UN TEOREMA DI PROLUNGAMENTO E ALCUNE PROPRIETA' DELLE SOLUZIONI DEL PROBLEMA DI CAUCHY PER UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE MULTIVOCA (*)

di GABRIELLA CARISTI (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si dimostra un teorema di prolungabilità delle soluzioni di un'equazione differenziale multivoca in uno spazio di Banach* $x'(t) \in F(t, x(t))$ *con la condizione iniziale* $x(a) = x^0$, *estendendo a questo caso un risultato noto per le equazioni differenziali ordinarie. Quando l'equazione è in* $\mathbf{R}^n$, *sotto le stesse condizioni che garantiscono la prolungabilità, si dimostrano alcune proprietà dell'insieme delle soluzioni.*

SUMMARY. - *We prove a theorem of continuation of solutions of a many-valued differential equation in a Banach space* $x'(t) \in F(t, x(t))$, *with the initial condition* $x(a) = x^0$, *extending to this case a result known for ordinary differential equations. When the equation is in* $\mathbf{R}^n$, *from the same conditions that guaratee the continuation of solutions, we deduce some properties of the solution set.*

Introduzione

In K. Deimling [3], si dimostra il seguente teorema di esistenza di soluzioni globali per una equazione differenziale ordinaria in uno spazio di Banach:

Teorema. *Sia* $J = [0, a]$ $(a > 0)$ *un intervallo compatto di* $\mathbf{R}$ *e* X *uno spazio di Banach reale. Supponiamo che* $f : J \times X \rightarrow X$ *sia una funzione continua, che trasforma insiemi limitati in insiemi limitati*

(*) Pervenuto in Redazione il 22 aprile 1980. Lavoro eseguito nell'ambito di una borsa di studio del C.N.R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università degli Studi - Piazzale Europa, 1 - 34100 Trieste.

tale che:

il problema $x'(t) = f(t, x(t)), x(t^0) = x^0$ *ha una soluzione locale per ogni* (t^0, x^0) *in* $[0, a] \times X$;

$[f(t,x), x]_- \leqslant \omega(t, |x|)|x|$ *in* $J \times X$, *essendo* $\omega : J \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ *una funzione continua, tale che il problema* $u'(t) = \omega(t, u(t))$, $u(0) = |x^0|$ *ammette una soluzione massimale definita su* J *non negativa.*

Allora il problema $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(0) = x^0$ *ha almeno una soluzione definita su* J.

Nel paragrafo 1 di questo lavoro ci proponiamo di dimostrare un teorema analogo per il caso delle equazioni differenziali multivoche in uno spazio di Banach del tipo

$$x'(t) \in F(t, x(t)).$$

Nel paragrafo 2 ci proponiamo di studiare alcune proprietà dell'operatore di soluzione relativo al problema studiato nel paragrafo 1, nel caso particolare $X = \mathbf{R}^n$.

Poiché ci occuperemo del prolungamento delle soluzioni, supporremo che la funzione F soddisfi già a delle condizioni sufficienti a garantire l'esistenza di soluzioni locali. Per i risultati di tipo locale rinviamo ad esempio ai lavori di H. Hermes [5], di C. Olech [8] e di A. F. Filippov [4] e agli articoli citati nelle rispettive bibliografie.

Indicheremo con X uno spazio di Banach reale, con $|\cdot|$ la norma in X e con $B(0, r)$ la palla aperta in X di centro 0 e raggio r. $P(X)$ indicherà l'insieme delle parti non vuote di X. In particolare, se $X = \mathbf{R}^n$, useremo il simbolo $(\cdot | \cdot)$ per il prodotto scalare euclideo e $\|\cdot\|$ per la norma che ne deriva.

Ricordiamo che in ogni spazio di Banach reale X si può definire (almeno) un semi-prodotto interno, cioè una applicazione $[\cdot, \cdot] : X \times X \to \mathbf{R}$ tale che sono verificate le seguenti proprietà:

$$[\alpha u + \beta v, w] = \alpha [u, w] + \beta [v, w]$$

$$[u, u] = |u|^2$$

$$|[u, v]| \leqslant |u| \cdot |v| \qquad \text{per ogni } \alpha, \beta \in \mathbf{R} \text{ e } u, v, w \in X.$$

Se $x : D \to X$, porremo $|x|_\infty = \sup \{ |x(t)| : t \in D\}$. Una funzione ω: $[a, b] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ verifica le ipotesi di Carathéodory, se ω è misurabile in t per ogni fissato x, continua in x per ogni fissato t e per ogni compatto K in $[a, b] \times \mathbf{R}^n$ esiste una funzione integrabile reale non negativa $m_K(t)$ tale che $|\omega(t, x)| \leqslant m_K(t)$ per ogni (t, x) in K.

Introduciamo ora alcune nozioni che si riferiscono alle funzioni multivoche, per le quali si veda anche C. Berge [1].

Se (T, μ) è uno spazio di misura, diremo che F: $(T, \mu) \to P(X)$ è μ-misurabile se per ogni aperto A di X, $F^+ A = \{t \in T : F(t) \subset A\}$ è μ-misurabile.

Se Y è uno spazio topologico, diremo che $F : Y \to P(X)$ è semi-continua superiormente se, per ogni aperto A di X, F^+A è aperto in Y.

Diremo che F: $[a, b] \times \mathbf{R}^n \to P(\mathbf{R}^n)$ verifica la proprietà (Q) di Cesari se per ogni successione $x_k \in \mathbf{R}^n$ convergente a x.

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k=i}^{\infty} F(t, x_k) \subset \overline{\mathrm{co}}\, F(t, x) = F(t, x)$$

Ricordiamo che questa proprietà è verificata, ad esempio se F assume valori compatti e convessi ed F è semi-continua superiormente.

Poiché ci occuperemo della prolungabilità delle soluzioni di $x'(t) \in F(t, x(t)), x(a) = x^0$, in generale supporremo che valga già un teorema di esistenza locale. Precisamente diremo che F: $[a, b] \times X \to P(X)$ è ammissibile se per ogni (t^0, x^0) in $[a, b] \times X$ esiste una funzione $x(t)$ definita e continua su $I \subset [a, b]$, $t^0 \in I$ ed esiste una funzione $x'(t)$ definita su I tale che $x'(t)$ è la derivata di $x(t)$ su $I \setminus D$, ove D è un insieme al più numerabile e $x(t) = x^0 + \int_{t^0}^{t} x'(s)\, ds$ per ogni $t \in I$, e inoltre

$$x'(t) \in F(t, x(t)) \text{ in } I \setminus D, \quad x(t^0) = x^0$$

Se $I \subset [a, b]$, $x(t)$ si dice soluzione locale; se $I = [a, b]$ si dice soluzione globale.

1. - Dimostriamo ora un risultato preliminare:

Teorema 1.1. *Sia* F: $[\mathrm{a}, \mathrm{b}] \times \mathrm{X} \to P(\mathrm{X})$ *una funzione ammissibile tale che:*

(i) *per ogni insieme limitato* U *in* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}] \times \mathrm{X}$, *esiste una funzione reale integrabile* $\mathrm{m_U}(\mathrm{t})$ *tale che se* $\mathrm{y} \in \mathrm{F}(\mathrm{t}, \mathrm{x})$ *e* $(\mathrm{t}, \mathrm{x}) \in \mathrm{U}$, *allora* $|\mathrm{y}| \leqslant \mathrm{m_U}(\mathrm{t})$;

(ii) *ogni soluzione di*

(1) $$\mathrm{x}'(\mathrm{t}) \in \mathrm{F}(\mathrm{t}, \mathrm{x}(\mathrm{t})), \ \mathrm{x}(\mathrm{a}) = \mathrm{x}^0$$

è limitata (nell'intervallo massimale di esistenza).
Allora ogni soluzione di (1) *è definita su tutto* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

Dimostrazione. Sia $x(t)$ una soluzione di (1) definita su $[a, b^*[$, ove $b^* = \sup \{\bar{b} \in [a, b]$, tali che $x(t)$ è definita e soddisfa a (1) su $[a, \bar{b}]\}$. Sia $c > 0$ tale che $|x(t)| < c$ per $t \in [a, b]$. Supponiamo $b^* < b$.

Posto $U = [a, b] \times B(0, c)$, sia m_U come in (i); dalla definizione di soluzione si ha che:

$$|x(t) - x(s)| \leqslant \left| \int_s^t |x'(\xi)| \, d\xi \right| \leqslant \left| \int_s^t m_U(\xi) \, d\xi \right| .$$

Dunque esiste il lim $x(t)$ per $t \to b^*$: poniamolo uguale a x_1.

Dal fatto che F è ammissibile, segue l'esistenza di una soluzione locale $z(t)$ definita su un certo intervallo $[b^*, b^* + \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ di

$$z'(t) \in F(t, z(t)), \; z(b^*) = x_1 .$$

Se poniamo allora $w(t) = x(t)$ per $t \in [a, b^*]$ e $w(t) = z(t)$ per $t \in [b^*, b^* + \varepsilon]$, $w(t)$ è una soluzione di (1) definita su $[a, b^* + \varepsilon]$, che prolunga $x(t)$. Ciò è in contraddizione con la definizione di b^*. Quindi $x(t)$ deve essere definita su $[a, b]$.

Osservazione. L'ipotesi (i) è verificata, se ad esempio F trasforma insiemi limitati in insiemi limitati oppure quando $X = \mathbf{R}^n$ se F è semi-continua superiormente. (i) interviene anche nella definizione di ipotesi del tipo di Carathéodory che si adopera per le funzioni multivoche.

Teorema 1.2. *Sia* $\mathrm{F}: [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \times \mathrm{X} \to P(\mathrm{X})$ *una funzione ammissibile che*

(j) *per ogni insieme limitato* U *di* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}] \times \mathrm{X}$ *esiste una funzione reale integrabile* $\mathrm{m_U}(\mathrm{t})$ *tale che se* $\mathrm{y} \in \mathrm{F}(\mathrm{t}, \mathrm{x})$ *e* $(\mathrm{t}, \mathrm{x}) \in \mathrm{U}$, *allora* $|\mathrm{y}| \leqslant \mathrm{m_U}(\mathrm{t})$;

(jj) *sia* $\omega: [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ *una funzione soddisfacente all'ipotesi di Carathéodory tale che:*

$$\mathrm{u}'(\mathrm{t}) = \omega(\mathrm{t}, \mathrm{u}(\mathrm{t})), \; \mathrm{u}(\mathrm{a}) = \mathrm{u}^0 \; (\mathrm{u}^0 > 0)$$

ha soluzione massimale assolutamente continua non negativa $\mathrm{u}(\mathrm{t})$ *definita su* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *e per ogni* (t, x) *in* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}] \times \mathrm{X}$

$$\sup \{[\mathrm{y}, \mathrm{x}] : \mathrm{y} \in \mathrm{F}(\mathrm{t}, \mathrm{x})\} \leqslant \omega(\mathrm{t}, |\mathrm{x}|) \, |\mathrm{x}| ,$$

essendo $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ *un fissato semi-prodotto interno in* X.

Allora, per ogni $\mathrm{x}^0 \in \mathrm{X}$ *tale che* $|\mathrm{x}^0| \leqslant \mathrm{u}^0$, *il problema*

$$\mathrm{x}'(\mathrm{t}) \in \mathrm{F}(\mathrm{t}, \mathrm{x}(\mathrm{t})), \; \mathrm{x}(\mathrm{a}) = \mathrm{x}^0 \tag{1}$$

ha tutte le soluzioni definite su $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

Dimostrazione. E' sufficiente provare che ogni soluzione è limitata sul massimo intervallo di esistenza, perché allora dal Teorema 1.1 si deduce la tesi.

Supponiamo che $x(t)$ sia una soluzione di (1) definita su $[a, \bar{a}]$: allora $x(t)$ è differenziabile su $[a, \bar{a}] \setminus D$ *e* $x'(t) \in F(t, x(t))$ su $[a, \bar{a}] \setminus D$. Ove $x(t)$ è differenziabile $x(t)$, ha derivata destra e sinistra e si può verificare che:

$$d^-/dt\,(|x(t)|^2) = 2\,|x(t)|\,d^-/dt\,|x(t)| \leqslant$$
$$\leqslant 2\,[x'(t), x(t)]$$

ove d^-/dt indica la derivata sinistra. Osserviamo che la disuguaglianza si ottiene usando le proprietà del semi-prodotto interno, e dividendo per $h < 0$ e passando al limite per $h \to 0^-$ in

$$[x(t+h) - x(t), x(t)] = [x(t+h), x(t)] -$$
$$- [x(t), x(t)] \leqslant |x(t)|\,(|x(t+h)| - |x(t)|),$$

dalla ipotesi (ii), otteniamo allora

$$d^-/dt\,(|x(t)|^2) \leqslant 2\,[x'(t), x(t)] \leqslant \omega(t, |x(t)|)\,|x(t)|$$

su $[a, \bar{a}] \setminus D$.

Usando il teorema sulle disuguaglianze differenziali contenuto in C. Olech - Z. Opial [7], con l'ipotesi III, che nel nostro caso è verificata poiché l'insieme dei punti ove $d^-/dt\,(|x(t)|^2)$ non esiste finita è al più D, si ottiene che $|x(t)| \leqslant |u(t)|$. Osserviamo che abbiamo così dimostrato che ogni soluzione $x(t)$ di (1) verifica: $|x|_\infty \leqslant |u|_\infty$.

Osservazione. Sottolineamo che la numerabilità dell'insieme D, in cui la derivata della soluzione può eventualmente non esistere è una ipotesi necessaria per poter applicare il teorema di [7].

Se X è di Hilbert e $x(t)$ è una funzione continua di $[a, b]$ in X, per la quale esiste una funzione $x'(t)$ tale che $x'(t)$ è la derivata di $x(t)$ su $[a, b] \setminus N$, ove N è un insieme di Lebesgue-misura nulla, allora $|x(t)|^2$ è una funzione assolutamente continua. Quindi se $x(t)$ è una soluzione di (1) su $[a, \bar{a}]$ si ottiene

$$d/dt\,(|x(t)|^2) \leqslant \omega(t, |x(t)|)\,|x(t)| \text{ in } [a, \bar{a}] \setminus \mathrm{N},$$

ragionando come nella dimostrazione del teorema precedente. Usando ancora il teorema in [7] però questa volta con l'ipotesi *I*, si ha che $|x(t)| \leqslant |u(t)|$ in $[a\ \bar{a}]$. Così si vede che nel caso degli spazi di Hilbert (ad esempio $\mathbf{R}^n$), il Teorema 1.2 continua a valere se si considera un concetto più generale di soluzione.

Osservazione. Riportiamo qui di seguito alcuni esempi di funzioni F verificanti l'ipotesi (jj).

Se esiste un limitato K tale che $F(t,x) \subset g(t) \cdot K$ per ogni $(t,x) \in [a,b] \times X$, essendo $g(t)$: $[a,b] \to \mathbf{R}^n$ una funzione integrabile, allora l'ipotesi (jj) è verificata per $\omega(t,x) = kg(t)$, con k costante reale opportuna.

Se esistono due funzioni integrabili su $[a,b]$, $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ tali che $|y| \leq \alpha(t) + \beta(t)x$ per ogni $(t,x) \in [a,b] \times X$ e $y \in F(t,x)$, l'ipotesi (jj) è verificata per $\omega(t,x) = \alpha(t) + \beta(t)x$.

2. - In questo paragrafo, riassumeremo alcune proprietà dell'operatore multivoco di soluzione associato al problema (1) nel caso $X = \mathbf{R}^n$.

Lemma 2.1. *Sia* $\{x_k\}$ *una successione di funzioni assolutamente continue,* $x_k : [a,b] \to \mathbf{R}^n$. *Supponiamo che* $x_k(t) \to x(t)$ *per* $k \to \infty$ *per ogni* $t \in [a,b]$ *e che* $\|x'_k(t)\| \leq g(t)$ *quasi ovunque in* $[a,b]$, *ove* g *è una funzione integrabile.*

Allora x *è una funzione assolutamente continua tale che*

$$x'_k(t) \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \bigcup_{k=i}^{\infty} x'_k(t)$$

quasi ovunque in $[a,b]$.

Sia F: $[a,b] \times \mathbf{R}^n \to P(\mathbf{R}^n)$ una funzione ammissibile, diremo S: $\mathbf{R}^n \to P(C^0([a,b], \mathbf{R}^n))$ l'operatore definito da $S(x^0) = \{x(t)$ funzioni assolutamente continue soluzioni di $x'(t) \in F(t, x(t))$, $x(a) = x^0\}$.

Teorema 2.1. *Sia* M *un compatto in* $\mathbf{R}^n$ *ed* $R > 0$ *tale che* $M \subset B(0,R)$ *e sia* F: $[a,b] \times \mathbf{R}^n \to P(\mathbf{R}^n)$ *una funzione ammissibile, verificante la proprietà* (Q) *e le seguenti:*

(k) *per ogni insieme limitato* $U \subset [a,b] \times \mathbf{R}^n$ *esiste una funzione reale integrabile* $m_U(t)$ *tale che* $\|y\| \leq m_U(t)$ *per ogni* $(t,x) \in U$ *e* $y \in F(t,x)$;

(kk) *esiste una funzione* ω: $[a,b] \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ *verificante l'ipotesi di Carathéodory tale che* $\sup\{(y \mid x) : y \in F(t,x)\} \leq \omega(t, \|x\|)\, \|x\|$ *per ogni* $(t,x) \in [a,b] \times \mathbf{R}^n$ *tale che*

$$u'(t) = \omega(t, u(t)), \quad u(a) = R$$

ammette una soluzione massimale assolutamente continua non negativa $u(t)$ *definita su* $[a,b]$.

Allora $S(M)$ *è compatto.*

Dimostrazione. $S(M)$ è limitato, come discende dal Teorema 1.2: infatti, se $x^0 \in M$, allora $\|x^0\| \leqslant R$ e quindi se $x \in S(x^0) \subset S(M)$, $|x|_\infty \leqslant |u|_\infty$.

Preso allora l'insieme $U = [a, b] \times B(0, |u|_\infty)$ e posto $m_U(t)$ come in (k), se $x \in S(M)$ si ha anche $\|x'(t)\| \leqslant m_U(t)$ per ogni $t \in [a, b]$. Quindi $S(M)$ è equi-continuo. Usando il teorema di Ascoli-Arzelà, si vede che se x_k è una successione contenuta in $S(M)$, questa possiede una sotto-successione x_j convergente a una certa $x(t)$ uniformemente. Per il Lemma 1.2 e usando la proprietà (Q), $x(t)$ è assolutamente continua ed è soluzione di (1) con $x^0 = \lim x_j(a)$, $j \to \infty$.

Corollario 2.1. *Se* $\mathrm{F}: [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \times \mathbf{R}^n \to P(\mathbf{R}^n)$ *è semi-continua superiormente in* x *con valori compatti e convessi e se per ogni* $\mathrm{x} \in \mathbf{R}^n$ *esiste una funzione misurabile* $\mathrm{f_x}$ *tale che* $\mathrm{f_x}(\mathrm{t}) \in \mathrm{F}(\mathrm{t}, \mathrm{x})$ *per ogni* $t \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *ed esiste una funzione reale* $\mathrm{g}(\mathrm{t})$ *integrabile su* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *tale che se* $\|\mathrm{y}\| \leqslant \mathrm{g}(\mathrm{t})$ $\mathrm{y} \in \mathrm{F}(\mathrm{t}, \mathrm{x})$, *allora per ogni compatto* M *di* $\mathbf{R}^n$, S (M) *è compatto.*

Dimostrazione. La ammissibilità di F discende da un teorema di Kikuchi per la dimostrazione del quale si veda ad esempio J. L. Davy [2]. L'ipotesi (k) è verificata automaticamente. Per l'ipotesi (kk), basta scegliere $\omega(t, x) = g(t)$ e banalmente si possono verificare le proprietà richieste. Quindi la tesi discende dal Teorema 2.1.

Una dimostrazione di questo corollario si trova anche in J. L. Davy [2].

Corollario 2.2 *Nelle ipotesi su* F *del Corollario* 2.1, *l'operatore* S *ha valori compatti.*

Teorema 2.2. *Sia* $\mathrm{F}: [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \times \mathbf{R}^n \to P(\mathbf{R}^n)$ *una funzione ammissibile, verificante la proprietà* (Q) *e le ipotesi* (j) *e* (jj) *del Teorema* 1.2 *(ove si prenda come norma la norma euclidea e come semi-prodotto interno il prodotto scalare euclideo di* $\mathbf{R}^n$*). Allora* $\mathrm{S}: \mathrm{B}(0, \mathrm{u}^0) \subset \mathbf{R}^n \to P(\mathrm{C}([\mathrm{a}, \mathrm{b}], \mathbf{R}^n))$ *è a valori compatti e semi-continua superiormente.*

Dimostrazione. S ha valori compatti per il Teorema 2.1.

Sia ora $x^0 \in B(0, u^0)$. Supponiamo che S non sia semi-continua superiormente in x^0: allora esiste un $\bar{\varepsilon} > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ $S(B(x^0, \delta)) \subset S(x^0)^{\bar{\varepsilon}}$, ove $S(x^0)^{\bar{\varepsilon}}$ indica l'unione di tutte le palle aperte di centro y e raggio $\bar{\varepsilon}$ al variare di y in $S(x^0)$.

Sia $\bar{k}$ un intero positivo tale che $\overline{B(x^0, 1/\bar{k})} \subset B(0, u^0)$ e sia $x_k \in S(B(x^0, 1/k))$ e $x_k \notin S(x^0)^{\bar{\varepsilon}}$ per ogni $k \geqslant \bar{k}$. Dal fatto che $x_k \in S(\overline{B(x^0, 1/\bar{k})})$ per ogni $k \geqslant \bar{k}$ e dal Teorema 2.1 segue che $\{x_k\}$

ammette una sotto-successione $\{x_j\}$ convergente a $x \in \overline{S(B(x^0, 1/\bar{k}))}$. Questa successione di funzioni x_j è tale che $x_j(a) \in B(x^0, 1/j)$ e quindi poiché $x_j \to x$, $x(a) = x^0$, cioè $x \in S(x^0)$. Ciò è in contraddizione con l'ipotesi che $x_j \notin S(x^0)^{\bar{\varepsilon}}$ per ogni j, la quale implica che $\{x_j\}$ non può cadere definitivamente in nessun intorno abbastanza piccolo di un elemento di $S(x^0)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. BERGE, *Espaces topologiques: fonctions multivoques*, Dunod, Paris, 1959.

[2] J. L. DAVY, *Properties of the set of solutions of generalized differential equations*, Bull. Austral. Math. Soc., 6 (1972), 379-398.

[3] K. DEIMLING, *Ordinary differential equations in Banach spaces*, Lecture Notes in Mathematics, n. 596, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[4] A. F. FILIPPOV, *Conditions for the existence of solutions of many-valued differential equations*, Differential Equations, 13 (6) (1977), 740-746.

[5] H. HERMES, *On continuous and measurable selections and the existence of solutions of generalized differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc., 29 (1971), 535-542.

[6] G. LUMER, *Semi-inner product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 100 (1961), 29-43.

[7] C. OLECH - Z. OPIAL, *Sur une inegalité différentielle*, Ann. Pol. Math., 7 (1960), 247-254.

[8] C. OLECH, *Existence of solutions of non-convex orientor fields*, Boll. Un. Mat. Ital., 11 (1975), 189-197.