UN'OPERAZIONE SU IDEALI IN ANELLI GRADUATI (*)

di EMILIA MEZZETTI e PAOLO VIOLA (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Sia A un anello graduato, a graduazione intera, commutativo con unità. Si studia l'operazione che associa ad un ideale* α *di A l'ideale* α^* *generato dagli elementi omogenei di* α, *con particolare riguardo alle relazioni con la profondità e la lunghezza.*

SUMMARY. - *Let A be a commutative integral-graded ring with unit. We study the function which takes an ideal* α *of A in the ideal* α^*, *generated by the homogeneous elements contained in* α, *with particular regard to the relationships with depth and length.*

Introduzione.

Sia α un ideale di un anello graduato A, commutativo con unità, a graduazione intera (1), e si indichi con α^* l'ideale di A generato dagli elementi omogenei di α.

Dell'operazione * che muta α in α^*, e che è stata già in precedenza studiata da diversi Autori (ved. ad es. [1], [5], [6], [7]), qui ci si propone di indicare ulteriori proprietà.

Precisamente, si studiano dapprima, nel § 2, le relazioni dell'operazione * con la somma, il prodotto, l'intersezione ed il quoziente di

(*) Pervenuto in Redazione il 26 marzo 1980.

(**) Indirizzo degli Autori: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa, 1 - 34100 Trieste.

(1) Ricordiamo che un anello A, commutativo con unità, si dice graduato a graduazione intera se risulta somma diretta di suoi sottogruppi additivi A_i ($i \in \mathbf{Z}$) soddisfacenti alla condizione $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$. Un elemento $a \in A$ si dice omogeneo se esiste un $i \in \mathbf{Z}$ tale che $a \in A_i$.

ideali. Successivamente, nel § 3, si prova una relazione fra la profondità di un ideale primo P e quella del relativo P^*, già nota nel caso di anelli di Cohen-Macaulay (cfr. [5]). Si studia poi il comportamento dell'operazione * rispetto alla lunghezza di ideali primari introducendo, nel § 4, una metodologia per calcolarla sotto particolari ipotesi. Del seguente risultato di Hochster (cfr. [2]): «Se P è un ideale primo generato da una A-successione, P^n è un ideale P-primario», si dà quindi una generalizzazione ad ideali generati da monomi negli elementi di una A-successione che generi P. Nelle stesse ipotesi del § 4 si prova infine, nel § 5, che se l'ideale P è non omogeneo, la lunghezza degli ideali P-primari è non minore di quella dei rispettivi ideali P^*-primari.

§ 1. **L'operazione *.**

Sia α un ideale di A ed α^* l'ideale di A generato dagli elementi omogenei di α. Ovviamente α^* è il massimo ideale omogeneo contenuto in α ed in relazione ad esso valgono le note proprietà:

— *Se α è primo, anche α^* è primo;*

— *Se α è P-primario, α^* è P^*-primario.*

OSSERVAZIONE. Se, in particolare, A è l'anello di polinomi $K[x_1, ..., x_n]$ nelle indeterminate $x_1, ..., x_n$, costruito su un campo algebricamente chiuso K, possiamo dare all'operazione * la seguente interpretazione geometrica. Se P è un ideale primo proprio di A ($P \neq (x_1, ..., x_n)$) ed X la varietà affine $V(P)$ in uno spazio affine di dimensione n su K, allora $Y = V(P^*)$ è il minimo cono affine di vertice l'origine $0\,(0, ..., 0)$ contenente X. Geometricamente si può quindi ottenere Y come chiusura del cono di vertice l'origine su $X - \{0\}$. Se, inoltre, P non è contenuto in $(x_1, ..., x_n)$, Y si può ottenere come cono affine associato ad una opportuna varietà proiettiva di uno spazio proiettivo di dimensione $n - 1$ su K. Infatti, se $\overline{X}$ è la chiusura proiettiva di X, è sufficiente considerare dapprima il cono X_1 proiettante $\overline{X}$ da $(1, 0, ..., 0)$, e poi la sua intersezione X_2 con l'iperpiano di equazione $x_o = 0$.

Esempio: Se $P = (x_3 - 1, x_2 + x_1^2)$ è un ideale di $\mathbf{C}[x_1, x_2, x_3]$ e $X = V(P)$, risulta chiaramente $P^* = (x_1^2 + x_2 x_3)$. D'altra parte si ha: $\overline{X} = V(x_3 - x_o, x_o x_2 + x_1^2)$, $X_1 = V(x_1^2 + x_2 x_3)$, $X_2 = V(x_1^2 + x_2 x_3, x_o)$.

§ 2. **Relazioni con le operazioni fra ideali.**

Studiamo innanzitutto il comportamento dell'operazione * rispetto alle consuete operazioni fra ideali.

PROPOSIZIONE 1. *Siano* α *e* α_1 *ideali di A. Si ha:*

1) $\alpha \subseteq \alpha_1 \Rightarrow \alpha^* \subseteq \alpha_1^*$;

2) $\sqrt{\alpha^*} = (\sqrt{\alpha})^*$;

3) $(\alpha_1 \cap \alpha)^* = \alpha_1^* \cap \alpha^*$;

4) $\alpha^* + \alpha_1^* \subseteq (\alpha + \alpha_1)^*$;

5) $\alpha^* \cdot \alpha_1^* \subseteq (\alpha \cdot \alpha_1)^*$;

6) $(\alpha : \alpha_1)^* \subseteq (\alpha : \alpha_1^*)^* = \alpha^* : \alpha_1^*$;

7) $\alpha^* \subseteq \alpha_1 \Rightarrow \left(\dfrac{\alpha_1}{\alpha^*}\right)^* = \dfrac{\alpha_1^*}{\alpha^*}$.

Dimostrazione. Le 1), 3), 4), 6) sono ovvie. Per quanto riguarda la 2), è chiaro che $\sqrt{\alpha^*} \subseteq (\sqrt{\alpha})^*$; viceversa, se $f \in (\sqrt{\alpha})^*$, f omogeneo, esiste un intero positivo n tale che $f^n \in \alpha$, per cui $f^n \in \alpha^*$ e quindi $f \in \sqrt{\alpha^*}$. Infine, in relazione alla 7), notiamo che l'ideale $\dfrac{\alpha_1}{\alpha^*}$ è un ideale di $\dfrac{A}{\alpha^*}$ che ha struttura di anello graduato, in quanto α^* è omogeneo. Poiché risulta ovviamente $\dfrac{\alpha_1^*}{\alpha^*} \subset \left(\dfrac{\alpha_1}{\alpha^*}\right)^*$, basta provare l'inclusione inversa. A tale scopo sia $[a]_{\alpha^*} \in \left(\dfrac{\alpha_1}{\alpha^*}\right)^*$. Se $a = \sum\limits_{i \in \mathbf{Z}} a_i$, la decomposizione di $[a]_{\alpha^*}$ in componenti omogenee è data da $[a]_{\alpha^*} = \sum\limits_{i \in \mathbf{Z}} [a_i]_{\alpha^*}$. Ne viene che $[a_i]_{\alpha^*} \in \dfrac{\alpha_1}{\alpha^*}$ per ogni $i \in \mathbf{Z}$ e perciò, per l'omogeneità di a_i, $a_i \in \alpha_1^*$; donde la tesi.

OSSERVAZIONE. Consideriamo i seguenti esempi, in cui le inclusioni, di cui ai punti 4), 5), 6) sono strette.

Esempio 1: Siano $\alpha_1 = (x + 1)$ *e* $\alpha = (y + 1)$ due ideali di $\mathbf{Z}[x, y]$. Si ha: $\alpha^* = \alpha_1^* = (0)$ e $(\alpha + \alpha_1)^* = (x + 1, y + 1)^* = (x - y)$.

Esempio 2: Siano $\alpha = (xy, y + x^2)$ e $\alpha_1 = (y^2 - x, xy - 1)$ due ideali di $\mathbf{Z}[x, y]$. Si ha: $\alpha^* = (y^2, xy, x^3)$ e $\alpha_1^* = (y^3 - x^3)$. Il polinomio omogeneo $F(x, y) = y^3 - x^3 = (y^2 - x)(x^2 + y) - (xy - 1)xy$ appartiene ovviamente ad $\alpha \cdot \alpha_1$, ma non ad $\alpha^* \cdot \alpha_1^*$.

Esempio 3: Siano $\alpha = (x)$ e $\alpha_1 = (x + 1)$ due ideali di $\mathbf{Z}[x]$. Si ha: $\alpha^* = \alpha = (x)$ e $\alpha_1^* = (0)$; quindi $\alpha : \alpha_1 = (\alpha : \alpha_1)^* = (x)$ e $\alpha^* : \alpha_1^* = \mathbf{Z}[x]$.

§ 3. **Relazioni con l'altezza e la profondità di ideali primi.**

Da quanto indicato nell'osservazione finale del § 1, deriva subito che se P è un ideale primo di $A = K[x_1, ..., x_n]$, diverso da $(x_1, ..., x_n)$, si ha: $dim\, X \geqslant dim\, Y - 1$, dove $X = V(P)$ e $Y = V(P^*)$. Più in generale, indicata con $ht\,(P)$ l'altezza di un ideale primo P(2), vale la seguente:

PROPOSIZIONE 2. *Se A è un anello noetheriano graduato e P un suo ideale primo non omogeneo, si ha:* $\mathrm{ht}\,(P^*) = \mathrm{ht}\,(P) - 1$.

Dimostrazione. Ved. [5] e [6].

Indicata invece con $d\,(P)$ la profondità di un ideale primo P, si ha che, se l'anello A viene supposto di Cohen-Macaulay (cfr. [4]) risulta ovviamente: $d\,(P^*) = d\,(P) - 1$. Proveremo nella proposizione 3 che questa uguaglianza vale anche in ipotesi leggermente più ampie. A tale scopo premettiamo i seguenti due lemmi.

LEMMA 1. *Siano A un dominio d'integrità graduato, f e g due suoi elementi non omogenei le cui decomposizioni in elementi omogenei siano date da:*

$$f = f_i + \dots + f_{i+m}, \quad f_i \neq 0, \quad f_{i+m} \neq 0, \quad m \neq 0.$$

$$g = g_j + \dots + g_{j+n}, \quad g_j \neq 0, \quad g_{j+n} \neq 0, \quad n \neq 0;$$

Considerata la matrice quadrata di ordine $m + n$

$$B = \begin{Vmatrix} f_i & \dots & f_{i+m} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_i & \dots & f_{i+m} & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & f_i & \dots & f_{i+m} \\ g_j & \dots & g_{j+n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_j & \dots & g_{j+n} & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & g_j & \dots & g_{j+n} \end{Vmatrix}$$

e detto R il suo determinante, si ha che:

1) *R è un elemento omogeneo di A di grado $in + jm + mn$;*

2) *$R = af + bg$, $a, b \in A$.*

Dimostrazione. Consideriamo un minore di ordine n estratto dalle prime n righe della matrice B:

$$C = \begin{Vmatrix} c_{o,i_1} & \dots & c_{o,i_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,i_1} & \dots & c_{n-1,i_n} \end{Vmatrix} \quad 0 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_n \leqslant m + n - 1$$

(2) Per le definizioni e proprietà di altezza e profondità di un ideale, si rimanda a [4].

dove: $c_{\lambda,k} = 0$ se $k - \lambda > m$ oppure $k - \lambda < 0$,

$c_{\lambda,k} = f_{k+i-\lambda}$ se $0 \leqslant k - \lambda \leqslant m$, e

$\partial c_{\lambda,k} = k + i - \lambda$.

Il generico elemento dello sviluppo del determinante di C è, a meno del segno, del tipo $c_{h_o,i_1}\, c_{h_1,i_2} \ldots c_{h_{n-1},i_n}$, con $(h_o, \ldots, h_{n-1})$ permutazione di $(0, \ldots, n-1)$; esso ha quindi grado costante dato da:

$$(i_1 + i - h_o) + \ldots + (i_n + i - h_{n-1}) =$$

$$= (i_1 + \ldots + i_n) + in - \frac{n(n-1)}{2} .$$

Sia ora D il minore complementare di C nella matrice B:

$$D = \left\| \begin{matrix} d_{o,j_1} & \ldots\ldots\ldots & d_{o,j_m} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ d_{m-1,j_1} & \ldots\ldots\ldots & d_{m-1,j_m} \end{matrix} \right\|$$

con $j_1 < j_2 < \ldots < j_m$ indici complementari di $i_1, \ldots, i_n$ nell'insieme $\{0, 1, \ldots, m + n - 1\}$, ed inoltre:

$d_{s,t} = 0$ se $t - s > n$ oppure $t - s < 0$;

$d_{s,t} = g_{t+j-s}$ se $0 \leqslant t - s \leqslant n$ e

$\partial d_{s,t} = t + j - s$.

Analogamente a quanto sopra, il generico elemento dello sviluppo del determinante di D ha grado costante $(j_1 + \ldots + j_m) + jm - \frac{m(m-1)}{2}$.

Sviluppando R secondo la regola di Laplace, troviamo che il suo termine generico è prodotto di un elemento dello sviluppo di $det\, C$ e di uno dello sviluppo di $det\, D$, ed ha quindi grado costante:

$$(i_1 + \ldots + i_n) + in - \frac{n(n-1)}{2} + (j_1 + \ldots + j_m) + jm -$$

$$- \frac{m(m-1)}{2} = in + jm + mn .$$

Siano ora $a = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ e $b = \beta_1 + \ldots + \beta_m$, con α_p complemento algebrico dell'elemento di posto $(p, 1)$ nella matrice B e β_k complemento algebrico dell'elemento di posto $(k + n, 1)$ nella matrice B. Si ha allora: $af + bg = (f_i\alpha_1 + g_j\beta_1) + (f_i\alpha_2 + f_{i+1}\alpha_1 + g_j\beta_2 + g_{j+1}\beta_1) + \ldots + (f_{i+m}\alpha_n + g_{j+n}\beta_m)$, donde la 2), in quanto la prima parentesi a secondo membro vale R, mentre tutte le altre sono nulle a norma del teorema di Laplace (cfr. [3]).

Con procedimento analogo a quello usato nella prima parte della dimostrazione del lemma, si può provare poi che: α_p è omogeneo di grado $in + jm + mn - i + (p - 1)$, β_k è omogeneo di grado $in + jm + mn - j + (k - 1)$.

LEMMA 2. *Se A è un dominio d'integrità graduato ed $\mathfrak{a}$ un suo ideale di profondità* $\mathrm{r} \geqslant 2$, *si ha* $\mathfrak{a}^* \neq (0)$.

Dimostrazione. Siano f, g elementi di $\mathfrak{a}$ in A-successione. Se uno dei due elementi è omogeneo, il lemma è ovvio. Supposti allora entrambi non omogenei, si costruisca l'elemento $R = af + bg$ come nel lemma 1.

Se x è un elemento non nullo di A e $x = x_p + \dots + x_q$, $x_p \neq 0$, $x_q \neq 0$ è la sua decomposizione in elementi omogenei, si indichi con $\psi(x)$ l'intero $q - p + 1$. Si ha allora $\psi(b) \leqslant m$, mentre per ogni elemento non nullo y di (f) risulta $\psi(y) \geqslant m + 1$, e perciò $b \notin (f)$.

Se poi $R = 0$, si ha la relazione $bg = - af$, $b \notin (f)$.

PROPOSIZIONE 3. *Siano A un dominio d'integrità noetheriano graduato e P un suo ideale primo non omogeneo. Se P^* è generabile da una A-successione si ha:* $\mathrm{d}(P^*) = \mathrm{d}(P) - 1$.

Dimostrazione. Sia $R_1, R_2, \dots, R_s$ una A-successione, tale che $P^* = (R_1, R_2, \dots, R_s)$. Una siffatta A-successione non è massimale in P in quanto, se lo fosse, si avrebbe $d\left(\frac{P}{P^*}\right) = 0$ e perciò $P = P^*$, contro le ipotesi.

Si può allora prolungare $R_1, \dots, R_s$ ad una A-successione massimale $R_1, \dots, R_s, f_1, \dots, f_t$ di P. Ovviamente gli elementi $\bar{f}_1 = f$, $\bar{f}_2 = g, \dots, \bar{f}_t$, con $\bar{f}_i = [f_i]_{P^*}$, costituiscono una $\frac{A}{P^*}$ — successione di $\frac{P}{P^*}$. Per il lemma 2, $R = af + bg$ è un elemento omogeneo non nullo di $\frac{P}{P^*}$, con $\left(\frac{P}{P^*}\right)^* = (0)$ per la proposizione 1. Ne viene $t = 1$, da cui la tesi.

§ 4. Un metodo per calcolare la lunghezza di ideali primari.

D'ora in poi si supporrà che gli anelli siano domini d'integrità noetheriani a graduazione positiva e si studieranno le relazioni che intercorrono fra la lunghezza di un ideale P-primario Q e quella dell'ideale P^*-primario Q^*.

Per la definizione e prime proprietà si rimanda a [7].

Introduciamo innanzitutto un metodo che permetta di calcolare rapidamente la lunghezza di ideali primari verificanti opportune condizioni. A tale scopo, si consideri un ideale primo $P = (f_1, ..., f_s)$ e un ideale Q, generato da monomi negli elementi $f_1, ..., f_s$. Sia poi T_Q il sottinsieme di $\mathbf{N}^s$ costituito dalle s-ple $(i_1, ..., i_s)$ tali che $f_1^{i_1} ... f_s^{i_s} \notin Q$.

Nel caso $s = 2$ (ad es. se $P = (x, y)$ è un ideale di $K[x, y]$ e $Q = (x^6, x^2 y^3, xy^4, y^7))$, si può visualizzare una siffatta situazione *crocettando,* in un reticolo bidimensionale, i punti di coordinate (i_1, i_2), con $(i_1, i_2) \in T_Q$.

LEMMA 3. *Sia $f_1, ..., f_s$ una A-successione, con $i_1, ..., i_s$ interi positivi. Allora anche $f_1^{i_1}, ..., f_s^{i_s}$ è una A-successione.*

Dimostrazione. Basta provare che, se $f_1, ..., f_s$ è una A-successione, anche $f_1, ..., f_{s-1}, f_s^n$ lo è, per ogni $n > 0$.

Se infatti $af_s^n \in (f_1, ..., f_{s-1})$, segue che $af_s^{n-1} \in (f_1, ..., f_{s-1})$, da cui la tesi.

PROPOSIZIONE 4. *Siano $P = (f_1, ..., f_s)$ un ideale primo di A, Q un ideale generato da monomi in $f_1, ..., f_s$, con $\sqrt{Q} = P$. Se $f_1, ..., f_s$ è una A-successione, Q è un ideale P-primario.*

Dimostrazione. Si opererà nel caso $s = 3$ (il caso generale ottenendosi con lo stesso metodo, con ovvie modifiche sugli indici), procedendo per induzione su *card* T_Q (sempre finita in quanto $\sqrt{Q} = P$).

Se *card* $T_Q = 1$, si ha $Q = P$. Si supponga perciò *card* $T_Q \geqslant 2$ e si consideri $f_1^l f_2^m f_3^n$ non appartenente a Q e tale che: $f_3^{n+1} \in Q$, $f_2^{m+1} f_3^n \in Q$, $f_1^{l+1} f_2^m f_3^n \in Q$. Allora un monomio del tipo $f_1^i f_2^j f_3^k$ di Q dovrà avere come fattore o f_1^{l+1}, o f_2^{m+1}, o f_3^{n+1}.

Sia $\overline{Q} = Q + (f_1^l f_2^m f_3^n)$ un ideale P-primario per ipotesi induttiva. Se $fg \in Q$, $g \notin P$, necessariamente si ha $f \in \overline{Q}$. Valgono inoltre relazioni del seguente tipo: $f = \Sigma\, a_{ijk} f_1^i f_2^j f_3^k + \lambda f_1^l f_2^m f_3^n$, $\lambda \in A$, $fg = \Sigma\, a_{ijk} f_1^i f_2^j f_3^k g + \lambda f_1^l f_2^m f_3^n g = \Sigma\, b_{ijk} f_1^i f_2^j f_3^k$, donde, con opportuni passaggi, si deduce: $f_3^n [(\Sigma\, (a_{i'j'k'} g - b_{i'j'k'})) f_3 + \lambda f_1^l f_2^m g] = (...) f_1^{l+1} + (...) f_2^{m+1}$. Essendo, per il lemma 3, $f_1^{l+1}, f_2^{m+1}, f_3^n$ una A-successione, si ha:

$$(1) \qquad (\Sigma\, (a_{i'j'k'} g - b_{i'j'k'})) f_3 + \lambda f_1^l f_2^m g = x_1 f_1^{l+1} + x_2 f_2^{m+1}.$$

Gli elementi f_1^l, f_2^{m+1} costituiscono una A-successione, e perciò: $\Sigma\, (a_{i'j'k'} g - b_{i'j'k'}) = y_1 f_1^l + y_2 f_2^{m+1}$. Sostituendo nella (1) si ottiene: $(y_1 f_1^l + y_2 f_2^{m+1}) f_3 + \lambda f_1^l f_2^m g = x_1 f_1^{l+1} + x_2 f_2^{m+1}$, e quindi:

$$(2) \qquad f_2^m (y_2 f_2 f_3 - x_2 f_2 + \lambda f_1^l g) = f_1^l (x_1 f_1 - y_1 f_3).$$

Gli elementi f_1^l, f_2^m costituiscono una A-successione, per cui:

(3) $$y_2 f_2 f_3 - x_2 f_2 + \lambda f_1^l g = z f_1^l.$$

Ora la (2) diviene: $f_2^m f_1^l z = f_1^l (x_1 f_1 - y_1 f_3)$, ed essendo f_1 regolare, semplificando si ottiene:

(4) $$y_1 f_3 = x_1 f_1 - z f_2^m.$$

Poiché f_1, f_2^m, f_3 costituiscono una A-successione, si ha: $y_1 = v_1 f_1 + v_2 f_2^m$, e pertanto la (4) può scriversi: $f_2^m (z - v f_3) = f_1 (x_1 - v_1)$. Ma anche f_1, f_2^m costituiscono una A-successione, e perciò $z - v f_3 = w f_1$, cioè $z \in (f_1, f_3)$.

Ritornando alla (3): $f_2 (y_2 f_3 - x_2) = f_1^l (z - \lambda g)$, da cui, poiché f_1^l, f_2 è una A-successione, si ha: $y_2 f_3 - x_2 = u f_1^l$, e quindi: $f_2 f_1^l u = f_1^l (z - \lambda g)$. Semplificando si ottiene infine: $\lambda g = z - u f_2 \in P$ *ed* $f \in Q$.

PROPOSIZIONE 5. *Siano* $P = (f_1, ..., f_s)$ *un ideale primo e* Q *un ideale generato da monomi in* $f_1, ..., f_s$, *con* $\sqrt{Q} = P$. *Se* $f_1, ..., f_s$ *è una A-successione, si ha che* $\lambda(Q) = \mathrm{card}\, T_Q$.

Dimostrazione. Si procederà per induzione sulla cardinalità di T_Q. Se $\mathrm{card}\, T_Q = 1$, si ha $Q = P$ e $\lambda(P) = 1$. Si supponga allora $\mathrm{card}\, T_Q = n \geqslant 2$, e si consideri l'elemento $f_1^{i_1} ... f_s^{i_s}$, con $i_1 + i_2 + ... + i_s$ massimo fra gli interi del tipo $j_1 + ... + j_s$, dove $(j_1, ..., j_s) \in T_Q$.

Se $\overline{Q} = Q + (f_1^{i_1} ... f_s^{i_s})$, dimostreremo che:

1) $\lambda(\overline{Q}) = \lambda(Q) + 1$,

2) $T_{\overline{Q}} = T_Q - \{(i_1, ..., i_s)\}$;

da cui, per ipotesi induttiva, seguirà che $\lambda(Q) = n$.

1) Sia γ un ideale P-primario, con $Q \subset \gamma \subset \overline{Q}$. Se $f \in \gamma - Q$, $f = q + \lambda f_1^{i_1} ... f_s^{i_s}$, dove $q \in Q$, $\lambda \notin P$. Allora $\lambda f_1^{i_1} ... f_s^{i_s} \in \gamma$ e quindi, per la P-primarietà di γ, $f_1^{i_1} ... f_s^{i_s} \in \gamma$.

2) Si supponga, per assurdo, che esista un monomio $f_1^{j_1} ... f_s^{j_s}$ in $\overline{Q} - Q$, con $(j_1, ..., j_s) \neq (i_1, ..., i_s)$, e quindi del tipo:

(5) $$f_1^{j_1} ... f_s^{j_s} = \sum_{(l_1, ..., l_s) \in T_Q} a_{l_1 ... l_s} f_1^{l_1} ... f_s^{l_s} + b f_1^{i_1} ... f_s^{i_s};$$

dove $b \notin P - \{0\}$ e non è restrittivo supporre $a_{l_1 ... l_s} \notin P$. Semplificando per eventuali fattori comuni del tipo $f_1^{k_1} ... f_s^{k_s}$, la (5) si può scrivere nel seguente modo: $\sum_{k=0}^{p} d_k f_s^k + f_{s-1} g_{s-1} + ... + f_m g_m + ... + f_1 g_1 = 0$, con $g_m \in (f_m, f_{m+1}, ..., f_s)$, per ogni $m = 1, ..., s-1$, e dove i coefficienti dei monomi nelle f_i sono, a meno del segno, gli stessi della (5).

Se k' è tale che $d_k = 0$ per $k < k'$, $d_{k'} \neq 0$, si ha:

$$f_s^{k'} (d_{k'} + d_{k'+1} f_s + \dots + d_p f_s^{p-k'}) \in (f_1, \dots, f_{s-1}),$$

e quindi $d_{k'} \in P$, contro l'ipotesi: i coefficienti d_k risultano perciò tutti nulli. Procedendo in maniera analoga, si prova che $g_{s-1} = \dots = g_2 = 0$, il che è assurdo.

§ 5. Relazioni con la lunghezza di ideali primari.

Trattiamo innanzitutto il caso $P = P^*$. Ovviamente, se Q è un ideale P-primario, si ha: $\lambda(Q^*) - \lambda(Q) = n \geqslant 0$, il numero naturale n potendo assumere un qualunque valore, come apparirà dal seguente esempio.

Esempio. Siano, in $K[x, y]$, $P = (x, y)$ *e* $Q = (x^{2n}, y + x^n)$, con $n > 1$. Dimostreremo che $Q^* = (x^{2n}, x^n y, y^2)$.

Ovviamente gli elementi x^{2n}, $x^n y$, y^2 appartengono a Q^*. Viceversa, sia f_t un elemento omogeneo non nullo di grado t di Q e quindi del tipo: $(a_o + a_1 + \dots + a_r) x^{2n} + (b_o + b_1 + \dots + b_{n+r}) (y + x^n)$. Le componenti omogenee di tale elemento sono:

grado 1	$b_o y$
grado 2	$b_1 y$
. . . .	
grado $n - 1$	$b_{n-2} y$
grado n	$b_{n-1} y + b_o x^n$
grado $n + 1$	$b_n y + b_1 x$
. . . .	
grado $2n - 1$	$b_{2n-2} y + b_{n-1} x^n$
grado $2n$	$b_{2n-1} y + b_n x^n + a_o x^{2n}$
grado $2n + 1$	$b_{2n} y + b_{n+1} x^n + a_1 x^{2n}$
. . . .	
grado $2n + r$	$b_{n+r} x^n + a_r x^{2n}$.

E' sufficiente dimostrare che $b_o = 0$ e che $b_1 + \dots + b_{n-1} \in (y)$. L'unica componente omogenea non nulla è quella di grado t, uguale a f_t. Se $b_o \neq 0$, allora $t = 1$, quindi: $b_{n-1} y + b_o x^n = 0$ (perché $n > 1$), il che è assurdo, in quanto x^n dovrebbe dividere b_{n-1}.

Sia $2 \leqslant t \leqslant n - 1$. Considerando i termini dal grado n al grado $2n - 1$, si trova che $b_i \in (y)$ per ogni $i = 0, \dots, n - 1$.

Sia poi $t = n$ e quindi $b_o = \dots = b_{n-2} = 0$. Considerando il termine di grado $2n - 1$, sicuramente nullo perché $n > 1$, si ha che $b_{n-1} \in (y)$.

Sia infine $t > n$, e quindi $b_i = 0$ per ogni $i = 0, ..., n-1$.

Per calcolare le lunghezze di Q e Q^*, basta poggiare sui risultati della proposizione 5. Si noti che $P = (x, y + x^n)$ e che $x, y + x^n$ costituiscono una A-successione. Le lunghezze sono allora: $\lambda(Q) = 2n$, $\lambda(Q^*) = 3n$.

Una catena non raffinabile di n ideali primari è, ad esempio, la seguente:

$$Q^* = Q_{3n} \subset Q_{3n-1} \subset ... \subset Q_{n-h} \subset ... \subset Q_{2n} = Q$$

dove $Q_{3n-h} = (x^{2n}, y^2, x^{n-h}(y + x^n))$, con $0 \leqslant h \leqslant n$.

Si prenda ora in considerazione il caso $P^* \neq P$. Senza fare ulteriori ipotesi, non si è ancora in grado di determinare le relazioni fra $\lambda(Q)$ e $\lambda(Q^*)$. Si restringeranno perciò le considerazioni ad ideali primi P verificanti la condizione:

(**) $P^* = (R_1, ..., R_s)$ e $P = (R_1, ..., R_s, f)$ con $R_1, ..., R_s, f$ A-successione.

Apparirà utile il risultato della seguente:

PROPOSIZIONE 6. *Siano Q un ideale di A, $\overline{Q}$ un ideale omogeneo P^*-primario, $g = g_i + ... + g_p$ un elemento di Q non appartenente a P^*, $g_i g_p \notin P^*$. Se allora $Q = \overline{Q} + (g)$, si ha $Q^* = \overline{Q}$.*

Dimostrazione. Sia h un elemento omogeneo non nullo di grado t di Q e quindi del tipo: $\overline{q} + (b_o + ... + b_m)(g_i + ... + g_p)$ con $\overline{q} \in \overline{Q}$. Le componenti omogenee di tale elemento sono:

grado 0	$\overline{q}_o$
grado $i-1$	$\overline{q}_{i-1}$
. . . .	. . . .
grado i	$\overline{q}_i + b_o g_i$
grado $i+1$	$\overline{q}_{i+1} + b_o g_{i+1} + b_1 g_i$
. . . .	. . . .
grado $m+p$	$\overline{q}_{m+p} + b_m g_p$
grado $r > m+p$	$\overline{q}_r$.

Se $t \leqslant i-1$ o $t \geqslant m+p+1$, la proposizione è ovvia. Sia dunque $i \leqslant t \leqslant m+p$. Considerando le componenti omogenee di grado $i, i+1, ..., t-1$, si trova che $b_o, ..., b_{t-(i+1)} \in \overline{Q}$, poiché $\overline{Q}$ è P^*-primario. Considerando invece le componenti omogenee di grado $t+1, ..., m+p$, si trova analogamente che $b_{t-p+1}, ..., b_m \in \overline{Q}$. Poiché $i+1 \leqslant p$, si ha $t-p+1 \leqslant t-(i+1)+1$, da cui la tesi.

COROLLARIO 1. *Siano Q, $\overline{Q}$, g come nella proposizione 6. Se β è* *un ideale di A e* $Q_1 = \overline{Q} + (g)\,\beta$, *si ha* $Q_1^* = \overline{Q}$.

COROLLARIO 2. *Siano P e P* ideali primi verificanti (**). Se Q è un ideale P-primario generato da monomi in* $R_1, \ldots, R_s, f$, *si ha* $\lambda(Q) \geqslant \lambda(Q^*)$.

Dimostrazione. Sia $\overline{Q}$ l'ideale P^*-primario generato dai monomi in $R_1, \ldots, R_s$ appartenenti a Q. Per il corollario 1, $Q^* = \overline{Q}$. Applicando la proposizione 5, si ha la tesi.

COROLLARIO 3. *Se P e P* sono ideali primi verificanti (**), si ha, per ogni* $n \geqslant 1$: $\lambda(P^n) - \lambda((P^n)^*) = \binom{n+s-1}{s+1}$.

Dimostrazione. Per la proposizione 4, $(P^*)^n$ *è* P^*-primario. Poiché $P^n = (P^*)^n + (f)\,P^{n-1}$, risulta, per il corollario 1, $(P^n)^* = (P^*)^n$. Inoltre, dalle proposizioni 4 e 5, deriva: $\lambda(P^n) = \binom{n+s}{s+1}$, $\lambda((P^*)^n) = \binom{n+s-1}{s}$, donde la tesi.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI N.: *Algèbre commutative* - Ch. 3 - Hermann (1961).

[2] HOCHSTER M.: *Criteria for Equality of Ordinary and Symbolic Powers of Primes* - Math. Zei. 133 (1973), pp. 53-65.

[3] HODGE W. - PEDOE D.: *Methods of Algebraic Geometry* - Cambridge University Press (1952).

[4] KAPLANSKY I.: *Commutative Rings* - University of Chicago Press (1974).

[5] MATIJEVIC J.: *Three Local Conditions on a Graded Ring* - Trans. Am. Math. Soc. 205 (1975), pp. 275-284.

[6] NASTASESCU C. - VAN OYSTAEYEN F.: *Graded and Filtered Rings and Modules* - Lecture Notes in Mathematics, 758 - Springer - Verlag (1979).

[7] ZARISKI O. - SAMUEL P.: *Commutative Algebra I - II* - Van Nostrand (1960).