

1.2. DEFINIZIONE: *Dato un diagramma* Δ *contenuto in una categoria esatta* C, *si dice* SPESSIZZAZIONE *di* Δ *e si nota con* $\mathrm{sp}(\Delta)$, *l'intersezione di tutte le sottocategorie spesse contenenti* Δ.

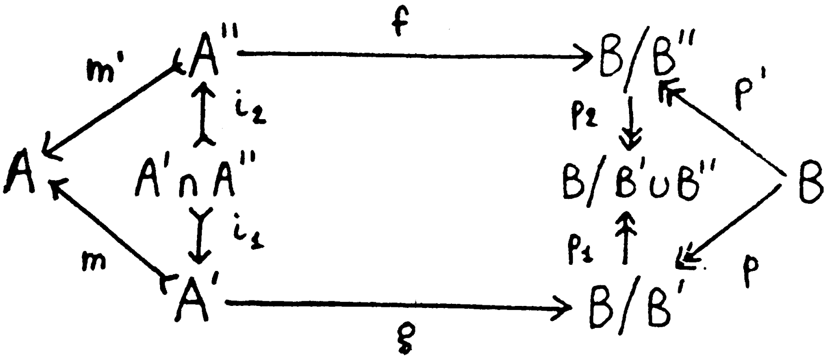
1.3. DEFINIZIONE: *Sia* E *una categoria esatta ed* H *una sottocategoria spessa di* E. *Dicesi* QUOZIENTE DI SERRE *di* E *per* H *il funtore esatto* $F: \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}/\mathrm{H}$ *così definito*:

i) E/H *ha gli stessi oggetti di* E.

ii) Un morfismo tra due oggetti $A, B \in E/H$ *è individuato da una terna* (m, f, p) *dove* $m: A \longrightarrow A'$ *è un sottooggetto di* A, *tale* che $A/A' \in H$, $p: B \longrightarrow B/B'$ *è un quoziente di* B *tale che* $B' \in H$ *ed* f *è un morfismo di* A' *in* B/B'.

Due terne (m, f, p) *e* $(m' g, p')$ *individuano lo stesso morfismo di* E/H *se nel diagramma* (1) *si ha che* $p_1 f i_1 = p_2 g i_2$ *con* (m', i_2, i_1, m) *pullback e* (p', p_2, p_1, p) *pushout.*

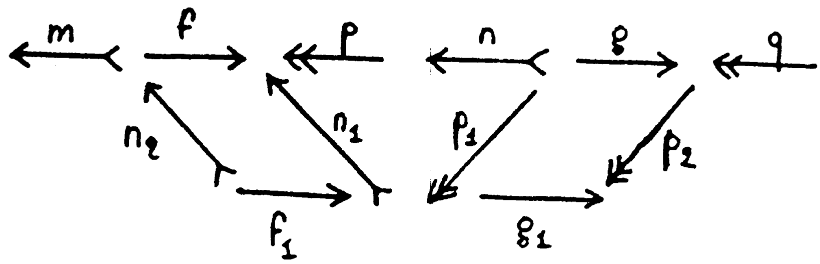
(1)



In pratica $\mathrm{Hom}_{E/H}(A, B) = \varinjlim \mathrm{Hom}_E(A', B/B')$ *al variare di* A' *nei sottoggetti di* A *tali che* $A/A' \in H$ *e di* B' *nei sottoggetti di* B *appartenenti ad* H (cfr. anche [2] p. 365 e [6] pg. 138).

iii) due morfismi di E/H *individuati dalle terne* (m, f, p) *e* (n, g, q) *hanno per composizione il morfismo individuato dalla terna* (mn_2, g_1, f_1, p_2, q) *del diagramma* (2) *dove* $n_1 p_1$ *è la fattorizzazione canonica di* pn, (f, n_1, f_1, n_2) *è pullback e* (g, p_1, g_1, p_2) *è pushout.*

(2)



iv) Il funtore canonico F è identico sugli oggetti e associa ad un morfismo $f: A \longrightarrow B$ *la classe della terna* $(1_A, f, 1_B)$.

Si verifica facilmente (in modo analogo a [2] *prop.* 1 *pg.* 367) *che* E/H *è esatta e che F è un funtore esatto.*

Osserviamo che se $\alpha: A \longrightarrow B$ è un morfismo di E/H individuato dalla terna (m, f, p) allora $F(p)$ e $F(m)$ sono isomorfismi in E/H e si ha $\alpha = (F(p))^{-1} F(f) (F(m))^{-1}$.

1.4. TEOREMA: EX *ha nuclei e conuclei nel senso detto precedentemente. Il nucleo di un funtore esatto* $F: C \longrightarrow D$ *è la sottocategoria spessa di* C *formata dagli oggetti di* C *che vanno in zero mediante* F *(con l'immersione canonica). Il conucleo di* F *è il quoziente di Serre di* D *modulo* $sp(F(C))$.

Dim.: 4.1.

E' chiaro quindi che in EX i monic normali sono le sottocategorie spesse e gli epic conormali sono i quozienti di Serre.

1.5. *Si verifica facilmente che* EX *ha prodotti e somme dirette indiciate nell'universo* U.

Infatti il prodotto di U-categorie esatte $C = \prod_{i \in I} C_i$ (dove $I \in U$) è una categoria esatta che ha per oggetti le i-uple $A = \{A_i / i \in I, A_i \in C_i\}$ e per morfismi $\phi: \{A_i\} \longrightarrow \{B_i\}$ le i-uple $\phi = \{\phi_i / \phi_i : A_i \longrightarrow B_i\}$.

La somma diretta di U-categorie esatte $= \bigoplus_{i \in I} C_i \, (I \in U)$ è la categoria esatta unione disgiunta delle categorie C_i in cui però vengono resi isomorfi gli oggetti nulli di ciascuna categoria C_i.

1.6. *Date due* U*-categorie esatte* E_1 *e* E_2 *ed un funtore esatto* $F: E_1 \longrightarrow E_2$ F *è* MONIC *in* EX *se e solo se:*

i) F *è iniettivo sugli oggetti*

ii) F *è iniettivo sulle sequenze esatte parallele (cioè se due sequenze esatte tra gli stessi oggetti hanno la stessa immagine mediante* F*, allora esse coincidono).* Dim.: 4.2.

OSSERVAZIONE: la condizione ii) è equivalente alla

ii') F *è iniettivo sulle sequenze esatte corte parallele.*

Osserviamo inoltre che in EX non tutti i monic sono normali, poiché i monic normali sono le sottocategorie spesse, mentre l'immersione di una qualunque sottocategoria esatta è un funtore monic.

1.7. *Un funtore esatto* F*, epic in* EX *è surgettivo sugli oggetti ma non necessariamente sui morfismi. Se* $F: C \longrightarrow D$ *è surgettivo sugli oggetti e se la sottocategoria generata dai morfismi raggiunti da* F *e dagli inversi degli isomorfismi raggiunti è tutta* D *allora* F *è epic (verifica immediata).*

Osserviamo infine che non tutti gli epic sono conormali, poiché quelli conormali sono i «Quozienti di Serre».

1.8. *Sia* $F : \mathrm{E}_1 \longrightarrow \mathrm{E}_2$ *un funtore esatto tra* U*-categorie esatte, allora* F *si fattorizza in* $F = F_3 F_2 F_1$ *dove* F_1 *è epic conormale (quoziente di Serre),* F_3 *monic normale e* F_2 *è un funtore esatto con nucleo e conucleo zero. Tale fattorizzazione è unica a meno di isomorfismi di categorie.*

Infatti basta prendere F_1 come il quoziente di Serre di E_1 modulo la sottocategoria spessa $\mathrm{Ker}(F)$, F_3 l'immersione della spessizzazione dell'immagine di F in E_2 e $F_2 : \mathrm{E}_1 / \ker(F) \longrightarrow \mathrm{Sp}\,(\mathrm{Im}\,F)$ definito da $F_2(\mathrm{A}) = F(\mathrm{A})$ per ogni oggetto A di E_1 $F_2(\mathrm{m},\mathrm{f},\mathrm{p}) = (F(\mathrm{p}))^{-1} F(\mathrm{f})(F(\mathrm{m}))^{-1}$ si verifica facilmente che F_2 è ben definito, è esatto e ha nucleo e conucleo zero.

L'unicità della fattorizzazione segue dal fatto che se $F = G_3 G_2 G_1$ fosse un'altra fattorizzazione con le stesse proprietà si avrebbe $\mathrm{Ker}(F) = \mathrm{Ker}(G_1)$ da cui $G_1 = \mathrm{Cok}(\ker(F)) = F_1$ (a meno di isomorfismi), analogamente $G_3 = \mathrm{Ker}(\mathrm{cok}(F)) = F_3$ (a meno di isomorfismi) e quindi anche $G_2 = F_2$ (a meno di isomorfismi).

2. - Quozienti esatti e funtori fedeli

2.1. *Dato un funtore* $F : \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{D}$ *(*C, D *categorie qualsiasi), consideriamo una fattorizzazione* $F = F_2 F_1$ *dove* F_1 *è un funtore «quoziente» (bigettivo sugli oggetti e pieno) ed* F_2 *è un funtore fedele (iniettivo sui morfismi).*

Una tale fattorizzazione esiste sempre: la categoria intermedia C_0 si può definire nel modo seguente:

i) gli oggetti di C_0 *sono gli stessi di* C

ii) i morfismi di C_0 *tra due oggetti* A *e* B *sono i morfismi di* D *tra* $F(\mathrm{A})$ *e* $F(\mathrm{B})$ *che sono immagine mediante* F *di morfismi di* A *in* B, *cioè* $\mathrm{C}_0(\mathrm{A},\mathrm{B}) = F(\mathrm{C}(\mathrm{A},\mathrm{B}))$. *La composizione di morfismi è ovvia.*

Allora $\mathrm{C}_0 = \mathrm{C}/\mathrm{R}_F$ dove R_F è la congruenza indotta da F.

E' immediato verificare che tale fattorizzazione è unica a meno di isomorfismi di categorie, e la diremo «f-fattorizzazione» di F.

2.2. Vale la seguente proprietà universale:

Data la f-fattorizzazione di $F = F_2 F_1$ *per ogni altra fattorizzazione* $F = G_2 G_1$ *con* G_2 *fedele, esiste ed è unico un funtore* G *tale che* $G_1 = G F_1$, $F_2 = G_2 G$ *(*G *è necessariamente fedele).*

Dim.: 4.3.

2.3. *Se* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *sono categorie involutive ed* F *è un* $\sim$*-funtore (cioè un funtore che rispetta l'involuzione) anche in* $\mathbf{C}_0$ *è possibile definire un'involuzione (unica) in modo tale che* F_1 *e* F_2 *siano* $\sim$*-funtori.*

Infatti se $g = F_1(f) \in \mathbf{C}_0(A, B)$ basta porre $\tilde{g} = F_1(\tilde{f})$.

2.4. E' immediato verificare che se $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *sono categorie inverse* (v. [4]) anche $\mathbf{C}_0$ *è inversa.*

2.5. In generale non è vero che nella f-fattorizzazione di un funtore esatto tra categorie esatte la categoria intermedia $\mathbf{C}_0$ sia essa stessa esatta. Infatti $\mathbf{C}_0$ può avere dei morfismi che pur essendo monic ed epic non sono isomorfismi.

Esempio: Sia $\mathbf{C}$ la categoria esatta formata da una sequenza esatta corta $A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{k} D$, oggetto nullo, identità e fattorizzazione di f, $\mathbf{D}$ una qualunque categoria esatta, F un funtore esatto tale che $F(f)$ sia un isomorfismo (per cui $F(k) = 0$, $F(h) = 0$). In $\mathbf{C}_0$ gli oggetti sono gli stessi di $\mathbf{C}$ ed i morfismi sono quelli provenienti da morfismi di $\mathbf{C}$, perciò $F_1(f)$ non è isomorfismo in $\mathbf{C}_0$ (non ha inverso), pur essendo monic ed epic.

2.6. Dato un funtore esatto F tra categorie esatte, vogliamo costruirne la «f-fattorizzazione esatta», cioè una fattorizzazione $F = F_2 F_1$ dove la categoria intermedia $\mathbf{C}_0$ è esatta, F_1 è esatto e F_2 è esatto e fedele.

Dato $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ funtore esatto tra categorie esatte, definiamo la categoria intermedia $\mathbf{C}_0$ nel modo seguente:

i) gli oggetti di $\mathbf{C}_0$ *sono gli stessi di* $\mathbf{C}$

ii) i morfismi tra due oggetti A *e* B *di* $\mathbf{C}_0$ *sono i morfismi di* $\mathbf{D}$ *tra* $F(A)$ *e* $F(B)$ *che si possono esprimere come composizione di un numero finito di morfismi raggiunti da* F *e di inversi di isomorfismi raggiunti da* F*. La composizione è definita in modo ovvio.*

Risulta allora che $\mathbf{C}_0$ *è una categoria esatta.*

Dim.: 4.4.

Definiamo i funtori della fattorizzazione F_1 e F_2 ponendo semplicemente $F_1(A) = A$ e $F_1(f) = F(f)$; $F_2(A) = F(A)$ e $F_2(\phi) = \phi$. E' immediato verificare che F_1 e F_2 sono esatti e F_2 è fedele.

2.7. La f-fattorizzazione esatta gode di una proprietà universale analoga a 2.2. ed il funtore G è anche esatto; cioè per ogni altra fattorizzazione $F = G_2 G_1$ dove G_1 è esatto e G_2 è esatto fedele esiste un unico funtore G esatto (e necessariamente fedele) tale che $G_1 = G F_1$ e $F_2 = G_2 G$.

2.8. *Chiameremo* QUOZIENTE ESATTO *un funtore esatto bigettivo sugli oggetti e tale che ogni mappa del suo codominio sia composizione finita di mappe raggiunte e di inversi di isomorfismi raggiunti.*

Una f-fattorizzazione esatta $F = F_2 F_1$ è caratterizzata dal fatto che F_1 è un quoziente esatto e F_2 è un funtore esatto fedele.

Si vede facilmente che una tale fattorizzazione è unica a meno di isomorfismi di categorie. Basta applicare a due possibili f-fattorizzazioni esatte la proprietà universale 2.7., ottenendo due funtori esatti (unici) G e H, $G : \mathrm{C}_0 \longrightarrow \mathrm{C}_1$ $H : \mathrm{C}_1 \longrightarrow \mathrm{C}_0$ (dove C_0 e C_1 sono le due categorie intermedie) per cui risulta $GH = Id_{\mathrm{C}_1}$ $HG = Id_{\mathrm{C}_0}$

2.9. *Siano* C *e* D *categorie esatte ed F un funtore esatto con $F = F_2 F_1$ la sua f-fattorizzazione esatta.*

Se consideriamo le simmetrizzazioni canoniche F^0, F_1^0, F_2^0 dei tre funtori (v. [4] 6.3. *pg.* 206*) risulta che $F_2^0 F_1^0$ è la f-fattorizzazione di F^0.*

Dim.: 4.6.

2.10. *Se* C *e* D *sono esatte distributive e F è esatto anche* C_0 *è esatta distributiva (v.* [5], 6 *pg* 4*).*

Dim.: Immediata, tenuto conto che F_2 è esatto fedele e quindi conserva unioni e intersezioni di sottoggetti.

Possiamo allora considerare le Θ-simmetrizzazioni dei funtori F_1 e F_2 (v. [1] 1.1. pg. 214), si ha che $F_2^{\Theta} F_1^{\Theta}$ è la f-fattorizzazione di F^{Θ}.

Dim.: analoga a 4.6.

2.11. Dato un funtore esatto $F : \mathrm{E}_1 \longrightarrow \mathrm{E}_2$ tra U-categorie esatte, possiamo considerare sia la sua f-fattorizzazione esatta che la sua fattorizzazione descritta in 1.12. La prima fattorizzazione si ottiene dalla seconda facendo la f-fattorizzazione esatta del funtore intermedio.

Osserviamo infatti che in EX si ha che:

i) Quoziente di Serre $\Rightarrow$ *quoziente esatto* $\Rightarrow$ *epic*

ii) Monic normale $\Rightarrow$ *funtore esatto fedele*

(nessuna delle implicazioni è in generale invertibile).

Inoltre la composizione di quozienti esatti è un quoziente esatto e la composizione di funtori fedeli è un funtore fedele. Quindi da i) e da ii) segue che, fattorizzando il funtore intermedio della fattorizzazione in tre, in quoziente esatto e funtore esatto fedele e componendo il quoziente di Serre con il quoziente esatto e il funtore esatto fedele con il monic normale si ha la f-fattorizzazione esatta del funtore originario.

3. - Categoria esatta generata da una sottocategoria

3.1. Sia Δ una sottocategoria di una categoria esatta E, ci chiediamo se esiste una sottocategoria esatta di E contenente Δ e che sia in qualche modo minimale. In generale non è possibile determinare la «più piccola» sottocategoria esatta di E contenente Δ: infatti sia E la categoria G dei gruppi abeliani e sia Δ il diagramma $\mathbf{Z} \xrightarrow{p} \mathbf{Z}_2$ dove p è il morfismo canonico.

Una categoria esatta contenente Δ è schematizzata dalla sottocategoria

$$E_1 \qquad 2\mathbf{Z} \xrightarrow{m} \mathbf{Z} \xrightarrow{p} \mathbf{Z}_2$$

dove m è l'immersione canonica, con oggetto nullo, identità e morfismi nulli.

Un'altra sottocategoria esatta può essere E_2 dove, oltre all'oggetto nullo, le identità e i morfismi nulli, i morfismi di $\mathbf{Z}$ in $\mathbf{Z}$ sono la moltiplicazione per 2, per 4 ecc. e i morfismi di $\mathbf{Z}$ in $\mathbf{Z}_2$ sono i loro conuclei.

E' chiaro che E_1 non si può immergere in E_2 (né viceversa) e, d'altra parte, l'intersezione insiemistica di E_1 ed E_2 non è una sottocategoria esatta.

Inoltre EX non possiede intersezioni categoriali (definite mediante il pullback) come prova il seguente esempio.

ESEMPIO:

Sia G la categoria dei gruppi abeliani e sia C la sottocategoria di G schematizzata dal diagramma (3) (con l'oggetto nullo, le identità, i morfismi canonici e le composte, dove $6\mathbf{Z}$ e $(6\mathbf{Z})'$ indicano due oggetti distinti isomorfi in G ma non in C).

(3)

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathbb{Z}_2 \arrow[dr, two heads] & \\
(6\mathbb{Z})' \arrow[r, tail, "m"] & 3\mathbb{Z} \arrow[r, tail, "\varphi"] & \mathbb{Z} \arrow[ur, two heads] \arrow[r, two heads] & \mathbb{Z}_3 \arrow[r, two heads] & \mathbb{Z}_6 \\
6\mathbb{Z} \arrow[r, tail] \arrow[ur, tail, "n"] & 2\mathbb{Z} \arrow[ur, tail, "n_1"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Sia $\mathcal{E}_1$ la sottocategoria piena di $\mathcal{C}$ senza l'oggetto $(6\,\mathbf{Z})'$,

Sia $\mathcal{E}_2$ la sottocategoria di $\mathcal{C}$ non contenente il morfismo n.

$\mathcal{E}_1$ ed $\mathcal{E}_2$ sono esatte, siano ora F, G i rispettivi funtori immersione canonica in $\mathcal{G}$.

Supponiamo per assurdo che esista il pullback di F e G con due funtori esatti $G_1 : \mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{E}_1$ e $F_1 : \mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{E}_2$.

La categoria $\mathcal{E}_0$ deve essere esatta e deve contenere un morfismo f tale che $G_1(\mathrm{f}) = F_1(\mathrm{f}) = \phi$, perché la categoria esatta $\mathcal{E}$ formata dalla sequenza $0 \longrightarrow 3\,\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_3 \longrightarrow 0$ rende commutativo il diagramma (4)

(4)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_1 \arrow[r, "F"] & \mathcal{G} \\
\mathcal{E} \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{E}_2 \arrow[u, "G"']
\end{tikzcd}$$

per lo stesso motivo $\mathcal{E}_0$ deve contenere un morfismo g tale che $G_1\,(\mathrm{g}) = F_1\,(\mathrm{g}) = \mathrm{n}_1$ allora anche $\mathrm{u} = \ker\,((\mathrm{cok\,g})\,\mathrm{f})$ appartiene ad $\mathcal{E}_0$ e deve essere $F\,G_1(\mathrm{u}) = n$ e $G\,F_1(\mathrm{u}) = m$ e ciò è assurdo.

D'altra parte anche quando in EX esiste il pullback esso può non contenere la sottocategoria Δ contenuta sia in $\mathcal{E}_1$ che in $\mathcal{E}_2$.

Consideriamo infatti le sottocategorie $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ e Δ viste in 3.1. con i funtori immersione canonica in $\mathcal{G}$; il loro pullback in EX è la categoria esatta formata dai due soli oggetti $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Z}_2$, le identità, i morfismi nulli e l'oggetto nullo (e non contiene quindi Δ).

3.3. Osserviamo inoltre che non è neppure possibile limitarsi ad aggiungere a Δ i nuclei e i conuclei dei morfismi di Δ, le loro composizioni ed iterare il procedimento fino ad ottenere una sottocategoria esatta, perché quest'ultima dipende dalle scelte fatte ogni volta: nell'esempio 3.1. si possono ottenere in tal modo sia $\mathcal{E}_1$ che $\mathcal{E}_2$, secondo che si scelga come nucleo di p il morfismo m oppure la moltiplicazione per 2.

3.4. Non potendo costruire la «minima» sottocategoria esatta di $\mathcal{E}$ contenente Δ vogliamo definire l'esattizzazione Δ^e di Δ come una categoria esatta Δ^e con un funtore esatto e fedele $F\colon \Delta^e \longrightarrow \mathcal{E}$ che verifichi la seguente proprietà universale: *per ogni funtore esatto fedele* $F'\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ *esiste un funtore esatto* G *(necessariamente fedele)* $G\colon \Delta^e \longrightarrow \mathcal{D}$ *unico a meno di isomorfismi di funtori che rende il diagramma* (5) *commutativo a meno di isoformismi di funtori.*

$$\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\delta_0"] \arrow[ddr, "\delta_1"'] & & \mathcal{E} \\
& \Delta^e \arrow[ur, "F"] \arrow[d, "G"] & \\
& \mathcal{D} \arrow[uur, "F'"'] &
\end{tikzcd} \tag{5}$$

Osserviamo che richiedere la commutatività del diagramma (5) e l'unicità di G a meno di isomorfismi di funtori è necessario perché valga la proprietà universale, altrimenti, anche se riuscissimo a costruire Δ^e, potremmo prendere la categoria esatta $\mathcal{D}$ uguale a Δ^e, salvo che tutti i nuclei sono sdoppiati, in tal caso esisterebbero evidentemente due funtori distinti G e G' (isomorfi tra loro) che renderebbero il diagramma (5) commutativo.

In questo modo è chiaro che la categoria Δ^e risulta univocamente determinata a meno di equivalenze secondo Grothendieck.

3.5. - **Costruzione della esattizzazione Δ^e di Δ.**

Costruiamo Δ^e come sottocategoria esatta di una categoria esatta $\mathcal{E}'$ equivalente ad $\mathcal{E}$.

$\mathcal{E}'$ è definita nel modo seguente:

Sia $\mathcal{E}_0$ *una categoria esatta equivalente al punto ed avente* *tanti oggetti quanti sono i morfismi di* E, *cioè* $\mathrm{ob}(\mathrm{E}_0) = \mathrm{Hom}(\mathrm{E})$ *e se* $\alpha, \beta \in \mathrm{ob}(\mathrm{E}_0)$ *esiste un unico morfismo* $i_{\alpha,\beta} : \alpha \longrightarrow \beta$ *(chiaramente* $i_{\alpha,\beta}$ *è un isomorfismo).*

Definiamo $\mathrm{E}^1 = \mathrm{E} \times \mathrm{E}_0$, $\mathrm{E}^2 = \mathrm{E}^1 \times \mathrm{E}_0^1 \ldots \mathrm{E}^n = \mathrm{E}^{n-1} \times \mathrm{E}_0^{n-1}$

Chiaramente E^n è equivalente ad E, inoltre E si immerge in modo canonico in E^1 (mandando un oggetto A di E nella coppia $(A, 1_0)$ e mandando un morfismo α nella coppia $(\alpha, i_{1_0,1_0})$, dove $1_0 : 0 \longrightarrow 0)$.

Analogamente E^{n-1} si immerge in E^n.

Poniamo allora $\mathrm{E}' = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{E}^n : H \in \mathrm{ob}(\mathrm{E}')$ se esiste n tale che $H \in \mathrm{ob}(\mathrm{E}^n)$; dati $H, K \in \mathrm{ob}(\mathrm{E}')$ esistono n_1 e n_2 tali che $H \in \mathrm{E}^{n_1}$ e $K \in \mathrm{E}^{n_2}$, posto allora $m = \max(n_1, n_2)$ definiamo $\alpha \in \mathrm{E}'(H, K)$ se $\alpha \in \mathrm{E}^m(H, K)$ (la composizione è ovvia).

E' è una U-categoria esatta equivalente ad E.

i) indichiamo con Δ' *il sottografo di* E^1 *ottenuto da* Δ, *aggiungendo i nuclei, nel senso che se* $\alpha : A \longrightarrow B \in \Delta$ *e* $k : K \longrightarrow A$ *è un nucleo di* α *in* E *si considera in* E^1 *il sottografo*

$$(K, \alpha) \xrightarrow{(k, i_{\alpha, 1_0})} (A, 1_0) \xrightarrow{(\alpha, i_{1_0, 1_0})} (B, 1_0)$$

in tal modo tutti i nuclei così aggiunti sono diversi tra loro.

Inoltre per ogni K *nucleo in* E^1 *e per ogni coppia di mappe* f, g *tali che* $g f = 0$ *in* E^1 *aggiungiamo anche l'unico morfismo* h *tale che* $(\ker(f))\, h = g$

ii) sia poi Δ'' *il sottografo di* E^2 *ottenuto in modo analogo da* Δ' *aggiungendo i conuclei e le mappe necessarie. Chiameremo allora* Δ^1 *la sottocategoria generata da* Δ'' *in* E^2. *Iterando il procedimento si ottiene una successione di sottocategorie* $\Delta^i \subset \mathrm{E}^{2i}$.

iii) sia infine $\Delta^e = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \Delta^i$ contenuta in E'

Δ^e *è una sottocategoria esatta di* E' *e verifica la proprietà universale* 3.4.

Dim.: 4.7.

Δ^e è quindi l'esattizzazione di Δ che volevamo costruire.

3.6. Dalla proprietà universale 3.4. risulta immediatamente che Δ^e è unica a meno di equivalenze di Grothendieck tra categorie.

3.7. *Se* $F : \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{D}$ *è un funtore esatto tra categorie esatte, in generale* $F(\mathrm{C})$ *non è una sottocategoria di* D, *però possiamo consi-*

derare l'esattizzazione $(\mathcal{C}')^e$ *della sottocategoria* $\mathcal{C}'$ *generata da* $F(\mathcal{C})$ *in* $\mathcal{D}$.

Tale esattizzazione è equivalente alla categoria $\mathcal{C}_0$ *intermedia della f-fattorizzazione esatta di* F, *in quanto il funtore canonico* $T : \mathcal{C}_0 \longrightarrow (\mathcal{C}')^e$ *è una equivalenza di Grothendieck, essendo fedele, pieno e rappresentativo.*

4. - **Dimostrazioni**

4.1. Prova del teorema 1.4.

a) $\mathcal{EX}$ ha nuclei: dato un funtore esatto F tra due categorie esatte $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{C}'$ il nucleo di F è il funtore $G : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{C}$ dove $\mathcal{K}$ è la sottocategoria piena di $\mathcal{C}$ che ha per oggetti quelli la cui immagine mediante F è zero e G è l'immersione canonica.

Notiamo subito che $\mathcal{K}$ è una sottocategoria spessa di $\mathcal{C}$ (v. [6] th. 1.11 pg. 138 e [2] 1 pg. 365) poiché, se $A \in \mathcal{K}$ tutti i sottoggetti e i quozienti di A appartengono a $\mathcal{K}$, inoltre se $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ è una sequenza esatta in $\mathcal{C}$ con $A, C \in \mathcal{K}$ il funtore F trasforma tale sequenza nella sequenza esatta $0 \longrightarrow 0 \longrightarrow F(B) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$ per cui $F(B) = 0$ cioè $B \in \mathcal{K}$.

In particolare quindi $\mathcal{K}$ è una sottocategoria esatta di $\mathcal{C}$.

E' immediato verificare che il funtore G è esatto e che $FG = 0$, per provare che $G = \mathrm{Ker}(F)$ basta allora provare che, per ogni funtore esatto $H : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ tale che $FH = 0$ ($\mathcal{E}$ categoria esatta) esiste un unico funtore esatto $H_1 : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{K}$ che rende commutativo in $\mathcal{EX}$ il seguente diagramma (6).

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, "G"] & \mathcal{C} \arrow[r, "F"] & \mathcal{C}' \\ \mathcal{E} \arrow[u, dashed, "H_1"] \arrow[ur, "H"'] & & \end{tikzcd} \tag{6}$$

Infatti se $FH = 0$ allora per ogni oggetto A di $\mathcal{E}$ $F(H(A)) = 0$ quindi $H(A) \in \mathcal{K}$, allora possiamo definire $H_1(A) = H(A)$, inoltre se $f : A \longrightarrow B$ è un morfismo di $\mathcal{E}$, poniamo $H_1(f) = H(f)$ (cioè H_1 è H stesso visto come funtore di $\mathcal{E}$ in $\mathcal{K}$).

A questo punto la commutatività del diagramma (6), l'esattezza e l'unicità di H_1 sono immediate.

Premesse le definizioni 1.1, 1.2, 1.3 si prova che:

b) EX ha conuclei: dato il funtore F come in a) proviamo che coker (F) è il funtore $H : \mathrm{c}' \longrightarrow \mathrm{c}'/\mathrm{sp}\,(\mathrm{F}\,(\mathrm{c}))$. Infatti per ogni funtore esatto $L : \mathrm{c}' \longrightarrow \mathrm{E}$ tale che $LF = 0$ (E categoria esatta) esiste un unico funtore esatto $L_l : \mathrm{c}'/\mathrm{sp}\,(\mathrm{F}\,(\mathrm{c})) \longrightarrow \mathrm{E}$ che rende commutativo in EX il diagramma (7).

(7)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] & \mathcal{C}' \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "L"'] & \mathcal{C}'/_{sp}(F(\mathcal{C})) \arrow[d, dashed, "L_1"] \\
& & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

Definiamo $L_1(\mathrm{A}) = L(\mathrm{A})$. Sia $\phi : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ un morfismo in $\mathrm{c}'/\mathrm{sp}\,(F\,(\mathrm{c}))$ allora $\phi = (\mathrm{m}, \mathrm{f}, \mathrm{p})$ poniamo

$$L_1(\phi) = (L\,(\mathrm{p}))^{-1}\, L\,(\mathrm{f})\,(L\,(\mathrm{m}))^{-1}$$

— $L(\mathrm{p})$ ed $L(\mathrm{m})$ sono iso perché $LF = 0$ —. Si verifica facilmente che L_1 è ben posto e che è esatto, inoltre L_1 rende commutativo il diagramma per come è costruito, ed è unico.

4.2. Prova di 1.6.

Sia F un funtore monic tra E_1 e E_2 proviamo che F è iniettivo sugli oggetti, infatti se fosse $F(\mathrm{A}) = F(\mathrm{B})$ con $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$, sia E_0 la categoria esatta formata dall'oggetto nullo e dall'oggetto P, definiamo due funtori esatti G e H da E_0 in E_1 in modo canonico, ponendo però $G\,(\mathrm{P}) = \mathrm{A}$ e $H\,(\mathrm{P}) = \mathrm{B}$, allora $FG = FH$, e ciò è assurdo. Analogamente F non può identificare due sequenze esatte parallele (tra gli stessi oggetti) perché basterà prendere come categoria E_0 quella formata da un'unica sequenza esatta e mandarla, mediante G e H in ciascuna delle due sequenze considerate.

Viceversa, se F è iniettivo sugli oggetti e sulle sequenze esatte, se $FG = FH$ allora $G(\mathrm{A}) = H(\mathrm{A})$ per ogni oggetto A, inoltre se $\mathrm{f} : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ è un morfismo di E_0 basta considerare le due sequenze esatte formate da $G(\mathrm{f})$ e $H(\mathrm{f})$ con i rispettivi nuclei e conuclei, poiché F le identifica esse devono coincidere, quindi in particolare $G(\mathrm{f}) = H(\mathrm{f})$.

4.3. Dimostrazione della proprietà universale 2.2.

Consideriamo il diagramma (8).

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr] \arrow[dr, "F_1"] \arrow[ddr, "G_1"'] & & \mathcal{D} \\
& \mathcal{C}_0 \arrow[ur, "F_2"] \arrow[d, dashed, "!G"] & \\
& \mathcal{C}_1 \arrow[uur, "G_2"'] &
\end{tikzcd} \tag{8}$$

Definiamo $G(\mathrm{A}) = G_1(\mathrm{A})$ e se $F_1(\mathrm{f}) : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ è un morfismo di $\mathcal{C}_0$ poniamo $GF_1(\mathrm{f}) = G_1(\mathrm{f})$ che è ben definito poiché se $\mathrm{f}' R_F \mathrm{f}$ si ha $GF_1(\mathrm{f}') = G_1(\mathrm{f}') = G_1(\mathrm{f})$ essendo G_2 fedele. Per costruzione G rende il diagramma (8) commutativo, inoltre G è unico perché se $G' : \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{C}_1$ è un altro funtore con le stesse proprietà di G si ha che $G'(\mathrm{A}) = G(\mathrm{A})$, essendo F_1 bigettivo sugli oggetti e $G'F_1(\mathrm{f}) = GF_1(\mathrm{f})$ perché G_2 è fedele. Infine G è fedele perché primo di fedele.

4.4. Prova di 2.6.

a) $\mathcal{C}_0$ ha oggetto nullo che è lo stesso di $\mathcal{C}$.

b) $\mathcal{C}_0$ ha nuclei, infatti sia $\phi : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ un morfismo di $\mathcal{C}_0(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ allora ϕ si può esprimere come catena finita $\phi = F(\mathrm{f}_1)(F(\mathrm{g}_1))^{-1} \ldots F(\mathrm{f}_n)(F(\mathrm{g}_n))^{-1}$; sia ora K il nucleo di ϕ in $\mathcal{D}$, si ha che $\mathrm{K} = F(\mathrm{K}')$ con $\mathrm{K}' \in \mathcal{C}$ come si vede facendo il pullback tra 0 e $(F(\mathrm{g}_n))^{-1}$ poi il pullback tra il morfismo ottenuto e $F(\mathrm{f}_n)$ iterando l'operazione.

Per provare che K è nucleo in $\mathcal{C}_0$ bisogna verificare che dato $\psi \in \mathcal{C}_0(\mathrm{H}, \mathrm{A})$ tale che $\phi\psi = 0$ esiste unico $\nu \in \mathcal{C}_0(\mathrm{H}, \mathrm{K})$ che rende commutativo il diagramma (9)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H} \arrow[r] & {} & {} \arrow[l] \arrow[r, dashed, "\psi"] & \mathrm{A} \arrow[r] & {} & {} \arrow[l] \arrow[r, dashed, "\varphi"] & \mathrm{B} \\
\cdot \arrow[u, tail, "h"] \arrow[r] & {} & {} \arrow[l] \arrow[r, dashed, "\eta"'] & \mathrm{K} = F(\mathrm{K}') \arrow[u, tail, "k"'] & & &
\end{tikzcd} \tag{9}$$

basta infatti fare il pullback in $\mathcal{D}$ di k e ψ e risulta $\mathrm{h} = F(\mathrm{h}')$ con $\mathrm{h}' \in \mathcal{C}$ inoltre h è iso perchè è il nucleo di $\phi\,\psi$ allora il morfismo ν cercato è $\eta F(\mathrm{h}')^{-1}$ ed è ovviamente unico.

c) $\mathcal{C}_0$ ha coker, si prova in modo duale.

d) C_0 ha fattorizzazione canonica: infatti se $\phi \in \mathrm{C}_0(\mathrm{A},\mathrm{B})$ la sua fattorizzazione in D è formata da morfismi di C_0 per quanto detto precedentemente in b) e c).

4.5. Prova di 2.7.

Definiamo G ponendo $G(\mathrm{A}) = G_1(\mathrm{A})$ per ogni oggetto A di C_0, dato un morfismo $\phi \in \mathrm{C}_0(\mathrm{A},\mathrm{B})$ si ha $\phi = F_1(\mathrm{g}_n)^{-1} \dots F_1(\mathrm{f}_1)$ poniamo allora $G(\phi) = (G_1(\mathrm{g}_n)^{-1} \dots G_1(\mathrm{f}_1)$. L'esistenza e l'unicità di G si provano in modo analogo a 4.4.

Resta quindi da provare che G è esatto ed è sufficiente verificare che G rispetta i nuclei (la dimostrazione è duale per i conuclei).

Sia allora $\phi \in \mathrm{C}_0(\mathrm{A},\mathrm{B})$ e sia $\mathrm{k} = \ker \phi$ proviamo che $G(\mathrm{k})$ è nucleo di $G(\phi)$: infatti posto h il nucleo di $G(\phi)$ in C_1 esiste un unico morfismo $\chi \in \mathrm{C}_1(G(\mathrm{K}),\mathrm{H})$ che rende commutativo il diagramma (10)

$$\begin{tikzcd} & G(A) \arrow[r, "G(p)"] & G(B) \\ H \arrow[ur, "h"] & G(K) \arrow[l, "\chi"] \arrow[u, "G(k)"'] & \end{tikzcd} \qquad (10)$$

Applicando il funtore esatto e fedele G_2 si ha che $G_2 G(\mathrm{k}) = F_2(\mathrm{k})$ è nucleo di $G_2 G(\phi) = F_2(\phi)$ (essendo F_2 esatto) ma anche $G_2(\mathrm{h})$ è nucleo di $G_2 G(\phi)$ perché G_2 è esatto quindi $G_2(\chi)$ è un isomorfismo e, essendo G_2 fedele, anche χ è un isomorfismo, cioè $G(\mathrm{k})$ è il nucleo di $G(\phi)$.

4.6. Dimostrazione di 2.9.

Proviamo che F_1^0 è un funtore quoziente (cfr. def. 2.1.), infatti ogni morfismo di C_0^0 è raggiunto da un morfismo di C^0; basta verificare che ogni morfismo di C_0 è raggiunto: sia infatti $\phi = F_1(\mathrm{f}_1) \dots$ $F_1(\mathrm{g}_n)^{-1}$ allora ϕ si può scrivere come $F_1^0(\mathrm{f}_1 \tilde{\mathrm{g}}_1 \dots \mathrm{f}_n \tilde{\mathrm{g}}_n)$.

Proviamo ora che F_1^0 è fedele, infatti dati due morfismi paralleli tra oggetti di C_0^0 che abbiano la stessa immagine mediante F_2^0 [v. diagrammi (11) e (12)]

$$\begin{tikzcd}
A & \cdot \arrow[l, tail, "m"'] \arrow[r, two heads, "p"] & \cdot & \cdot \arrow[l, two heads, "q"'] \arrow[r, tail, "n"] & B \\
& \cdot \arrow[ul, "m'"] \arrow[u, "u'"'] \arrow[r, "p'"'] & \cdot \arrow[u, "v'"'] & \cdot \arrow[l, "q'"] \arrow[u, "w'"] \arrow[ur, "n'"'] &
\end{tikzcd} \tag{11}$$

$$\begin{tikzcd}
F_2(A) & \cdot \arrow[l, "F_2(m)"'] \arrow[r, "F_2(p)"] & \cdot & \cdot \arrow[l, "F_2(q)"'] \arrow[r, "F_2(n)"] & F_2(B) \\
& \cdot \arrow[ul, "F_2(m')"] \arrow[u, "u"'] \arrow[r, "F_2(p')"'] & \cdot \arrow[u, "v"'] & \cdot \arrow[l, "F_2(q')"] \arrow[u, "w"] \arrow[ur, "F_2(n')"'] &
\end{tikzcd} \tag{12}$$

dove v, v, w, sono isomorfismi in D.

Consideriamo il pullback in $c_0(m, m', m_1, m_2)$ si ottiene che $F_2(m_1)$ e $F_2(m_2)$ sono isomorfismi, quindi, per la fedeltà di F_2, m_1 e m_2 sono isomorfismi, allora $u' = m_1 m_2^{-1}$ è un isomorfismo. Analogamente, considerando il pushout di $p u'$ e p' si prova che vi è isomorfismo e poi che w' è isomorfismo. Allora i due morfismi tra A e B coincidono in c^0_0 cioè F^0_2 è fedele.

4.7. Prova di 3.5.

Proviamo che Δ^e è una sottocategoria esatta di E'.

Se A è un oggetto di Δ^e allora esiste i tale che $A \in \Delta^i$, quindi $1_A \in \Delta^e$.

Se f, g sono morfismi consecutivi in Δ^e esistono i_1 e i_2 tali che $f \in \Delta^{i_1}$ e $g \in \Delta^{i_2}$, allora posto $j = \max(i_1, i_2)$ f e $g \in \Delta^i$ e quindi a Δ^e che è allora una sottocategoria di E'.

Evidentemente 0 e i morfismi nulli appartengono a Δ^e.

Se poi $f \in \Delta^n$ almeno uno dei suoi nuclei in E' sta in Δ^{n+1} quindi in Δ^e, proviamo allora che è nucleo anche in Δ^e.

Sia allora k il nucleo di f in E' che sta in Δ^{n+1} e sia g tale che $f g = 0$ in Δ^e allora esiste j tale che $k, f, g \in \Delta^i$ e quindi in Δ^{j+1} sta l'unico morfismo h tale che $k h = g$ in E', quindi k è nucleo di f in Δ^e.

La dimostrazione è analoga per i conuclei.

Infine ogni $f \in \Delta^e$ si fattorizza in modo unico in E' e quindi in Δ^e mediante $cok(ker(f))$ e $ker(cok(f))$.

Proviamo ora che Δ^e verifica la proprietà universale 3.4.

Consideriamo il diagramma (5) di 3.4. dove D è una categoria esatta e F' è esatto fedele; $\delta, \delta_0, \delta_1$ sono immersioni e, per ipotesi, $F\delta_0 \simeq F'\delta_1$.

Dobbiamo provare che esiste un unico G esatto tale che $F \simeq F'G$ e $\delta_1 \simeq G\delta_0$ G deve essere identico su Δ, allora basta definirlo su Δ^1 e quindi iterativamente su Δ^n e di conseguenza su Δ^e.

Data $A \xrightarrow{\alpha} B$ in Δ, sia $(K, \alpha) \xrightarrow{(k, i_{\alpha, 1_0})} (A, 1_0) \xrightarrow{(\alpha, i_{1_0, 1_0})} (B, 1_0)$ il

il diagramma in Δ^1 ottenuto con la scelta arbitraria di un nucleo di α in E' sia $K' \xrightarrow{k'} \delta_1 A$ un qualunque nucleo di $\delta_1 A \xrightarrow{\delta, \alpha} \delta_1 B$ in D, definiamo allora $G(K, \alpha) = K'$ e $G(k, i_{\alpha, 1_0}) = k'$. Allora, comunque si scelga K' i funtori F e $F'G$ sono isomorfi.

Il funtore G così costruito è unico a meno di isomorfismi di funtori, in quanto, facendo un'altra scelta K'' del nucleo in D si ottiene un altro funtore G' necessariamente isomorfo a G.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BELCASTRO - M. MARGIOCCO, SΘ *symmetrizations and* CΘ *categorie.* Riv. Mat. Univ. Parma 3 (1977) pg. 213-228.

[2] P. GABRIEL, *Categories Abeliennes.* Bull. Soc. Math. de France 90 (1962) pg. 323-448.

[3] P. GABRIEL - M. ZISMAN, *Calculus of fractions and Homotopy theory.* Springer Verlag 1967.

[4] M. GRANDIS, *Symétrisations de catégories I.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 54 (1975) pg. 271-310.

[5] M. GRANDIS, *Quaternary categorics having Orthodox Symmetrizations (OS1).* Bull. U.M.I. 14 B (1977) pg. 605-629.

[6] A. GROTHENDIECK, *Sur quelques points d'algèbre homologique.* Tohuku Math. J. Ser. II, 9. (1957) pg. 120-221.

[7] S. MAC LANE, *Categories for the working Mathematician.* Springer Verlag 1971.