INTORNO AD ALCUNI TEOREMI DI SELEZIONE (*)

di GIUSEPPE MUNI (a Bari) (**)

SOMMARIO. - *Si definiscono gli spazi α-fortemente normali e si stabiliscono teoremi di selezione. Si dà inoltre una nuova caratterizzazione degli spazi α-collettivamente normali.*

SUMMARY. - *We define the α-strongly normal spaces and we establish theorems of continuous selection. Moreover we give a new criterion of the α-collectionwise normal spaces.*

INTRODUZIONE

Con riferimento ad un assegnato numero cardinale infinito α nel n. 1 si introduce la seguente definizione:

I) *Uno spazio topologico* X *dicesi α-fortemente normale se per ogni ricovrimento aperto e puntualmente finito* $(G_i)_{i \in I}$ *con* $\operatorname{card} I \leq \alpha$ *esiste un ricovrimento aperto e localmente finito* $(U_i)_{i \in I}$ *tale che* $\overline{U}_i \subset G_i$ *per ogni* $i \in I$.

Denotata con $\mathfrak{M}_\alpha$ la classe degli spazi di Banach E dotati di parti ovunque dense A con card $A \leq \alpha$, si riconosce che le seguenti due proposizioni sono equivalenti:

a) X *è α-fortemente normale*

b) *se* $E \in \mathfrak{M}_\alpha$ *e se* $\varphi : X \rightarrow 2^E$ *è semicontinua inferiormente con*

(*) Pervenuto in Redazione il 13 dicembre 1978.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Analisi Matematica - Università degli Studi - 70100 Bari.

$\varphi(x)$ convesso e compatto, φ è dotata di almeno una selezione continua.

Se si pone $\alpha = card\,\mathbf{N}$, si ottiene un ben noto risultato di Michael [4] per spazi normali.

Nel n. 2, considerata la proprietà:

II) *Per ogni ricovrimento aperto $(G_i)_{i \in I}$ di X con* $\mathrm{card}\, I \leq \alpha$ *e tale che*

1) *l'insieme* $F = \{x \in X \mid I_x$ *è finito*$\}$ *è chiuso,*

2) $\complement_X (F) = \bigcap_{i \in I} G_i$,

esiste un ricovrimento aperto e localmente finito $(U_i)_{i \in I}$ con $\overline{U}_i \subset G_i$,

si riconosce che le seguenti due proposizioni sono equivalenti:

a) X *verifica la* II),

b) *se $E \in \mathfrak{M}_\alpha$ e se $\varphi : X \to 2^E$ è semicontinua inferiormente con $\varphi(x)$ convesso e compatto oppure con $\varphi(x) = E$, φ è dotata di almeno una selezione continua.*

Da quest'ultimo risultato e dai risultati di Michael [4] consegue che tutti e soli gli spazi topologici per i quali è vera la II) sono gli spazi α-collettivamente normali (cfr. [1]).

Inoltre gli spazi per i quali è vera la proprietà II) per ogni numero cardinale infinito sono tutti e soli gli spazi collettivamente normali.

n. 1 - In quanto segue α è un numero cardinale infinito ed ω è il numero cardinale di $\mathbf{N}$.

DEF. 1. - *Uno spazio topologico X dicesi α-fortemente normale se per ogni ricovrimento aperto e puntualmente finito $(G_i)_{i \in I}$ di X con* $\mathrm{card}\, I \leq \alpha$(1) *esiste un ricovrimento aperto e localmente finito $(U_i)_{i \in I}$ di X tale che $\overline{U}_i \subset G_i$ per ogni $i \in I$.*

DEF. 2. - *Uno spazio topologico X dicesi fortemente normale se risulta α-fortemente normale per ogni numero cardinale infinito α.*

Osservazione - Ogni spazio α-fortemente normale è normale. Ogni spazio paracompatto e regolare è fortemente normale. Ogni spazio α-collettivamente normale (cfr. def. 1, [1]) è α-fortemente normale (cfr. Prop. 2 di [1]). In virtù di ben note proprietà dei

(1) Con card *I* si denota il numero cardinale di *I*.

ricovrimenti aperti, numerabili e puntualmente finiti degli spazi normali si ha: *uno spazio topologico è normale se e solo se è* ω *-fortemente normale.*

Se f è una funzione reale e continua su uno spazio topologico X, si conviene di denotare con

$$Sf = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \quad \text{e} \quad Spt\, f = \overline{Sf}$$

PROP. 1. - *Se* X *è uno spazio topologico e se* α *è un numero cardinale infinito, le seguenti due proprietà sono equivalenti:*

a) X *è* α*-fortemente normale,*

b) *per ogni ricovrimento aperto e puntualmente finito* $(G_i)_{i \in I}$ *di* X *con* card $I \leq \alpha$, *esiste una famiglia* $(f_i)_{i \in I}$ *di funzioni reali, continue e positive su* X *tale che* $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$ *per ogni* $x \in X$ *e* $Sf_i \subset G_i$ *per ogni* $i \in I$.

Se α è un numero cardinale infinito, con $\mathfrak{M}_\alpha$ si conviene di denotare l'insieme degli spazi di Banach reali E dotati di un sottoinsieme A ovunque denso con card $A \leq \alpha$. Evidentemente $\mathfrak{M}_\omega$ coincide con l'insieme degli spazi di Banach reali separabili.

Lemma 1. - *Siano:* X *uno spazio* α*-fortemente normale,* $E \in \mathfrak{M}_\alpha$, $\varphi : X \to 2^E$ *una funzione multivalente, semicontinua inferiormente con* $\varphi(x)$ *convesso e compatto per ogni* $x \in X$, $h: X \to E$ *continua e* V *un intorno convesso e aperto di* 0 *in* E *e tale che*

$$\varphi(x) \cap (h(x) + V) \neq \emptyset \qquad \textit{per ogni } x \in X.$$

Allora, per ogni intorno aperto e convesso W *di* 0 *in* E, *esiste* $f: X \to E$ *continua e tale che*

$$f(x) \in \varphi(x) \cap (h(x) + V) + W \qquad \textit{per ogni } x \in X.$$

DIM. - L'applicazione $\psi : X \to 2^E$ con $\psi(x) = \varphi(x) \cap (h(x) + V)$ è semicontinua inferiormente e $\overline{\psi(x)}$ è convesso e compatto. Sia $(y_i)_{i \in I}$ con card $I \leqslant \alpha$ una famiglia ovunque densa di elementi di E, essendo $E = \bigcup_{i \in I} (W - y_i)$ ed E paracompatto, esiste un ricovrimento aperto e localmente finito $(W_i)_{i \in I}$ di E con $W_i \subset W - y_i$ per ogni $i \in I$.

Posto $W_i^* = \{x \in X \mid \psi(x) \cap W_i \neq \emptyset\}$, la famiglia $(W_i^*)_{i \in I}$ risulta un ricovrimento aperto e puntualmente finito di X; detta $(f_i)_{i \in I}$ una partizione dell'unità subordinata a $(W_i^*)_{i \in I}$ e posto $f(x) = \sum_{i \in I} f_i(x)\, y_i$, l'applicazione f risulta continua e $f(x) \in \psi(x) + W$ per ogni $x \in X$.

PROP. 2. - *Se* X *è uno spazio topologico e se* α *è un numero cardinale infinito, le seguenti due proprietà sono equivalenti:*

a) X *è* α*-fortemente normale,*

b) *se* $E \in \mathfrak{M}_\alpha$ *e se* $\varphi : X \to 2^E$ *è una funzione multivalente e semicontinua inferiormente con* $\varphi(x)$ *convesso e compatto per ogni* $x \in X$, *esiste* $f: X \to E$ *continua con* $f(x) \in \varphi(x)$ *per ogni* $x \in X$ *(cioè esiste una selezione di* φ*).*

DIM. - a) $\Rightarrow$ b). Si assuma $V_o = E$ e, per ogni $n \in \mathbf{N}$ con $1 \leqslant n$, $V_n = \{x \in E \mid \; \|x\| < \frac{1}{2^n}\}$, in forza del lemma precedente si definisce per ricorrenza una successione $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di funzioni continue di X in E tale che

$$f_o(x) = 0 \quad \text{e} \quad f_{n+1}(x) \in \varphi(x) \cap (f_n(x) + V_n) + V_{n+1}$$

Essendo per ogni $n \geqslant 1$ e per ogni $x \in X \, \| f_{n+1}(x) - f_n(x) \| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ la successione $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformemente verso una $f: X \to E$ continua, con $f(x) \in \varphi(x)$ per ogni $x \in X$.

b) $\Rightarrow$ a). Sia $(G_i)_{i \in I}$ con card $I \leqslant \alpha$ un ricovrimento aperto e puntualmente finito di X e si consideri lo spazio l_I^1 delle funzioni $f: I \to \mathbf{R}$ tali che $\sum_{i \in I} f(i) < +\infty$ munito della norma $\|f\| = \sum_{i \in I} |f(i)|$.

Per ogni $x \in X$, posto $I_x = \{i \in I \mid x \in G_i\}$ sia

$$\varphi(x) = \{f \in l_I^1 \mid 0 \leqslant f, \; \sum_{i \in I} f(i) = 1 \quad \text{e} \quad Sf \subset I_x\};$$

si passa a provare che l'applicazione $\varphi : X \to 2^{l_I^1}$ è semicontinua inferiormente e che $\varphi(x)$ risulta convesso e compatto per ogni $x \in X$. Siano $\bar{x} \in X$ *e* $f \in \varphi(\bar{x})$, posto $U = \bigcap_{i \in I_{\bar{x}}} G_i$, U è un intorno di $\bar{x}$ e per ogni $x \in U$ essendo $I_{\bar{x}} \subset I_x$ si ha che $f \in \varphi(x)$, pertanto φ è semicontinua inferiormente in $\bar{x}$. E' evidente che $\varphi(x)$ sia convesso per ogni $x \in X$. Sia $x \in X$ e sia $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ una successione di elementi di $\varphi(x)$; per ogni $i \in I$ la successione numerica $(f_n(i))_{n \in \mathbf{N}}$ è limitata e $f_n(i) = 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $i \in I - I_x$; essendo I_x finito esiste una successione $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ estratta dalla $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tale che $(g_n(i))_{n \in \mathbf{N}}$ sia convergente per ogni $i \in I_x$.

Si ponga, per ogni $i \in I$, $g(i) = \lim_n g_n(i)$; è evidente che $0 \leqslant g$, $Sg \subset I_x$ e inoltre

$$\sum_{i \in I} g(i) = \sum_{i \in I_x} g(i) = \sum_{i \in I_x} \lim_n g_n(i) = \lim_n \sum_{i \in I_x} g_n(i) = 1,$$

pertanto $g \in \varphi(x)$. Se $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n \geqslant \nu$ e per ogni $i \in I_x : |g(i) - g_n(i)| < \frac{\varepsilon}{\text{card } I_x + 1}$ e quindi

$$\|g - g_n\| = \sum_{i \in I_x} |g(i) - g_n(i)| < \varepsilon$$

Con ciò è provato che la successione $(g_n)_{n \in N}$ converge in l_I^1 verso $g \in \varphi(x)$ e di conseguenza $\varphi(x)$ è compatto.

Sia $f: X \to l_I^1$ continua e tale che $f(x) \in \varphi(x)$ per ogni $x \in X$. Per ogni $i \in I$ sia $f_i : X \to \mathbf{R}$ con $f_i(x) = f(x)(i)$; la famiglia $(f_i)_{i \in I}$ risulta equicontinua, $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$ per ogni $x \in X$ e, per ogni $i \in I$ si ha $Sf_i \subset G_i$; da ciò, in virtù della prop. 1, consegue che X è α-fortemente normale.

Corollario 1. - *Se* X *è uno spazio topologico le seguenti due proprietà sono equivalenti:*

a) X *è normale*

b) *se* E *è uno spazio di Banach separabile e se* $\varphi : X \to 2^E$ *è una funzione semicontinua inferiormente con* $\varphi(x)$ *convesso e compatto per ogni* $x \in X$, φ *ammette selezioni.*

Corollario 2. - *Se* X *è uno spazio topologico le seguenti due proprietà sono equivalenti:*

a) *per ogni ricovrimento aperto e puntualmente finito* $(G_i)_{i \in I}$ *di* X *esiste un ricovrimento aperto e localmente finito* $(U_i)_{i \in I}$ *di* X *tale che* $\overline{U}_i \subset G_i$ *per ogni* $i \in I$ *(cioè* X *è fortemente normale),*

b) *se* E *è uno spazio di Banach e se* $\varphi: X \to 2^E$ *è semicontinua inferiormente con* $\varphi(x)$ *convesso e compatto per ogni* $x \in X$, φ *ammette selezioni.*

n. 2. - Se α è un numero cardinale infinito e se X è uno spazio topologico si consideri la seguente proprietà:

$(P)_\alpha$ *Per ogni ricovrimento aperto* $(G_i)_{i \in I}$ *di* X *con* card I $\leqslant \alpha$ *e tale che*

1) *l'insieme* $F = \{x \in X \mid I_x$ *è finito*$\}$ *è chiuso,*

2) $\complement_X (F) = \bigcap_{i \in I} G_i$,

esiste un ricovrimento aperto e localmente finito $(U_i)_{i \in I}$ *di* X *tale che* $\overline{U}_i \subset G_i$ *per ogni* $i \in I$.

Osservazione - Ogni spazio topologico X che verifica la proprietà $(P)_\alpha$ risulta α-fortemente normale (e quindi normale).

Def. - *Si dice che uno spazio verifica la proprietà* (P) *se verifica la proprietà* $(P)_\alpha$ *qualunque sia il numero cardinale infinito* α.

Osservazione - Se uno spazio verifica la proprietà (P) risulta fortemente normale.

Prop. 3 - *Se* X *è uno spazio topologico che verifica la proprietà*

$(P)_\alpha$, X *verifica anche la seguente proprietà* $(P')_\alpha$: *Se* F *è un insieme chiuso di* X *e se* $(G_i)_{i\in I}$ *con* $\operatorname{card} I \leqslant \alpha$ *è una famiglia di insiemi aperti di* X *tale che:*

1) $F \subset \bigcup_{i\in I} G_i$,

2) $\forall\, x \in F: I_x = \{i \in I \mid x \in G_i\}$ *è finito,*

esiste una famiglia localmente finita $(U_i)_{i\in I}$ *di insiemi aperti di* X *tale che* $F \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ *e* $U_i \subset G_i$ *per ogni* $i \in I$.

DIM. - Per ogni $i \in I$ si ponga $W_i = G_i \complement_X (F)$, ovviamente si ha: $X = \bigcup_{i\in I} W_i$, per ogni $x \in F\, I_x$ è finito e, per ogni $x \in \complement_X (F)$, $I_x = I$.

Sia $(V_i)_{i\in I}$ un ricovrimento aperto e localmente finito di X con $V_i \subset W_i$ per ogni $i \in I$; essendo $V_i \cap F \subset W_i$ e posto $U_i = V_i \cap G_i$, la famiglia $(U_i)_{i\in I}$ risulta localmente finita e $F \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ e $U_i \subset G_i$.

PROP. 4 - *Se* X *è uno spazio* α-*collettivamente normale* (cfr. def. 1 di [1]), X *verifica la proprietà* $(P')_\alpha$.

DIM. - Sia F un insieme chiuso di X e sia $(G_i)_{i\in I}$ con $\operatorname{card} I \leqslant \alpha$ una famiglia di insiemi aperti di X tale che
1) $F \subset \bigcup_{i\in I} G_i$,

2) $\forall x \in F: I_x = \{i \in I \mid x \in G_i\}$ è finito.

Essendo $F = \bigcup_{i\in I} (G_i \cap F)$ ed essendo F α-collettivamente normale, esiste un ricovrimento aperto e localmente finito $(W_i)_{i\in I}$ di F tale che $W_i \subset G_i \cap F$ (cfr. prop. 2. di [1]); in forza della prop. 3 di [1] esiste un ricovrimento aperto e localmente finito $(V_i)_{i\in I}$ di X tale che $V_i \cap F \subset W_i$ per ogni $i \in I$; posto $U_i = V_i \cap G_i$, $(U_i)_{i\in I}$ risulta una famiglia localmente finita di insiemi aperti di X tale che $F \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ e $U_i \subset G_i$.

Lemma 2. - *Sia* X *uno spazio topologico normale e verificante la proprietà* $(P')_\alpha$, *sia* E *uno spazio di Banach appartenente a* $\mathfrak{M}_\alpha$ *e sia* $\varphi : X \to 2^E$ *una funzione multivalente semicontinua inferiormente con* $\varphi(x)$ *convesso per ogni* $x \in X$. *Se* $f: X \to E$ *è una funzione continua e se* V *è un intorno convesso e aperto di* 0 *in* E *per cui*
1) $\varphi(x) \cap (f(x) + V) \neq \emptyset$ *per ogni* $x \in X$
2) $f(x) \notin \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x)$ *compatto,*
allora, per ogni intorno aperto e convesso W *di* 0 *in* E, *esiste* $g: X \to E$ *funzione continua tale che* $g(x) \in \varphi(x) \cap (f(x) + V) + W$ *per ogni* $x \in X$.

DIM. - Sia $(y_i)_{i\in I}$ con $\operatorname{card} I \leqslant \alpha$ una famiglia ovunque densa di elementi di E, e sia $(W_i)_{i \in I}$ un ricovrimento aperto e localmente finito di E tale che $W_i \subset W - y_i$ per ogni $i \in I$.

Siano $\psi: X \to 2^E$ con $\psi(x) = \varphi(x) \cap (f(x) + V)$ e $W_i^* = \{x \in X \mid \psi(x) \cap W_i \neq \emptyset\}$; la famiglia $(W_i^*)_{i \in I}$ risulta un ricovrimento aperto di X. Posto $F = \{x \in X \mid f(x) \notin \varphi(x) + W\}$, F è chiuso e, per ogni $x \in F$, l'insieme $I_x = \{ i \in I \mid x \in W_i^*\}$ è finito. Per la proprietà $(P')_\alpha$ esiste una famiglia localmente finita $(U_i)_{i \in I}$ di insiemi aperti di X tale che: $F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ e $U_i \subset W_i^*$.

Se $(f_i)_{i \in I}$ è una famiglia di funzioni reali, continue e positive su X per cui: $\sum_{i \in I} f_i(x) \leqslant 1$ per ogni $x \in X$, $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$ per ogni $x \in F$, $Sf_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$, considerata la funzione $g: X \to E$ definita ponendo

$$g(x) = \sum_{i \in I} f_i(x)\, y_i + \Big(1 - \sum_{i \in I} f_i(x)\Big) f(x) \quad \text{per ogni } x \in X,$$

g risulta continua e $g(x) \in \psi(x) + W = \varphi(x) \cap (f(x) + V) + W$.

Prop. 5 - *Se* X *è uno spazio topologico e se* α *è un numero cardinale infinito, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) X *verifica la* $(P)_\alpha$

b) X *è normale e verifica la* $(P')_\alpha$

c) *se* $E \in \mathfrak{M}_\alpha$, *se* $\varphi: X \to 2^E$ *è semicontinua inferiormente con* $\varphi(x)$ *convesso e compatto oppure* $\varphi(x) = E$, φ *ammette almeno una selezione,*

d) *per ogni famiglia* $(G_i)_{i \in I}$ *con* $\mathrm{card}\, I \leqslant \alpha$ *di insiemi aperti di* X *e per ogni insieme chiuso* F *tale che, per ogni* $x \in F$, *l'insieme* $I_x = \{i \in I \mid x \in G_i\}$ *è finito, esiste un ricovrimento aperto e localmente finito* $(U_i)_{i \in I}$ *di* X *tale che* $\overline{U}_i \cap F \subset G_i$ *per ogni* $i \in I$.

Dim. - a) $\Rightarrow$ b). Si è visto in precedenza.

b) $\Rightarrow$ c). Si ponga $V_0 = E$ e $V_n = \{x \in E \mid \|x\| < \frac{1}{2^n}\}$ per $n \geqslant 1$, dal lemma precedente, per induzione si definisce una successione $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di funzioni continue di X in E tale che

$$f_0(x) = 0, \quad f_n(x) \in \varphi(x) \cap (f_{n-1}(x) + V_{n-1}) + V_n \text{ per } n \geqslant 1,$$

la successione $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformemente verso una funzione $f: X \to E$ continua e tale che $f(x) \in \varphi(x)$.

c) $\Rightarrow$ d). Per ogni $x \in F$ sia

$$c(x) = \{f \in l_I^1 \mid 0 \leqslant f,\ \sum_{i \in I} f(i) = 1,\ Sf \subset I_x\};$$

$c(x)$ risulta convesso e compatto e l'applicazione $x \in F \to c(x) \in 2^{l_I^1}$ è semicontinua inferiormente.

Considerata la funzione multivalente $\varphi: X \to 2^{l_I^1}$ definita come segue

$$\varphi(x) = c(x) \text{ per } x \in F, \varphi(x) = l_I^1 \text{ per } x \in \complement_X(F),$$

φ risulta semicontinua inferiormente. Sia $G: X \to l_I^1$ continua e tale che $G(x) \in \varphi(x)$ per ogni $x \in X$.

Considerato l'insieme convesso e chiuso

$$A = \{f \in l_I^1 \mid 0 \leqslant f, \sum_{i \in I} f(i) = 1\},$$

per ogni $x \in F$ si ha: $G(x) \in \varphi(x) = c(x) \subset A$; sia $H: l_I^1 \to A$ una funzione continua tale che $H(f) = f$ per ogni $f \in A$, posto $K = H \circ G$, K risulta una funzione continua di X in l_I^1 tale che
$K(x) \in A$ per $x \in X$, $K(x) = G(x) \in c(x)$ per $x \in F$, $S_{K(x)} \subset I_x$ per $x \in F$.

Se per ogni $i \in I$ e per ogni $x \in X$ si pone $f_i(x) = K(x)(i)$, si ottiene una famiglia $(f_i)_{i \in I}$ di funzioni reali, continue e positive su X tale che

$$\sum_{i \in I} f_i(x) = 1 \text{ per } x \in A, Sf_i \cap F \subset G_i \text{ per } i \in I$$

In virtù di ben noti risultati esiste un ricovrimento aperto e localmente finito $(U_i)_{i \in I}$ di X tale che $\overline{U}_i \subset Sf_i$, e da ciò consegue l'asserto.

d) $\Rightarrow$ a). Sia $(G_i)_{i \in I}$ un ricovrimento aperto di X con $\operatorname{card} I \leqslant \alpha$ e tale che

1) l'insieme $F = \{x \in I \mid I_x$ è finito$\}$ è chiuso,

2) $\complement_X(F) = \bigcap_{i \in I} G_i$;

se $(U_i)_{i \in I}$ è un ricovrimento aperto e localmente finito di X tale che $\overline{U}_i \cap F \subset G_i$ dalla 2) consegue che $\overline{U}_i \subset G_i$.

Corollario 1. - *Se* X *è uno spazio topologico e se* α *è un numero cardinale infinito le seguenti due proposizioni sono equivalenti:*

a) X *è* α-*collettivamente normale*

b) X *verifica la* $(\mathrm{P})_\alpha$.

Corollario 2. - *Se* X *è uno spazio topologico le seguenti proposizioni sono equivalenti*

a) X *è collettivamente normale,*

b) X *verifica la proprietà* (P) *(cioè la* $(P)_\alpha$ *per ogni* α*).*

Corollario 3. - X *è normale* $\Leftrightarrow$ X *è* ω*-collettivamente normale* $\Leftrightarrow$ X *è* ω*-fortemente normale* $\Leftrightarrow$ X *verifica la* $(P)_\omega$.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. AQUARO, *Spazi collettivamente normali ed estensioni di applicazioni continue,* Riv. Mat. Univ. Parma, (II), 2 (1961), 77-90.

[2] C. BERGE, *Espaces topologiques Fonctions multivoques,* Dunod, Paris 1959.

[3] N. BOURBAKI, *General topology,* Chap. I e II, Hermann Paris 1965.

[4] E. MICHAEL, *Continuous selections,* I, Ann. of Math., Vol. 63 n. 2, 1956.

[5] E. MICHAEL, *Continuous selections,* II, Ann. of Math., vol. 64 1956.

[6] E. MICHAEL, *Continuous selections,* III, Ann. of Math. vol. 65 n. 2, 1957.

[7] J. NAGATA, *Modern general topology,* North Holland, Publ. Co, 1968.

[8] F. PARTHASARATHY, *Selection Theorems and their Applications,* Lecture Notes n. 263, Springer Verlag.